Dempp, Carl W.,

Dr. Carl Wilh. Dempp's Taschenbuch für angehende Maurer-, Steinmetz-, Zimmermeister, Mühlärzte, Bauhandwerker überhaupt, Werkmeister und Paliere enthaltend: die im Bauwesen vorkommenden Maße und Gewichte, Flächen- und Kö rperberechnungen ...
Bd.: 1. Theil

München 1860

Dr. Carl Wilh. Dempp's

verst. Privatdozenten und Lehrers an der kgl. Baugewerksschule zu München

Taschenbuch

für angehende

Maurer-, Steinmetz-, Zimmermeister, Mühlärzte, Bauhandwerker überhaupt, Werkmeister und Paliere.

Erster Theil

enthaltend:

die Arithmetik (Decimalbrüche, Quadrat- und Kubikwurzel, Proportionen); die Lehre vom Maß und Gewicht; Geometrie, Flächen- und Körperberechnung; die Gesetze der Mechanik und der Baumaschinen, der Wasserkräfte und Triebwerke, der Festigkeit der Baumaterialien; die Lehre vom Vermessen und Nivelliren ꝛc., mit besonderer Berücksichtigung der auf das Meisterexamen sich vorbereitenden Bauhandwerker.

Gänzlich umgearbeitet

von

Heinrich Grebenau,

bayer. Ingenieur und ehem. Lehrer der mathem. Gegenstände an der kgl. Baugewerksschule zu München.

Dritte Auflage.

Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzschnitten und 1 Figurentafel.

München, 1860.

Joseph Lindauer'sche Buchhandlung.

Vorrede zur dritten Auflage.

In gegenwärtiger dritter Auflage erscheint dieß Werkchen zum erstenmal in zwei Theile getrennt, deren erster die dem Bauhandwerker nöthigen Lehren aus der Arithmetik, Geometrie, Mechanik, Vermessungskunde 2c. enthält, während der zweite die Anleitung zur Anfertigung von Kostenanschlägen, Preisverzeichnisse, Baurechtslehre, Baupolizei, Verordnungen 2c. enthalten soll.

Die Erfahrung zeigte nämlich, daß das Taschenbuch vorzugsweise von solchen Bauhandwerkern gesucht wurde, welche sich auf das vorgeschriebene Meisterexamen vorbereiten.

Die Mehrzahl dieser Bauhandwerker gehört aber dem sogenannten platten Lande an, wo der Besuch einer technischen Unterrichtsanstalt zu den Ausnahmen gehört, und der angehende Bauhandwerker lediglich auf den Besuch der Volksschule, den Privatunterricht und das Selbststudium angewiesen ist. Für diese ist gegenwärtiges Taschenbuch vorzugsweise bestimmt.

Das erste Kapitel, über die Arithmetik, erscheint hier zum erstenmal und wurde deßhalb vorausgeschickt, damit der auf Selbststudium angewiesene Bauhandwerker Alles beisammen finde, was er zu seiner Vorbereitung für das Meisterexamen in dieser Beziehung nöthig hat. Dabei wurden nur diejenigen Regeln und Verfahrungsweisen aufgenommen, welche der geübte Praktiker anwendet und welche am schnellsten und sichersten zum Resultat führen. Das Erlernen des Ausziehens der Quadrat- und Kubikwurzel pflegt erfahrungsgemäß dem Bauhandwerker viel Zeit und Mühe zu kosten, und hat am Ende nur den Nutzen, eine gute Uebung im Rechnen mit Decimalzahlen zu sein. Man sollte sie höchstens von den Bauhandwerkern für Städte I. Classe verlangen, und sich bei den übrigen begnügen, wenn Aufgaben über Quadrat- und Kubikwurzeln, welche im Bauwesen ohnehin höchst selten vorkommen, durch Probiren gelöst werden. Außer der kürzesten Methode der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel, wurde daher auch die Methode des Probirens auseinandergesetzt.

Das zweite Kapitel über Maß und Gewicht und die verjüngten Maßstäbe wurde gegenüber der vorigen Auflage erweitert.

In demselben wurde die Construktion des verjüngten Maßstabes deßwegen besonders ausführlich dargestellt, weil über diesen wichtigen Gegenstand in ähnlichen Lehrbüchern wenig oder gar nichts enthalten zu sein pflegt.

Im dritten Kapitel, über Geometrie, wurden nur solche Sätze und Aufgaben dargestellt, welche dem Bauhandwerker von wirklichem praktischen Nutzen sind, oder in gewöhnlichen Lehrbüchern der Geometrie in Bezug auf ihre Anwendung nicht genug hervorgehoben werden.

Das vierte Kapitel, über Flächen- und Körperberechnung, wurde, als das dem Bauhandwerker Wissenswürdigste und Unentbehrlichste, durch eine große Zahl von praktischen Beispielen bereichert. Solche Aufgaben aus der Flächen- und Körperberechnung, welche in den übrigen Lehrbüchern der Arithmetik und Geometrie keine besondere Beachtung zu erfahren pflegen, aber im Bauwesen von Bedeutung sind, und diejenigen Aufgaben, welche erfahrungsgemäß den Examinanden bei der Meisterprüfung fast durchgehends Schwierigkeiten verursachen, wurden besonders hervorgehoben und erläutert, wie z. B. §§. 83 und 94 vom Verhältniß ähnlicher Flächen und Körper und §§. 102 und 127 von der Berechnung kleiner Flächen- und Körpertheile 2c.

Die vier ersten Kapitel enthalten dasjenige, dessen Kenntniß unbedingt von jedem Bauhandwerker verlangt wird. Mit diesen hat also der Anfänger zunächst zu beginnen und sich dieselben vollkommen anzueignen. Zahlreiche aus der Praxis genommene Beispiele zeigen überall den Weg an, wie die gegebenen Regeln anzuwenden sind. Damit jedoch diese Beispiele ihren Zweck erreichen, müssen dieselben mehrmals, anfangs mit dem Buch, später ohne dasselbe und mit veränderten Zahlen wirklich durchgerechnet und die Lehrsätze, Regeln, Aufgaben niedergeschrieben werden, was dem Anfänger, welchem das Selbsterlernen aus Büchern eine neue Sache ist, ganz besonders empfohlen wird.

Das fünfte Kapitel vom spezifischen Gewicht und der Berechnung des Gewichts der Körper ist nahezu wie in der vorigen Auflage geblieben.

Dem sechsten Kapitel, über Mechanik, ist die Betrachtung der Erdwinde, des Haspels und eine größere Anzahl Beispiele beigefügt worden. Bei der Betrachtung der einzelnen Baumaschinen wurde durchgehends das Gesetz: „Was an Kraft gewonnen wird, geht an Geschwindigkeit verloren, und umgekehrt," mehr als gewöhnlich hervorgehoben, weil ohne dieses Gesetz eine vollkommene Einsicht in die Leistung dieser Maschinen nicht möglich ist.

In das siebente Kapitel über den freien Fall der Körper 2c.,

mußte mit Rücksicht auf das zehnte Kapitel (von der Wasserkraft) die Aufgabe, wie aus der Fallhöhe eines Körpers dessen Endgeschwindigkeit zu finden ist, und umgekehrt, beigefügt werden.

Das achte Kapitel, über den Wasserdruck, und das neunte, über die Bewegung des Wassers, wurden etwas ausführlicher als in der vorigen Auflage behandelt, da dieser Gegenstand für Wasserbauverständige, Mühlärzte, Sachverständige bei Wasserprocessen 2c. von der größten Wichtigkeit ist und das Verständniß des folgenden Kapitels sich darauf gründet.

Das zehnte Kapitel, über die Wasserkraft und die Triebwerke, ist ganz neu und erscheint hier zum erstenmal. Dasselbe ist zunächst für den Mühlarzt, welcher eine Meisterprüfung ähnlich jener der Bauhandwerker zu bestehen hat, dann aber auch für alle Jene bestimmt, welche mit Wasserkräften und Triebwerken in Praxi zu thun haben. Der Stand der Mühlärzte ist in neuester Zeit in eine eigenthümliche Stellung gerathen. Durch den raschen Fortschritt der mechanischen Werkstätten, welche sich auch auf die Verbesserung der Mühlen und Triebwerke überhaupt geworfen haben, ist der Mühlarzt (in der bisherigen Bedeutung des Wortes) überflügelt, und droht zu einem Zimmermann oder Radmacher herab zu sinken, dem nur noch Flickarbeiten in alten Mühlen übertragen werden können. Bei der Anlage neuer Triebwerke wird heutzutage ungleich mehr verlangt, als man bei der dermaligen Art und Weise der Ausbildung der Mühlärzte von einem solchen erwarten kann. Bisher erstreckten sich die Kenntnisse der Mühlärzte größtentheils nur auf das Detail der Triebwerke. Die richtige Anlage eines neuen Triebwerks setzt aber die Kenntniß der Größe der vorhandenen Wasserkraft und der Gesetze, nach welchen diese wirkt, somit einen gewissen Theil der Ingenieur-Wissenschaft voraus. Diesen muß sich der Mühlarzt zu eigen machen, wenn er der Aufgabe, welche bei dem Neubau eines Triebwerkes an ihn gestellt wird, gewachsen sein will. Hiezu soll das vorliegende zehnte Kapitel in Verbindung mit Kapitel 8 und 9 eine Anleitung geben. Aber auch ein anderer, nicht minder wichtiger Grund bewog den Verfasser, dieses Kapitel dem Taschenbuch für Bauhandwerker und Mühlärzte einzuverleiben. Das Gesetz vom 28. Mai 1852 über die Benützung des Wassers in Bayern greift täglich mehr und mehr wohlthätig in's öffentliche Leben ein. Dasselbe enthält aber eine große Zahl technischer Begriffe und eine gewisse Nomenklatur der Bestandtheile eines Triebwerkes, welche für den Techniker niederen Ranges um so mehr einer wissenschaftlichen Erklärung bedürfen, als diese Gegenstände je nach der Gegend verschiedenartig bezeichnet zu werden pflegen, wodurch Irr-

thümer und Mißverständnisse entstehen. Sehr häufig werden auch Zimmermeister und Mühlärzte, insbesondere auf dem platten Lande, als Sachverständige bei Anwendung des Gesetzes über die Benützung des Wassers beigezogen. Die den Sachverständigen vorgelegten Fragen sind aber gewöhnlich mehr oder minder theoretischer Natur, und die Beantwortung derselben ist in vielen Fällen nicht so leicht und doch mitunter von großer Wichtigkeit, namentlich, wenn es sich um Entschädigungen ꝛc. handelt. Eine kurzgefaßte Belehrung über Wasserkraft und Triebwerke wird daher solchen Sachverständigen um so willkommener sein, als etwas derartiges mit Rücksicht auf die bestehende Gesetzgebung in der Literatur bisher nirgends zu finden war.

Das elfte Kapitel, über den Luftdruck und die Pumpen, blieb unverändert.

Das zwölfte Kapitel, über die Festigkeit der Baumaterialien, blieb gleichfalls unverändert. Dasselbe enthält eine Zusammenstellung der Resultate der Navier'schen Theorie über die Festigkeit der Materialien mit Reduktion auf das bayerische Maß und Gewicht und wird im Zusammenhalt mit dem Inhalt des zehnten Kapitels auch dem höheren Techniker das Werkchen nicht ohne Nutzen erscheinen lassen.

Das dreizehnte Kapitel, vom Vermessen und Nivelliren, wurde mit einigen Zusätzen versehen und soll dem Bauhandwerker, insbesondere wenn er als Eisenbahn- und Straßenbau-Accordant auftritt, dann dem Vorarbeiter bei solchen Bauten, dem Wasserbauvorarbeiter ꝛc. zu Aufnahmen von Situationsplänen, Absteckungen, Nivellements ꝛc. die nöthige Anleitung geben, und ihm über den Gebrauch der Meßgeräthe, einschließlich des Winkelspiegels und der Kanalwage belehren.

Die Verlagshandlung hat ihrerseits Alles gethan, das Werkchen in seiner gegenwärtigen Bearbeitung auch in Bezug auf Aeußeres entsprechend auszustatten, und hat namentlich für eine größere Zahl eingedruckter Holzschnitte Sorge getragen.

Auf den besonderen Wunsch derselben wurde auch der ursprüngliche Titel belassen, obwohl das Werkchen in seiner gegenwärtigen totalen Umarbeitung und Erweiterung nur noch die Idee in Bezug auf den Zweck desselben mit dem ehemaligen Dempp'schen Taschenbuch gemein hat.

Möge nun das Buch den Bauhandwerkern und andern technischen Gewerbsleuten den Nutzen bringen, welchen der Verfasser beabsichtigt hat!

Neustadt a/A. im Jahre 1859.

Der Verfasser.

Inhalt.

Erstes Kapitel.

Arithmetik.

A. Von den Decimalbrüchen und den 4 Rechnungsarten mit denselben.

B. Von der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel.

C. Von den Proportionen, von der einfachen und zusammengesetzten Regeldetri, Zins- und Interessenrechnung.

D. Einiges über Buchstabenrechnung und Formeln.

Zweites Kapitel.

Vom Maße und Gewichte und den verjüngten Maßstäben.

Drittes Kapitel.

Geometrie.

Die wichtigsten Lehrsätze über die im Bauwesen vorkommenden Linien, Flächen und Körper.

Viertes Kapitel.

Anwendung der Arithmetik auf Geometrie.

A. Flächenberechnung.

B. Körperberechnung.

Fünftes Kapitel.

Vom spezifischen Gewicht und der Berechnung des Gewichts der Körper.

Sechstes Kapitel.

Mechanik und von den Baumaschinen.

A. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.

B. Vom Schwerpunkt.

C. Vom Hebel.

D. Von der Rolle und dem Flaschenzug. Vom Rad an der Welle und dem Räderwerk.

E. Von der schiefen Ebene, dem Keil und der Schraube.

Siebentes Kapitel.

Dynamik oder Lehre von der Bewegung der Körper. — Freier Fall der Körper. — Fall der Körper auf der schiefen Ebene. — Von der Reibung.

Achtes Kapitel.

Hydrostatik oder Lehre vom Gleichgewicht des Wassers.

Neuntes Kapitel.

Hydraulik oder Lehre von der Bewegung des Wassers.

Zehntes Kapitel.

Von der Wasserkraft und den Triebwerken.

Eilftes Kapitel.

Aerostatik oder Lehre vom Gleichgewicht der Luft.

Zwölftes Kapitel.

Von der Festigkeit der Baumaterialien.

Dreizehntes Kapitel.

Vom Vermessen und Nivelliren.

Erstes Kapitel.

Arithmetik.

A. Von den Decimalbrüchen und den vier Rechnungsarten mit denselben.

1. Erklärung. Aus den Elementen der Arithmetik ist bekannt, daß die Ziffer einer Zahl, z. B. 465783, je nach ihrer Stellung einen verschiedenen Werth haben. So bedeutet der 3er 3 Einheiten oder 3 Einer, der der 8 Zehner, die der 7 Hunderter, der der 5 Tausender, der der 6 Zehntausender, der die 4 Hunderttausender und die ganze Zahl bedeutet: Vierhundert fünf und sechzig Tausend sieben hundert drei und achtzig Einer. Von der Rechten zur Linken gezählt, hat jede Zifferstelle einen 10mal größern Werth als die nächst vorhergehende; denn die Zehner an der zweiten Stelle sind 10mal größer als die Einer, die Hunderter an der dritten sind 10mal größer als die Zehner und 100mal größer als die Einer, die Tausender an der vierten Stelle sind 10mal größer als die Hunderter, 100mal größer als die Zehner und 1000mal größer als die Einer u. s. w.

[illegible]

[illegible]

Erstes Kapitel.

Arithmetik.

A. Von den Decimalbrüchen und den vier Rechnungsarten mit denselben.

1. Erklärung. Aus den Elementen der Arithmetik ist bekannt, daß die Ziffer einer Zahl, z. B. 465783, je nach ihrer Stellung einen verschiedenen Werth haben. So bedeutet der 3er 3 Ganze oder 3 Einer, der 8er 8 Zehner, der 7er 7 Hunderter, der 5er 5 Tausender, der 6er 6 Zehntausender, der 4er 4 Hunderttausender und die ganze Zahl bedeutet: Vierhundert fünf und sechzig Tausend siebenhundert drei und achtzig Einer. Von der Rechten zur Linken gezählt, hat jede Zifferstelle einen 10mal höheren Werth als die nächst vorhergehende; denn die Zehner an der zweiten Stelle sind 10mal größer als die Einer, die Hunderter an der dritten sind 10mal größer als die Zehner und 100mal größer als die Einer; die Tausender an der vierten Stelle sind 10mal größer als die Hunderter, 100mal größer als die Zehner und 1000mal größer als die Einer u. s. w.

Die Zahl 111 (Einhundert und elf) zeigt dieß noch deutlicher. Hier ist (von links nach rechts gerechnet) die erste 1 (ein Hunderter) 10mal größer als die zweite (ein Zehner) und diese wieder 10mal größer als die dritte (ein Einer). Umgekehrt ist von rechts nach links die erste Ziffer 10mal kleiner als die zweite, diese 10mal kleiner als die dritte, u. s. w.

Bei allen ganzen Zahlen hat also jede Zifferstelle nach links einen 10mal größeren Werth als die zunächst vorhergehende, und umgekehrt, jede Zifferstelle nach rechts einen 10mal kleineren Werth als die zunächst vorhergehende.

Setzt man diese Betrachtungsweise nach rechts fort und hängt man bei einer Zahl rechts an die Einer noch weitere Ziffer an, so muß nach demselben Grundsatze nothwendigerweise jede rechts angehängte Ziffer immer einen 10mal kleineren Stellenwerth haben als die unmittelbar vorhergehende. Hat man z. B. die Zahl 111 (einhundert elf) und hängt man an diese Zahl, nachdem man zur Unterscheidung der Ganzen am Ende der Einer ein Zeichen, z. B. ein Komma gesetzt hat, noch eine 1 an, so wird 111,1 entstehen und die rechts angehängte 1 einen 10mal kleineren Werth haben müssen als die vorhergehende Ziffer. Da diese die ganzen Einer bedeutet, so muß die rechts des Komma's angesetzte 1 nothwendigerweise $^1/_{10}$ (ein Zehntel) bedeuten. Eine weiters rechts angehängte Ziffer 1 gibt 111,11. Die zu äußerst rechts angehängte 1 ist wieder 10mal kleiner als die vorhergehende; da diese $^1/_{10}$ bedeutet, so muß die zweite 1 zur Rechten $^1/_{10}$ von $^1/_{10}$ oder $^1/_{100}$ (ein Hundertel) bedeuten. Die dritte rechts angehängte Ziffer 1 in 111,111 bedeutet aus gleichem Grunde

$^1/_{1000}$ (ein Tausendel), die vierte in **111,1111** bedeutet $^1/_{10000}$ (ein Zehntausendel) u. s. w.

Was von der Ziffer **1** gilt, gilt auch von allen Vielfachen derselben bis **9**. So wird **624,7835** bedeuten: **624** Ganze, **7** Zehntel, **8** Hundertel, **3** Tausendel, **5** Zehntausendel. Sind keine Ganzen vorhanden, so setzt man eine Null vor das Komma, z. B. **0,7835** bedeutet: Null Ganze, **7** Zehntel, **8** Hundertel, **3** Tausendel, **5** Zehntausendel.

2. Ein solcher Bruchtheil eines Ganzen, wie **0,7835**, heißt nun ein Decimalbruch, und zwar ein ächter Decimalbruch, weil keine Ganzen dabei sind. Enthält der Decimalbruch Ganze, wie **624,7835**, so heißt man diesen einen unächten Decimalbruch oder kurzweg eine Decimalzahl. Die Ziffern rechts des Komma's heißen Decimalstellen oder kurzweg Decimalen. Das Komma oder der Decimalstrich trennt die Ganzen von den Decimalstellen.

Ein Decimalbruch ist also ein Bruch, dessen Zähler eine beliebige Zahl, und dessen Nenner **10**, **100**, **1000**, **10000** u. s. w. ist.

Der mit den Decimalzahlen noch nicht vertraute Bauhandwerker wird sich eine klare Vorstellung von dem Wesen der Decimalzahlen machen, und alle folgenden Regeln leichter fassen, wenn er sich beständig den zehntheiligen Maßstab vorstellt, und an diesem die Regeln und Beispiele prüft. Bei dem zehntheiligen oder Decimalmaßstab wird bekanntlich der Schuh in 10 Zolle, der Zoll in 10 Linien getheilt. Hat man also eine Decimalzahl, z. B. 63,47 vor sich, so stelle man sich vor, die Ganzen dieser Zahl seien Fuße, dann bedeutet die erste Stelle rechts des Decimalstrichs Decimalzolle, die zweite Stelle Decimallinien. 63,47 bedeutet also 63 Fuß, 4 Zoll, 7 Linien Decimalmaß. 0,39 bedeutet 3 Zoll 9 Linien; 1,08 bedeutet 1 Fuß 8 Linien; 9,614 bedeutet 9 Fuß, 6 Zoll, $1\frac{4}{10}$ Linien Dec. u. s. w.

3. Aus dem Vorhergehenden ergibt sich die Art und Weise, wie Decimalbrüche gelesen und angeschrieben werden.

18,265 bedeutet 18 Ganze, 2 Zehntel, 6 Hundertel, 5 Tausendel, oder 18 Ganze, 26 Hundertel, 5 Tausendel oder endlich 18 Ganze, 265 Tausendel.

0,789 heißt: keine Ganze, 7 Zehntel, 8 Hundertel, 9 Tausendel, oder: 78 Hundertel, 9 Tausendel, oder 789 Tausendel.

0,0304 wird gelesen: keine Ganze, 3 Hundertel, 4 Zehntausendel, oder 304 Zehntausendel.

Betrachtet man die Decimalzahl 18,265 am Maßstab, so bedeutet dieselbe 18 Fuß, 2 Zoll, 6 und $\frac{5}{10}$ oder $6\frac{1}{2}$ Linien Decimalmaß. Hiefür kann aber auch offenbar gesagt werden: 182 Zoll, $6\frac{1}{2}$ Linien oder $1826\frac{1}{2}$ Linien. 0,789 heißt 0 Fuß, 7 Zoll, $8\frac{9}{10}$ Linien oder zusammengelesen $78\frac{9}{10}$ Linien u. s. w.

4. Da der Werth eines Decimalbruchs nur von den Ziffern und der Stellung des Komma's abhängt, so können an einen ächten Decimalbruch Nullen angehängt werden, ohne daß der Werth des Bruches dadurch geändert wird, z. B.

$$0{,}3 = 0{,}30 = 0{,}300$$

d. h. 3 Zehntel sind gleich 30 Hundertel und gleich 300 Tausendeln;

$$1{,}75 = 1{,}750 = 1{,}7500$$
$$= 01{,}75 = 001{,}750 \text{ u. s. w.}$$

(Das Zeichen = heißt „Gleichheitszeichen“ und bedeutet „ist gleich“.)

Sollen daher Decimalbrüche auf gleiche Benen-

nung gebracht werden, so dürfen die fehlenden Stellen nur mit Nullen ausgefüllt werden.

Sollen z. B. die Brüche 0,6; 18,04; 627,301 und 4 Ganze auf einerlei Benennung gebracht werden, so wird daraus

0,600; 18,040; 627,301; 4,000.

Am Decimalmaßstab heißt dieß: 0,6 Fuß oder 6 Zoll sind 60 Linien oder 600 Zehntel Linien; 18,04 Fuß sind 180 Zoll, 4 Linien oder 1804 Linien oder 18040 Zehntellinien; 627,301 sind 627 Fuß, 301 Zehntellinien und 4,0 sind 4 Fuß oder 40 Zoll oder 400 Linien oder 4000 Zehntellinien.

5. Ganze Zahlen werden als Decimalzahlen geschrieben, indem man nach den Einern ein Komma setzt, und eine oder mehrere Nullen anhängt, z. B.

285 = 285,0 = 285,00 u. s. w.

6. Rückt man in einem Decimalbruch das Komma um eine Stelle zur Rechten, so werden alle Ziffern gleichsam um eine Stelle zur Linken geschoben; dadurch wird der Werth einer jeden Ziffer und folglich auch der Werth des ganzen Bruches 10mal größer. Wird z. B. in 4,763 das Komma um eine Stelle rechts gerückt, so entsteht 47,63. Aus den 4 Einern des ersten Bruches sind 4 Zehner geworden; aus den 7 Zehnteln des ersten Bruches sind 7 Ganze oder 7 Einer, aus den 6 Hunderteln sind 6 Zehntel, aus den 3 Tausendeln sind 3 Hundertel geworden. Es ist somit jede Ziffer und daher der ganze Decimalbruch 10mal größer geworden. Wird das Komma in 4,763 um 2 Stellen rechts gerückt, so entsteht 476,3; hiedurch sind die ursprünglichen 4 Einer zu 4 Hundertern, die 7 Zehntel zu 7 Zehner, die 6

Hundertel zu 6 Einer oder 6 Ganze, die 3 Tausendel zu 3 Zehntel und somit alle Ziffer 100mal größer geworden. Daher die Regel:

Eine Decimalzahl wird mit 10, 100, 1000 ꝛc. multiplizirt, wenn man das Komma um 1, 2, 3 ꝛc. Stellen zur Rechten rückt. Z. B.

$$
\begin{aligned}
11{,}8 \times 10 &= 118{,}0 \\
6{,}764 \times 10 &= 67{,}64 \\
0{,}5412 \times 10 &= 5{,}412 \\
0{,}007 \times 100 &= 0{,}7 \\
96{,}6428 \times 1000 &= 9642{,}8
\end{aligned}
$$

(Das Zeichen $\times$ bedeutet „mal" oder „multiplizirt mit".)

Sind rechts keine Zifferstellen mehr vorhanden, so hängt man Nullen an, z. B.

$$
\begin{aligned}
3{,}01 \times 100 &= 301{,}0 \\
0{,}017 \times 1000 &= 17{,}0 \\
81{,}3 \times 10000 &= 813000{,}0
\end{aligned}
$$ u. s. w.

7. Eine ähnliche Betrachtung über die Verrückung des Komma's zur Linken führt zu der Regel:

Eine Decimalzahl wird mit 10, 100, 1000 ꝛc. dividirt, wenn man das Komma um 1, 2, 3 ꝛc. Stellen zur Linken rückt. Z. B.

$$
\begin{aligned}
254 : 10 &= 25{,}4 \\
254 : 100 &= 2{,}54 \\
1031{,}8 : 10 &= 103{,}18 \\
1031{,}8 : 100 &= 10{,}318 \\
1031{,}8 : 1000 &= 1{,}0318
\end{aligned}
$$

(Das Zeichen : bedeutet „dividirt durch".)

Sind links keine Stellen mehr vorhanden, so werden Nullen vorgesetzt, z. B.

254	: 1000	=	0,254	
1031,8	: 10000	=	0,10318	
8	: 10	=	0,8	
8	: 100	=	0,08	
0,359	: 10	=	0,0359	
0,904	: 100	=	0,00904	u. s. w.

Am Decimalmaßstab lassen sich diese Regeln ebenfalls versinnlichen. 11,8 $\times$ 10 oder 11 Fuß 8 Zoll Dec. 10mal genommen, gibt 118 Fuß; 6,76 $\times$ 10 oder 6 Fuß, 7 Zoll, 6 Linien 10mal genommen, gibt 67 Fuß, 6 Zoll u. s. w. Ferner: 254 : 10 oder der zehnte Theil von 254 Fuß gibt 25 Fuß 4 Zoll oder 25,4. Ein 100tel von 254 Fuß gibt 2 Fuß, 5 Zoll, 4 Linien oder 2,54. Der 10te Theil von 8 Fuß gibt 8 Zoll oder 0,8; ein 100tel von 8 Fuß sind 8 Linien oder 0,08 u. s. w.

8. Addition und Subtraktion der Decimalbrüche.

Decimalbrüche werden addirt und subtrahirt wie ganze Zahlen, wobei jedoch die Komma unter einander gesetzt werden müssen. Am Resultat wird das Komma an dieselbe Stelle gesetzt.

1. Beispiel. Es sollen die folgenden Decimalzahlen addirt werden:

$$0,8 + 1,49 + 264 + 7,085$$

(+ bedeutet „plus“ oder „hiezu addirt“.)

Rechnungsansatz:

0,8	oder	0,800
1,49		1,490
264		264,000
7,085		7,085
	Summa =	273,375

2. Beispiel. Soll 18,0914 von 204,37 abgezogen werden, so wird dieß durch

204,37 — 18,0914 ausgedrückt,

(— bedeutet „minus“ oder „weniger“) und gibt folgenden Rechnungsansatz:

204,37	oder	204,3700
18,0914		18,0914
	Rest =	186,2786

3. Beispiel. 18 — 0,604; oder 0,604 soll von 18 abgezogen werden, gibt:

18	oder	18,000
0,604		0,604
	Rest =	17,396

Daher ist 18 — 0,604 = 17,396.

Uebungsbeispiele.

1. 7,15 — 0,05 + 18,0031 — 16,9 = 8,2031.
2. 6,4071 — 48,4601 + 423,013 — 7,44 + 0,180 — 363,7 = 10,0.

9. Multiplication der Decimalbrüche.

Zwei Decimalbrüche werden multiplizirt, indem man sie wie ganze Zahlen multiplizirt und im Produkt so viele Zifferstellen von rechts nach links abschneidet, als beide Faktoren zusammengenommen Decimalstellen haben.

Faktoren heißen die beiden Zahlen, welche mit einander multiplizirt werden sollen. Das Resultat der Multiplication nennt man Produkt.

1. Beispiel. 2,15 × 16,3 d. h. 2,95 soll mit 16,3 multiplizirt werden. (× heißt „mal“ oder „multiplizirt mit“.)

2,15 16,3 645 1290 215 35045	Das Produkt der beiden Faktoren 215 und 163 ist ohne Rücksicht auf das Komma = 35045; da nun 2,15 rechts des Komma's 2 Decimalstellen, 16,3 deren 1 hat, also beide Faktoren zusammen 3 Decimalstellen haben, so werden im Produkt 35045 von rechts nach links 3

Ziffer abgeschnitten und das richtige Produkt ist 35,045.

Bemerkung. Bei jeder Rechnung mit Decimalzahlen soll man sich am Ende der Rechnung Rechenschaft geben, ob das Resultat auch wirklich so groß ist, als berechnet, oder ob nicht ein grober Fehler durch unrichtige Anwendung des Decimalkomma's vorgekommen ist. Im vorliegenden Beispiel kann dieß schnell dadurch geschehen, daß man in den beiden gegebenen Zahlen die Decimalstellen einen Augenblick wegläßt; dann hat man 2 × 16; da dieses 32 gibt, so kann das Resultat der Multiplikation der beiden Zahlen 2,15 und 16,3 offenbar nicht 3,5045 und nicht 350,45 geben, weßhalb 35,045 in Bezug auf das Komma richtig sein muß.

2. Beispiel. 24 × 0,75 d. h. 24 soll mit 0,75 multiplizirt werden.

24 0,75 120 168 1800	Das Produkt beider Zahlen ohne Rücksicht auf das Komma ist 1800; da die beiden Faktoren zusammen 2 Decimalstellen rechts des Komma's haben (24 hat deren keine, 0,75 deren 2), so müssen im Resultat 2 Stellen von rechts

nach links abgeschnitten werden, das richtige Produkt ist daher 18,00 oder 18.

Bemerkung. Anfänger könnten es auffallend finden, daß durch Multiplikation (Vermehrung) von 24 mit 0,75 nur 18 Ganze herauskommen; allein man muß nicht übersehen, daß 0,75 eigentlich $\frac{75}{100}$ oder $= \frac{3}{4}$ ist, und daß $24 \times \frac{3}{4} = \frac{72}{4}$ oder 18 Ganze geben muß.

Man hat sich daher zu merken, daß die Multiplikation einer

ganzen Zahl mit einem ächten Bruch immer eine kleinere Zahl gibt.

Die Multiplikation einer ganzen Zahl mit einem ächten Bruch läßt, genau genommen, eine doppelte Erklärung zu, und kann sowohl eine Vermehrung wie eine Theilung bedeuten. Z. B. $\frac{3}{4} \times 24$ kann heißen: Man soll $\frac{3}{4}$ 24mal nehmen. Dieß gibt $\frac{72}{4}$ oder 16 Ganze; hier haben wir eine Vermehrung des Bruches $\frac{3}{4}$ ausgeführt. $\frac{3}{4} \times 24$ kann aber auch umgekehrt $24 \times \frac{3}{4}$ geschrieben werden; und dieß heißt dann: Man soll 24 $\frac{3}{4}$mal nehmen, oder besser deutsch: Man soll $\frac{3}{4}$ das ist Drei Viertel von 24 nehmen. $\frac{1}{4}$ von 24 ist 6 und $\frac{3}{4}$ von 24 sind folglich 18 Ganze, wie vorhin. In diesem Fall haben wir eine Theilung der Zahl 24 ausgeführt.

3. Beispiel. 4,88 × 0,25 gibt:

```
 4,88
 0,25
------
 2440
 976
------
12200
```

Das Produkt ohne Rücksicht auf das Komma ist 12200; da in jedem der beiden Faktoren rechts des Komma's 2 Decimalstellen sind, in beiden zusammen also 4, so müssen in 12200 von der Rechten zur Linken 4 Stellen abgeschnitten werden, das Produkt ist daher 1,2200 oder 1,22.

Bemerkung. Da 0,25 eigentlich $\frac{25}{100}$ oder $\frac{1}{4}$ ist, so hat man in dieser Multiplikation eigentlich $\frac{1}{4}$ von 4,88 ausgerechnet, dieses ist 1,22.

Sind im Produkt nicht so viele Decimalstellen vorhanden, als abgeschnitten werden sollen, so werden die fehlenden Stellen links durch Nullen ersetzt. Z. B.

4. Beispiel. 0,685 × 1,24 gibt:

```
 0,685
  1,24
-------
  2740
 1370
 685
-------
 84940
```

Im Produkt 84940 müssen hier 5 Stellen von der Rechten zur Linken abgestrichen werden, daher ist eine Null voranzusetzen, und das richtige Produkt ist 0,84940 oder 0,8494.

5. Beispiel. 12,4 × 0,005 gibt:

12,4
0,005
620

Da die beiden Faktoren zusammen 4 Decimalstellen haben, so sind in 620 von Rechts nach Links 4 Stellen abzuschneiden, daher ist das Produkt = 0,0620 oder = 0,062.

6. Beispiel. 0,125 × 8000 gibt:

0,125
8000
1000000

Im Produkt 1000000 sind 3 Stellen abzuschneiden, daher ist das richtige Produkt = 1000,00 oder = 1000.

7. Beispiel. 0,0017 × 0,246 × 0,5 gibt:

246
17
1722
246
4182
5
20910

Die 3 Faktoren haben zusammen 8 Decimalstellen, daher ist das Produkt = 0,00020910 oder = 0,0002091.

Uebungsbeispiele.

3,4 × 0,15 × 10 = 5,1.
0,75 × 0,5 × 40 = 15,0.
18000 × 0,025 × 0,0002 = 0,09.
(140 — 139,75) × 1,8 = 0,45.

Die Klammern ( ) bedeuten, daß das, was nach der Subtraktion von 139,75 von 140 übrig bleibt, mit 1,8 zu multipliziren ist.

(13,79 + 6,21) × (89,70 — 89,65) = 1,0.

Hier muß zuerst 13,79 und 6,21 addirt, dann

89,65 von 89,70 abgezogen werden. Die beiden herauskommenden Zahlen werden alsdann multiplizirt.

$(0,038 - 0,0275) \times 0,48 \times 80000 = 40,32.$
$0,2 \times 0,3 = 0,06.$
$0,5 \times 0,02 \times 0,01 = 0,0001.$
$1593 \times 0,00001684 = 0,02682612.$
$1,414 \times 1,414 + 0,000604 = 2,0.$
$1,732 \times 1,732 + 0,000176 = 3,0.$
$0,0078125 \times 128000 = 1000.$
$0,987641 \times 7200 = 7111,0152.$
$1,0025 \times 244,8 = 245,412.$

10. Division der Decimalbrüche.

Man beginnt hier am besten mit dem einfachsten Fall, da sich die andern immer darauf zurückführen lassen.

1. Regel: Soll ein Decimalbruch mit einer **ganzen Zahl** dividirt werden, so dividirt man wie bei ganzen Zahlen und setzt im Quotient das Komma, wenn die Division in die Ganzen des Decimalbruchs zu Ende ist.

Z. B. $16,48 : 4 = 4,12$

d. h. 16,48 dividirt durch 4 ist gleich 4,12. Man sagt hier: 4 in 16 geht 4mal; Komma; 4 in 4 geht 1mal, 4 in 8 geht 2mal; der Quotient ist 4,12.

Hier ist 16,48 der Dividend, 4 der Divisor und 4,12 der Quotient. —

$$0,96 : 24 = 0,04.$$

Hier sagt man: 24 in 0 Ganze geht 0mal; Komma; 24 in 9 geht 0mal; 24 in 96 geht 4mal; der Quotient ist 0,04. —

4,35 : 125

oder 4,35 dividirt durch 125 gibt folgenden Rechnungsansatz:

4,35	125
375	0,0348
—600	
500	
1000	
1000	
—	

Hier sagt man: 125 in 4 Ganze geht 0mal, Komma; 125 in 43 geht 0mal, 125 in 435 geht 3mal; 3mal 125 ist 375, abgezogen bleibt 60, eine Null angehängt; 125 in 600 geht 4mal, bleibt 100, eine Null angehängt; 125 in 1000 geht 8mal. Die Rechnung geht auf, also ist

4,35 : 125 oder

$$\frac{4,35}{125} = 0,0348.$$

2. Regel: Ein Decimalbruch wird mit einem Decimalbruch dividirt, indem man in **beiden** Decimalbrüchen das Komma um so viele Stellen zur Rechten rückt, als Decimalstellen im Divisor enthalten sind, und wie mit einer ganzen Zahl dividirt.

Auf diese Art wird der Divisor-Decimalbruch immer zu einer ganzen Zahl und die Division geht nach Regel 1.

Z. B. 0,48 : 0,16 = 48 : 16 = 3.

Hier wird der Divisor 0,16 dadurch zu einer ganzen Zahl gemacht, daß man das Komma um 2 Stellen rechts rückt, wodurch aus 16 Hunderteln 16 Ganze werden, dann muß aber auch im Dividend 0,48 das Komma um 2 Stellen rechts gerückt werden; der Grund davon ist: 16 Hundertel sind in 48 Hun-

derteln ebenso oft enthalten, als 16 Ganze in 48 Ganze, nehmlich 3mal. — So ist:

$$0{,}48 : 0{,}8 = 4{,}8 : 8 = 0{,}6.$$

Hier muß im Divisor 0,8 das Komma um 1 Stelle und folglich im Dividenden 0,48 gleichfalls um 1 Stelle rechts gerückt werden; dann ist die Division 4,8 : 8 nach Regel 1 auszuführen, und gibt 0,6 als Quotient. —

Soll 4,8 mit 0,012 dividirt werden, so muß das Komma, weil der Divisor 0,012 drei Decimalstellen hat, in beiden Zahlen um 3 Stellen zur Rechten gerückt werden; dieß gibt

$$4{,}8 : 0{,}012 =$$
$$4800 : 12 = 400.$$

Soll 54 mit 0,27 dividirt, mit andern Worten soll untersucht werden, wie oft 27 Hundertel in 54 Ganzen enthalten sind, so muß das Komma in beiden Zahlen um 2 Stellen rechts gerückt werden, wodurch 5400,0 und 27,0 entsteht; daher ist:

$$54 : 0{,}27 = 5400 : 27 = 200.$$

Hier gilt eine ähnliche Bemerkung, wie in §. 9. Eine ganze Zahl mit einem ächten Decimalbruch dividirt, muß immer eine größere Zahl als Quotient geben. Z. B.

4 : 0,2 gibt 40 : 2 = 20 Ganze
4 : 0,02 gibt 400 : 2 = 200 u. s. w.

Im ersten Fall hat man zu untersuchen, wie oft 2 Zehntel in 4 Ganzen; im zweiten Fall, wie oft 2 Hundertel in 4 Ganzen enthalten sind.

Soll 60,3 durch 48,24 dividirt werden, so muß in beiden Decimalbrüchen, weil der Divisor 2 Decimalstellen hat, das Komma um 2 Stellen rechts gerückt werden, daher wird:

60,3 : 48,24 =
6030,0 : 4824 = 1,25.

Soll 1 durch 0,0125 dividirt werden, so ist in beiden Zahlen das Komma um 4 Stellen rechts zu rücken, dann wird:

1 : 0,0125 =
10000,0 : 125,0 = 10000 : 125 = 80.

Ist endlich 24 mit 586,731 zu dividiren, so wird das Komma um 3 Stellen zur Rechten gerückt und es wird:

24 : 586,731 =
24000 : 586731 = 0,0409046 ....

Hier geht die Division nicht auf, daher, um dieß anzudeuten, am Ende Punkte gesetzt werden.

Uebungsbeispiele.

94,302	:	40,3	=	2,34
2414,957202	:	801,22	=	3,0141
7,03	:	14,8	=	0,475
44,93	:	0,21	=	213,9523 ....
12,130857	:	0,333	=	36,429 ....
389	:	0,233	=	1669,527 ....
0,368	:	0,00024	=	1533,333 ....
1,1	:	0,66	=	1,666 ....

11. Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche.

Um einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, dividirt man mit dem Nenner in den Zähler, setzt nach dem Ganzen das Komma, und dividirt nach der in §. 10 gegebenen Regel weiter; z. B:

$\frac{5}{16}$ soll in einen Decimalbruch verwandelt werden. Man sagt: 16 in 5 geht 0mal, Komma; 16 in 50 geht 3mal, 3mal 16 ist 48, von 50 bleibt 2; 16 in 20 geht 1mal, 1mal 16 ist 16, von 20 bleibt 4; 16 in 40 geht 2mal, 2mal 16 ist 32, von 40 bleibt 8; 16 in 80 geht 5mal. Der gesuchte Dezimalbruch ist also 0,3125, oder es ist:

$$\frac{5}{16} = 0,3125,$$

und so in allen Fällen. So wird:

$\frac{3}{8} = 0,375$ $\quad \frac{1}{9} = 0,1111 \ldots$
$\frac{13}{16} = 0,8125$ $\quad \frac{9}{11} = 0,8181 \ldots$
$\frac{17}{125} = 0,136$ $\quad \frac{7}{12} = 0,5833 \ldots$
$\frac{13}{5} = 2,6$ $\quad \frac{9}{31} = 0,255 \ldots$
$\frac{121}{25} = 4,84$ $\quad \frac{17}{45} = 0,377 \ldots$
$\frac{1}{7} = 0,142857142857 \ldots.$

Da die einfachen gemeinen Brüche z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ꝛc. auch in Rechnungen mit Decimalzahlen häufig vorkommen, so ist es gut, wenn man ein für allemal die am häufigsten vorkommenden gemeinen Brüche in Decimalbrüche verwandelt, und diese sich dem Gedächtniß einprägt, was bei Anwendung der Decimalbrüche auf Arithmetik und Geometrie große Erleichterung gewährt. So ist:

$\frac{1}{4} = 0,25$ $\quad \frac{1}{3} = 0,333 \ldots$
$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,50$ $\quad \frac{2}{3} = 0,666 \ldots$
$\frac{3}{4} = 0,75$ $\quad \frac{3}{3} = 1 = 1,000 \ldots$
$\frac{4}{4} = 1 = 1,00$ $\quad \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} = 1,333 \ldots$
$\frac{5}{4} = 1,25$ $\quad \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} = 1,666 \ldots$
$\frac{6}{4} = 1\frac{1}{2} = 1,50$ $\quad \frac{6}{3} = 2 = 2,000 \ldots$
$\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4} = 1,75$ $\quad \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} = 2,333 \ldots$

$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0{,}2$	$\frac{1}{8} = 0{,}125$
$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0{,}4$	$\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25$
$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0{,}6$	$\frac{3}{8} = 0{,}375$
$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0{,}8$	$\frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0{,}500$
ꝛc.	ꝛc.

12. Geht bei der Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch die Division auf, so entsteht ein geschlossener Decimalbruch; z. B.:

$$\frac{1}{8} = 0{,}125$$
$$\frac{6}{25} = 0{,}24 \text{ u. s. w.;}$$

geht aber die Division nicht auf, so entsteht ein unendlicher oder periodischer Decimalbruch; z. B.:

$$\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots \quad \frac{8}{27} = 0{,}296296\ldots$$
$$\frac{7}{11} = 0{,}636363\ldots \quad \frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots$$

wobei, wie aus diesen Beispielen erhellt, die Periode 1, 2, 3, 4 ... 7ziffrig, oder auch gemischt sein kann, wie in

$$\frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots \quad \text{(Periode 3)}$$
$$\frac{19}{22} = 0{,}86363\ldots \quad (\text{„} \quad 63)$$
$$\frac{59}{72} = 0{,}819444\ldots \quad (\text{„} \quad 4)$$

Um zu unterscheiden, welche gemeine Brüche geschlossene oder unendliche Decimalbrüche geben, gilt die Regel:

Alle gemeinen Brüche, deren Nenner aus den Zahlen 2 oder 5 oder aus einem Produkt beider bestehen, geben geschlossene Decimalbrüche; alle anderen gemeinen Brüche geben unendliche, und zwar immer periodische Decimalbrüche.

Alle gemeinen Brüche, deren Nenner 2, 4, 8,

16, 32 oder 5, 25, 125, 625 ꝛc. oder Produkte zweier beliebigen dieser Zahlen sind, wie $5 \times 8 = 40$ oder $5 \times 32 = 160$ oder $16 \times 32 = 512$ ꝛc., geben also geschlossene Decimalbrüche.

Alle gemeinen Brüche dagegen, deren Nenner die Zahlen 3, 6, 9, 12 oder 15, 18, 24 oder 7, 11, 13, 17, 19 ꝛc. als Faktor enthalten, geben unendliche periodische Decimalbrüche.

13. Verwandlung von Decimalbrüchen in gemeine Brüche.

Geschlossene Decimalbrüche werden in gemeine Brüche verwandelt, indem man sie einfach als gemeine Brüche mit dem Nenner 10, 100, 1000 ꝛc. schreibt und reduzirt, wenn dieß möglich ist; z. B.:

$$0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{25}{200} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$
$$0{,}42 = \frac{42}{100} = \frac{21}{50}$$
$$1{,}75 = 1\frac{75}{100} = 1\frac{15}{20} = 1\frac{3}{4}$$ u. s. w.
$$2{,}357 = 2\frac{357}{1000}$$ dagegen, und
$$0{,}51 = \frac{51}{100}$$ lassen sich nicht weiter reduziren.

Unendliche Decimalbrüche lassen sich gleichfalls in gemeine Brüche umwandeln. Hier genügt es, auf die am häufigsten vorkommenden Fälle aufmerksam zu machen. Merkt man sich nehmlich, daß

$$\frac{1}{9} = 0{,}1111\ldots$$
$$\frac{2}{9} = 0{,}222\ldots$$
$$\frac{3}{9} = 0{,}333\ldots = \frac{1}{3}$$
$$\frac{4}{9} = 0{,}444\ldots$$
$$\frac{5}{9} = 0{,}555\ldots$$
$$\frac{6}{9} = 0{,}666\ldots = \frac{2}{3}$$ u. s. w.

daß ferner:

$$\frac{1}{90} = 0{,}01111\ \ldots$$
$$\frac{2}{90} = 0{,}0222\ \ldots$$
$$\frac{3}{90} = 0{,}0333\ \ldots = \frac{1}{30} \text{ u. s. w.}$$

daß weiters:

$$\frac{1}{99} = 0{,}010101\ \ldots$$
$$\frac{2}{99} = 0{,}020202\ \ldots$$
$$\frac{10}{99} = 0{,}101010\ \ldots$$
$$\frac{65}{99} = 0{,}656565\ \ldots \text{ u. s. w. ist,}$$

so lassen sich die unendlichen Decimalbrüche mit einziffriger Periode auf 9tel, diejenigen mit zweiziffriger Periode auf 99tel u. s. w. zurückführen. Hienach ist z. B.:

$$0{,}777\ \ldots = \frac{7}{9}$$
$$0{,}666\ \ldots = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$
$$0{,}1666\ \ldots = 0{,}1 + 0{,}0666\ \ldots$$
$$= \frac{1}{10} + \frac{6}{90} = \frac{1}{6}$$
$$0{,}2444\ \ldots = 0{,}2 + 0{,}0444\ \ldots$$
$$= \frac{2}{10} + \frac{4}{90} = \frac{22}{90} = \frac{11}{45}$$
$$0{,}41666\ \ldots = 0{,}41 + 0{,}00666\ \ldots$$
$$= \frac{41}{100} + \frac{6}{900} = \frac{375}{900} = \frac{5}{12}$$
$$1{,}5333\ \ldots = 1\frac{5}{10} + \frac{3}{90} = 1\frac{8}{15}$$
$$0{,}60999\ \ldots = \frac{60}{100} + \frac{9}{900} = \frac{60}{100} + \frac{1}{100}$$
$$= \frac{61}{100} = 0{,}61$$

d. h. für 0,60999 . . . ist 0,61 zu setzen; so ist auch

$$0{,}1999\ \ldots = \frac{1}{10} + \frac{9}{90} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10}$$
$$= 0{,}2 \text{ u. s. w.}$$

14. Anwendung der Decimalbrüche auf arithmetische Aufgaben.

Da der Bauhandwerker bei Berechnung von Kostenanschlägen fast beständig mit Längen-, Flächen- und Körpermaßen zu thun hat, welche in Decimalzahlen ausgedrückt werden, so ist es unerläßlich, auch bei Gulden und Kreuzern, wo nur immer möglich, die Decimalbrüche anzuwenden, weil in Verbindung mit den in Decimalzahlen ausgedrückten Maaßen, Tagschichten 2c. alsdann ungleich schneller gerechnet werden kann, als mit gemeinen Brüchen.

Wie man hiebei am besten mit Decimalzahlen verfährt, und welche Rechnungsvortheile dabei angewendet werden können, sollen folgende aus der Praxis genommene Beispiele zeigen.

Zuerst merke man sich, daß

0,1	fl.	= $\frac{1}{10}$ fl. =	1	Sechser	=	6 kr.
0,15	"	=	$1\frac{1}{2}$	"	=	9 kr.
0,2	"	=	2	"	=	12 kr.
0,25	"	=	$2\frac{1}{2}$	"	=	15 kr.
		. . . .				
0,7	"	=	7	"	=	42 kr.
0,75	"	=	$7\frac{1}{2}$	"	=	45 kr.
		. . . .				
0,9	"	=	9	"	=	54 kr.
0,95	"	=	$9\frac{1}{2}$	"	=	57 kr.

sind, d. h. daß die erste Decimalstelle im Gulden-Decimalbruch Sechser (6 kr.) und jede nachfolgende 5 einen halben Sechser oder einen Groschen (3 kr.) bedeutet. Hienach können Gulden, einzelne Sechser und Groschen leicht in Dezimalbrüchen angeschrieben werden, z. B.:

1 Kronenthaler	=	2 fl. 42 kr.	=	2,7 fl.
1 bayer. Thaler	=	2 „ 24 „	=	2,4 „
1 preuß. Thaler	=	1 „ 45 „	=	1,75 „
1 Zwanziger	=	— . 24 „	=	0,4 „
1 Zwölfer	=	— . 12 „	=	0,2 „
1 Sechser	=	— . 6 „	=	0,1 „
1 Groschen	=	— . 3 „	=	0,05 „

So wird geschrieben:

10 fl. 48 kr.	=	10,8 fl.
3 „ 54 „	=	3,9 „
5 „ 21 „	=	5,35 „
— „ 57 „	=	0,95 „ u. s. w.

Hat man es also mit Preisen von 3, 6, 9, 12, 15, 18 ... 30, 33 ... 54, 57 kr. zu thun, so rechnet man am besten mit den entsprechenden Decimal-Gulden-Brüchen 0,05, 0,1, 0,15, 0,2, 0,25, 0,3 ... 0,5, 0,55 ..... 0,9, 0,95 fl.; hat man es dagegen mit 4, 7, 8, 10, 11, 13, 27, 31, 46 u. s. w. kr., überhaupt mit Preisen zu thun, welche nicht aus einer bestimmten ganzen Anzahl von Sechsern oder Groschen bestehen, so muß man mit Kreuzern rechnen.

Kommt bei irgend einer Rechnung ein Gulden-Decimalbruch als Resultat heraus, so wird dieser dadurch zu Kreuzern gemacht, daß man den Bruch (ohne die Ganzen) mit 60 multiplicirt, und ebensoviel Stellen von der Rechten zur Linken abschneidet, als der Decimalbruch Stellen hat; z. B.:

1) 6,4 fl. gibt 6 fl. + 0,4 × 60 kr.

0,4 60 ——— 240	Man sagt 0,4 × 60 gibt 240, hievon 1 Stelle (weil 0,4 eine Decimalstelle hat) abgeschnitten, gibt 24,0 oder 24 kr.

2) 14,75 fl. gibt 14 fl. + 0,75 × 60.

$$\begin{array}{r} 0{,}75 \\ 60 \\ \hline 4500 \end{array}$$

Man sagt 0,75 × 60 gibt 4500, hievon 2 Stellen (weil 0,75 zwei Stellen hat) ab, gibt 45,0 oder 45 kr.

3) 8,575 fl. gibt 8 fl. + 0,575 × 60.

$$\begin{array}{r} 0{,}575 \\ 60 \\ \hline 34500 \end{array}$$

Man sagt 0,575 × 60 gibt 34500, hievon 3 Stellen ab, gibt 34,5 oder $34\frac{1}{2}$ kr.

4) 0,6666 fl. gibt 0,6666 × 60.

$$\begin{array}{r} 0{,}6666 \\ 60 \\ \hline 399960 \end{array}$$

Man sagt 0,6666 × 60 gibt 399960, hievon 4 Stellen ab, gibt 39,996 oder 40 kr.

15. Uebungsaufgaben.

Aufgabe 1. Was kosten 46,5 □′ à 12 kr.?

Aufl. 12 kr. ist = 0,2 fl., daher

$$\begin{array}{r} 46{,}5 \\ 0{,}2 \\ \hline 930 \end{array}$$

Man sagt 46,5 × 0,2 = 930, hievon 2 Stellen ab, gibt 9,3 fl. oder 9 fl. 27 kr.

Aufg. 2. Was kosten $75\frac{3}{4}$ c′ Hausteine à 1 fl. 12 kr.?

Aufl. 75,75 × 1,2 fl. oder

$$\begin{array}{r} 75{,}75 \\ 1{,}2 \\ \hline 15150 \\ 7575 \\ \hline 90900 \end{array}$$

Vom Produkt 90900 sind 3 Stellen abzuschneiden, daher ist das Resultat 90,9 fl. = 90 fl. 54 kr.

Aufg. 3. Was kosten 402,67 Schachtruthen à 10 fl. 21 kr.?

Aufl. 402,67 × 10,35 fl.

```
 402,67
  10,35
--------
 201335
120801
402670
--------
41676345
```

Vom Produkt 41676345 sind 4 Stellen abzuschneiden, daher 4167,6345 fl. oder 4167 fl. und 0,6345 × 60 kr. oder

```
0,6345
    60
------
380700
```

hieran 4 Stellen abgeschnitten gibt 38,07 kr., im Ganzen 4167 fl. $38\frac{7}{100}$ kr.

Aufg. 4. Was kostet ein gußeiserner Ofen von 589 Pfund = 5,89 Centner Gewicht, wenn der Centner 9 fl. 45 kr. kostet?

Aufl. 5,89 × 9,75 fl. = 57,4275 fl. = 57 fl. $25\frac{65}{100}$ kr. oder: 57 fl. $25\frac{1}{2}$ kr.

Aufg. 5. Was kosten 464 □′ Verputz, wenn 100 □′ $44\frac{1}{2}$ kr. kosten?

Aufl. 4,64 × 44,5 kr.

```
  4,64
  44,5
------
  2320
 1856
1856
------
206480
```

Vom Produkt 206480 sind 3 Stellen abzuschneiden, gibt 206,48 kr. oder 3 fl. $26\frac{48}{100}$ kr., wofür 3 fl. $26\frac{1}{2}$ kr. gesetzt werden kann.

Aufg. 6. Eine Kubik-Klafter Steine (zu 6 × 6 × 6 = 216 c′) kostet 7 fl. 12 kr., was kostet die Schachtruthe (100 c′)?

Aufl. $\frac{7,2 \times 100}{216}$ fl. $= \frac{720}{216} = 3,333..$ fl.
oder $3\frac{1}{3}$ fl. = 3 fl. 20 kr.

Aufg. 7. 1000 Backsteine kosten 18 fl. 45 kr., was kosten 775 Stück?

Aufl. $\frac{18,75 \times 775}{1000}$ fl.
$= 18,75 \times 0,775 = 14$ fl. $31\frac{8}{10}$ kr., wofür 14 fl. 32 kr. gesetzt wird.

Aufg. 8. Wie viel beträgt ein Abgebot von $1\frac{1}{2}$ % (Prozent) auf eine Accordarbeit von 850 fl.?

Aufl. $1\frac{1}{2}$ % sind $1\frac{1}{2}$ Hundertel von 850, das ist 0,015 von 850 oder $850 \times 0,015$.

$$\begin{array}{r} 850 \\ 0,015 \\ \hline 4250 \\ 85 \\ \hline 12750 \end{array}$$

Vom Produkt werden 3 Stellen abgeschnitten, gibt 12,75 fl. oder 12 fl. 45 kr.

Ebenso geben $2\frac{1}{4}$ Prozent von 15600 fl.
$15600 \times 0,0225 = 351$ fl.

$1\frac{3}{4}$ Prozent von 1500 fl. gibt
$1500 \times 0,0175 = 26$ fl. 15 kr.

$11\frac{1}{2}$ Prozent von 4550 fl. gibt
$4550 \times 0,115 = 523,25$ fl.
= 523 fl. 15 kr.

Aufg. 9. Ein Haus von 25800 fl. Werth trägt jährlich 650 fl. Zins, oder was dasselbe ist, auf 25800 fl. Accordarbeiten werden 650 fl. abgeboten, wie viele % sind dieß?

Aufl. $\frac{650 \times 100}{25800} = \frac{650}{258} = 2,52$ %.

Aufg. 10. Ein Schäffel Kalk (8,944 c′) kostet 1 fl. 36 kr., was kostet 1 c′?

Aufl. $\frac{1,6}{8,944}$ fl. $= \frac{1600}{8944} = 0,1789$ fl. $= 0,1789 \times 60$ kr. $= 10,734$ kr., d. i. beinahe $10\frac{3}{4}$ kr.

Oder, da 1 fl. 36 kr. = 96 kr. sind, einfacher $\frac{96}{8,944}$ kr. $= \frac{9600}{8944} = 10,734$ kr.

B. Von der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel.

16. Quadratwurzel. Erklärung. Wenn man eine Zahl mit sich selbst multiplizirt, so wird das Produkt das Quadrat der Zahl genannt. Z. B.: 5×5 ist 25; hier heißt 25 das Quadrat oder die Quadratzahl von 5. Umgekehrt nennt man diejenige Zahl, welche mit sich selbst multiplizirt eine andere Zahl gibt, die Quadratwurzel der letzteren; so ist die Quadratwurzel von 144 = 12, weil 12×12 wieder 144 gibt.

Aus einer Zahl die Quadratwurzel ausziehen, heißt daher: Eine Zahl suchen, welche mit sich selbst multiplizirt die erste Zahl gibt.

Man bezeichnet das Ausziehen der Quadratwurzel mit dem Zeichen $\sqrt[2]{}$ oder einfacher $\sqrt{}$; $\sqrt{49}$ heißt: Man soll aus 49 die Quadratwurzel ausziehen, diese ist 7, da 7×7 wieder 49 gibt. $\sqrt{121} = 11$, weil $11 \times 11 = 121$ u. s. w.

Umgekehrt bezeichnet man das Quadrat einer Zahl mit einem rechts oben stehenden kleinen 2er, z. B. 9^2 heißt: „9 im Quadrat" oder 9×9 das ist $= 81$; 37^2 heißt: 37 im Quadrat oder $37 \times 37 = 1369$.

17. Für den Bauhandwerker haben die Quadratwurzeln nur eine geometrische Bedeutung. Wenn nehmlich die Seite eines Quadrates gegeben ist, so findet man dessen Flächeninhalt, wenn man die Seite mit sich selbst multiplizirt oder in's Quadrat erhebt; ist aber der Flächeninhalt eines Quadrates gegeben und soll dessen Seite gesucht werden, so muß aus dem Flächeninhalt die Quadratwurzel ausgezogen werden.

Deßgleichen muß, wenn aus dem gegeben Flächeninhalt eines Kreises oder einer Kugeloberfläche der Durchmesser des Kreises oder der Kugel gesucht werden soll, das Verfahren der Ausziehung der Quadratwurzel bekannt sein, daher dasselbe hier in Kürze auseinandergesetzt werden soll.

18. Wenn man die 10 ersten Zahlen

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

nacheinander jede mit sich selbst multiplizirt oder ins Quadrat erhebt, so entstehen

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

Die zweite Reihe enthält die Quadrate der Zahlen der ersten Reihe, oder: die Zahlen der ersten Reihe sind die Quadratwurzeln der Zahlen der zweiten Reihe.

So ist z. B. 7 die Quadratwurzel von 49; 8 die Quadratwurzel von 64; jede zwischen 49 und 64 liegende Zahl, z. B. 50, 51, 52 . . . . . . 60, 61,

62, 63 hat ihre Quadratwurzel zwischen 7 und 8, oder die Quadratwurzel dieser Zahlen sind größer als 7 und kleiner als 8, beginnen also sämmtlich mit 7,... Ebenso sind die Quadratwurzeln aller Zahlen von 82 bis 99 größer als 9 und kleiner als 10, beginnen also mit 9,....

Die Zahlen 1, 4, 9, ... 81, 100 heißen daher **reine Quadrate**, weil ihre Wurzeln ganze geschlossene Zahlen sind; jede dazwischen liegende Zahl hat als Quadratwurzel einen unächten unendlichen Decimalbruch.

19. Da das Quadrat von 10 = 100, von 100 = 10000, von 1000 = 1000000 rc. ist, so sieht man, daß 2, 4, 6 Nullen im Quadrat beziehungsweise 1, 2, 3 Nullen in der Quadratwurzel ergeben. Je 2 Nullen im Quadrat entspricht daher 1 Null in der Quadratwurzel. Was aber von diesen Nullen gilt, gilt auch von andern Zifferstellen. Je 2 Zifferstellen im Quadrat entspricht daher 1 Zifferstelle in der Quadratwurzel.

Um also aus einer mehrziffrigen Zahl die Quadratwurzel auszuziehen, theilt man die Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen von je 2 Ziffern; so viele Klassen von je 2 Ziffern entstehen, so viel Ziffern wird die Quadratwurzel enthalten, wobei die letzte Klasse links auch nur eine Ziffer haben kann. So ist

$$\sqrt{64|00} = 80$$

d. h. aus 64 Hundertern ist die Quadratwurzel = 8 Zehner.

$$\sqrt{4|00|00} = 200$$

d. h. aus 4 Zehntausendern ist die Quadratwurzel = 2 Hundertern u. s. w.

20. Um nun die Regeln zur Ausziehung der Quadratwurzel aus einer mehrziffrigen Zahl zu finden, muß man zuerst die Entstehung des Quadrates einer 2ziffrigen Zahl verfolgen. Multiplizirt man z. B. 37 mit sich selbst, so erhält man

$$37^2 = 37 \times 37 = 1369.$$

Zerlegt man aber 37 in die Zehner und Einer, so erhält man

$$37 = 30 + 7$$

und multiplizirt man nun 30 + 7 mit 30 + 7, so gibt dieß

$$(30+7)\times(30+7) = 30\times30 + 30\times7 + 7\times30 + 7\times7$$

oder, wenn man die 2 gleichen mittleren Posten addirt, und für 30 × 30 und 7 × 7 beziehungsweise 30^2 und 7^2 schreibt.

$$37^2 = 30^2 + 2\times30\times7 + 7^2 = 1369,$$

das heißt: das Quadrat einer 2ziffrigen Zahl (37) besteht:

1) Aus dem Quadrat der Zehner ($= 30^2$);
2) " " doppelten Produkt der Zehner in die Einer ($= 2 \times 30 \times 7$);
3) " " Quadrat der Einer ($= 7^2$).

21. Soll nun aus 1369 die Quadratwurzel ausgezogen werden, so zerlegt man diese Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen von 2 Ziffern (oder in ihre Hunderter und Einer) $= \sqrt{13|60}$ wofür auch $\sqrt{1300 + 69}$ gesetzt werden kann. Nun ist

aus der ersten Klasse 13, d. i. 13 Hundertern die Quadratwurzel zwischen 3 und 4 Zehner; denn 30 × 30 gibt 900; 40 × 40 aber schon 1600; die gesuchte Quadratwurzel ist also mindestens 30 oder 3 Zehner; zieht man das Quadrat der Zehner = 30 × 30 = 900 von der Zahl 1369 ab,

$$\begin{aligned} \sqrt{1369} &= 30 \\ 30^2 &= \underline{900} \\ \text{Rest} &= 469 \end{aligned}$$

so bleibt 469; nach der im vorigen §. dargestellten Zusammensetzung aller aus 2ziffrigen Wurzeln gebildeten Quadrate muß aber in diesem Rest 469 noch das doppelte Produkt der Zehner in die Einer und überdieß das Quadrat, der Einer enthalten sein; dividirt man daher den Rest 469 mit den doppelten Zehnern oder mit 2 × 30 = 60, so muß der Quotient die gesuchte Zahl der Einer geben; man schreibt daher

$$\begin{aligned} \sqrt{1369} &= 30 \\ 30^2 &= \underline{900} \\ \text{Rest} &= 469 : 2 \times 30 = 60 \end{aligned}$$

und spricht 60 in 469 geht 7mal; die gesuchte Zahl der Einer ist daher 7, welche oben rechts zu 30 angehängt wird, woraus 30 + 7 = 37 als Wurzel entsteht; wird nun das doppelte Produkt aus Zehner und Einer = 2 × 30 × 7 oder 60 × 7 = 420 von 469 abgezogen, so bleibt 49;

$$\begin{aligned} & 469 \\ = 2 \times 30 \times 7 = & \underline{420} \\ \text{Rest} = & \ 49 \end{aligned}$$

soll aber die gegebene Zahl 1369 ein reines Quadrat sein, so muß sich von diesem Rest 49 noch das Quadrat der gefundenen Einer oder 7 × 7 abziehen lassen; wie man sieht, geht die Rechnung auf,

Rest 49
$7^2 = 49$ die gefundene Quadratwurzel ist da-
——— her 30 + 7 oder 37.
—

Die ganze Rechnung läßt sich nun übersichtlich so darstellen:

$\sqrt{1369} = 30 + 7 = 37$
$30 \times 30 = 900$ = Quadrat d. Zehner, abgezogen bleibt
Rest = 469 dividirt mit $2 \times 30 = 60$ gibt 7;
$60 \times 7 = 420$ = doppeltes Produkt von Zehner und Einer, abgezogen bleibt
Rest = 49 hievon ab
$7 \times 7 = 49$ = Quadrat der Einer,
Rest = 0

Läßt man die Nullen am Zehner und Quadrat der Zehner weg, und schneidet man dafür in der gegebenen Zahl 1369 von der Rechten zur Linken 2 Ziffer ab, so stellt sich die Rechnung ganz kurz, wie folgt:

$\sqrt{13|69} = 3|$
$3 \times 3 = 9$
4|69
$2 \times 3 = (6)$

Und man spricht: die Quadratwurzel von 13 ist 3; 3mal 3 ist 9; abgezogen von 13 bleibt 4; die 2 nächsten Stellen 69 herab, gibt 469; die gefundene Wurzel 3 doppelt genommen, gibt 6; diese 6 werden als Divisor so unter 469 gesetzt, daß rechts noch eine Ziffer (9) frei bleibt, also 6 unter die 6 (in 469) zu stehen kommt; nun wird mit 6 in die darüber stehenden 46 dividirt, geht 7mal;

$$\sqrt{13|69} = 3|7$$
$$3 \times 3 = 9$$
$$\text{Rest} = 4|69$$
$$2 \times 3 = (6) = (6)7$$
$$67 \times 7 = 469$$
—

Diese 7 wird oben im Resultat neben 3 geschrieben, so daß die gesuchte Wurzel 37 entsteht; dieselbe 7 wird aber auch neben den Divisor 6 unter die 9 gesetzt, so daß 67 entsteht; nun wird 67 mit der gefundenen 7 multiplizirt und das Resultat 469 unter 67 gesetzt; 469 von dem Rest 469 abgezogen, gibt als Rest 0; die gesuchte Wurzel ist daher 37. —

Ebenso findet man $\sqrt{56\,25} = 75$; und die Rechnung wird folgendermaßen gesprochen und geschrieben:

$$\sqrt{56|25} = 7|5$$
$$7^2 = 49$$
$$\text{Rest} = 725$$
$$2 \times 7 = (14)\ (14)5$$
$$7 \times 145 = 725$$
—

$\sqrt{5625}$ von der Rechten zur Linken in Klassen von 2 Ziffern getheilt, gibt $\sqrt{56|25}$; aus 56 ist die Quadratwurzel 7; rechts oben als Resultat angeschrieben; 7 × 7 ist 49; unter 56 gesetzt und abgezogen, bleibt 7; 25 dazu herabgenommen gibt 725; die gefundene Wurzel 7 doppelt genommen, gibt 14; diese 14 so unter 725 gesetzt, daß rechts eine Ziffer (5) frei bleibt, also 14 unter 72; 14 in 72 geht 5mal; diese 5 werden oben neben 7 in das Resultat gesetzt, wodurch die gesuchte Wurzel 75 entsteht; dieselbe 5 wird aber auch neben (14) gesetzt, wodurch 145 entsteht; diese 145 mit der gefundenen 5 multiplizirt gibt 725; 725 unter 145

gesetzt und von 725 abgezogen, geht auf. Die gesuchte Wurzel ist daher 75. —

Um aus 141376 die Quadratwurzel zu ziehen, wird nach derselben Regel verfahren; man schreibt und spricht, nachdem die ganze Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen von je 2 Ziffern getheilt worden ist:

```
√14|13|76 = 3|7|6
  9
 ———
  513
  (6)7
  469
————————
  —4476
   (74)6
   4476
  ————
    —
```

Aus 14 ist die Quadratwurzel 3; 3 mal 3 ist 9; 9 unter 14 gesetzt und abgezogen, bleibt 5; 2 Stellen 13 herabgenommen, gibt 513; die gefundene rechts oben angeschriebene Wurzel 3 doppelt genommen, gibt 6; diese 6 werden so unter 513 gesetzt, daß rechts *eine* Ziffer (3) freibleibt, also 6 unter 1 zu stehen kommt; nun sagt man: 6 in die darüber stehende 51 geht 7mal (8mal gäbe zu viel, so daß später nicht abgezogen werden könnte); setzt diese 7 als zweite Ziffer rechts oben in die gefundene Wurzel, aber auch rechts neben (6), so daß daraus 67 entsteht; diese 67 mit der gefundenen 7 multiplizirt, gibt 469; 469 von 513 abgezogen, bleibt 44; 2 Stellen 76 herabgenommen, gibt 4476; die gefundene Wurzel 37 doppelt genommen, gibt 74; diese 74 so unter 4476 gesetzt, daß rechts *eine* Ziffer (6) freibleibt (also 74 unter 47); mit dieser 74 in die darüber stehende 447 dividirt, geht 6mal; diese 6 wird als die dritte Zifferstelle rechts oben in die gefundene Wurzel, aber auch rechts neben (74) gesetzt, so daß 746 entsteht; 746 mit dieser 6 multiplizirt, gibt 4476;

diese von dem Rest 4476 abgezogen, geht auf; die gefundene Wurzel ist daher 376. Macht man die Probe und multiplizirt man 376 mit 376, so erhält man, wie es sein muß, $376 \times 376 = 376^2 = 141376$.

Tritt der Fall ein, daß mit der doppelten gefundenen Wurzel als Divisor sich nicht dividiren läßt, so setzt man in der gefundenen Wurzel 0 als Quotient an, setzt die nächste Zifferklasse zum Rest herunter, nimmt die gefundene Wurzel mit der angehängten Null doppelt und dividirt wieder in den Rest, wie früher; z. B.:

$$\sqrt{81|45|06|25} = 9|0|2|5$$

```
 81
 ——
 —45
 (18)
 ————
 —4506
 (180)2
  3604
 ——————
  —90225
  (1804)5
   90225
 ————————
     —
```

Hier sagt man: Aus 81 ist die Wurzel 9; 9×9 ist 81; abgezogen von 81 bleibt 0; die gefundene Wurzel 9 doppelt genommen, gibt 18; 18 so unter die herabgenommene Zifferklasse 45 gesetzt, daß rechts 5 freibleibt, also 18 unter 4 zu stehen kommt; 18 in 4 geht 0mal; diese 0 wird rechts oben neben die 9 gesetzt, so daß die gefundene Wurzel 90 entsteht. Nun wird die Rechnung durch einen Strich abgeschlossen, der vorige Rest 45 wieder angeschrieben und eine neue Zifferklasse 06 daneben gesetzt; die gefundene Wurzel 90 doppelt genommen, gibt 180; 180 in 450 geht 2mal; 2 wird in das Resultat gesetzt, wodurch die Wurzel 902 entsteht; 2 wird auch neben 180 gesetzt, gibt 1802; 1802mal 2 gibt 3604; 3604 von 4506 abgezogen, bleibt 902; die letzte Zifferklasse 25 angehängt, gibt 90225; die

gefundene Wurzel 902 doppelt genommen, gibt 1804; 1804 in die darüber stehende 9022 geht 5mal; 5 rechts oben angesetzt, gibt 9025 als gefundene Wurzel; neben 1804 wird dieselbe 5 angesetzt, gibt 18045; 18045 mit 5 multiplizirt, gibt 90225; von 90225 abgezogen, geht auf. Die gesuchte Wurzel ist daher 9025, und die Probe zeigt, daß $9025 \times 9025 = 9025^2 = 81450625$ ist.

22. Soll aus einer Decimalzahl die Wurzel gezogen werden, so theilt man die Zahl vom Decimal-Komma aus nach rechts und links in Klassen von 2 Ziffern, und verfährt wie früher. Z. B.: Es soll aus 36,6025 die Quadratwurzel gezogen werden;

```
√36,|60|25 = 6,|0|5
 36
 ——
 —60
 (12)
 ————
   6025
  (120)5
   6025
 ————————
     —
```

Hier sagt man: aus 36 Ganzen ist die Wurzel 6 Ganze, Komma; $6 \times 6 = 36$, abgezogen, Rest 0; 60 herab; 2×6 ist 12; 12 in 6 geht 0mal; die gefundene Wurzel ist daher 6,0; die Rechnung durch einen Strich abgeschlossen, 60 herab und 25 dazu gibt 6025; die gefundene Wurzel 6,0 oder 60 doppelt genommen, gibt 120; 120 in 602 geht 5mal; die gefundene Wurzel wird 6,05; 5 neben 120 gesetzt, gibt 1205; 1205×5 gibt 6025; abgezogen, geht auf. Die gefundene Wurzel ist also 6,05 und die Probe zeigt, daß $6{,}05 \times 6{,}05 = 6{,}05^2 = 36{,}6025$ ist.

2. Beispiel. Soll aus 3,640464 die Quadratwurzel gezogen werden, so gibt dieß:

```
√3,|64|04|64 = 1,|9|0|8
 1
 ———
 264
 (2)9
 261
 ————
  —304
  (38)
  ——————
    30464
   (380)8
    30464
   ———————
      —
```

Man sagt: Aus 3 Ganzen ist die Wurzel 1 Ganzes, Komma; 1 × 1 = 1 abgezogen, bleibt 2; 64 herab; 1 doppelt gibt 2; 2 in 26 geht 9mal (Wurzel = 1,9); 9 neben 2 gesetzt, gibt 29; 29 × 9 gibt 261; 261 von 264 bleibt 3; die nächste Klasse 04 herab, gibt 304; die gefundene Wurzel 1,9 oder 19 doppelt, gibt 38; 38 in 30 geht 0mal (Wurzel = 1,90); die Rechnung durch einen Strich abgeschlossen, 304 wieder herab, 64 dazu, gibt 30464; die gefundene Wurzel 190 doppelt, gibt 380; 380 in 3046 geht 8mal (gefundene Wurzel = 1,908); 8 neben 380 gesetzt, gibt 3808; 3808mal 8 gibt 30464; abgezogen von 30464 geht die Rechnung auf und die gesuchte Wurzel ist 1,908. Probe: $1{,}908 \times 1{,}908 = 1{,}908^2 = 3{,}640464$.

3. Beispiel. Es soll aus 605,16 die Quadratwurzel gezogen werden:

```
√6|05,|16 = 2|4,|6
 4
 ———
 205
 (4)4
 176
 ————
 —2916
  (48)6
  2916
 ——————
    —
```

Das Doppelte der gefundenen Wurzel ist hier 2 × 2 = 4; 4 in 20 ginge wohl 5mal; setzt man aber 5 neben 4, wodurch 45 entsteht, und multiplizirt man 45 mit 5, so erhält man 225, welches sich von 205 nicht abziehen läßt, daher nur 4 genommen werden darf;

4×44 ist 176, abgezogen von 205; Rest 29; 16 dazu gibt 2916; die gefundene Wurzel 24 doppelt gibt 48; 48 in 291 geht 6mal ꝛc. die Rechnung geht auf, daher ist $24{,}6 \times 24{,}6 = 24{,}6^2 = 605{,}16$.

23. Soll die Quadratwurzel aus einer Zahl, welche kein reines Quadrat ist, oder aus einem ächten Bruch gezogen werden, so verwandelt man die Zahl oder den Bruch in einen Decimalbruch, und verfährt wie früher. Die Quadratwurzel gibt in diesem Fall allemal einen unendlichen Decimalbruch; z. B.:

Es soll aus $\frac{1}{2}$ oder 0,5 die Quadratwurzel gezogen werden.

$\sqrt{0,|50} = 0,|7|0|7|1 \ldots$

49

—100

(14)

10000

(140)7

9849

—15100

(1414)1

—959

Hier spricht man: Aus Null ist die Wurzel Null, Komma; aus der nächsten Zifferklasse 50 ist die Wurzel 7; $7 \times 7 = 49$; abgezogen, Rest 1; nächste Zifferklasse 00 herab, gibt 100; 7 doppelt, gibt 14; 14 in 10 geht 0mal; Strich; 100 und die nächste Zifferklasse 00 herab, gibt 10000; 70 doppelt gibt 140; 140 in 1000 geht 7mal; 7×1407 gibt 9849; abgezogen bleibt 151; 2 Nullen daran, gibt 15100; 707 doppelt, gibt 1414; 1414 in 1510 geht 1mal; 14141 abgezogen, bleibt 959; ꝛc. Die gesuchte Wurzel ist

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{0{,}5} = 0{,}7071 \ldots$$

Macht man die Probe, und multiplizirt man 0,7071

mit 0,7071, so erhält man 0,49999041; addirt man den bei der Wurzelausziehung gebliebenen Rest 959 in den 3 letzten Ziffern hinzu, so erhält man 0,5 oder $\frac{1}{2}$. Es ist also

$$0{,}7071^2 + 0{,}00000959 = 0{,}5.$$

Ebenso erhält man $\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}866\ldots$

$\sqrt{0{,}75} = 0{,}866\ldots$

64

—1100

(16)6

996

—10400

(172)6

10356

—44

Probe:

0,866 × 0,866 = 0,749956

Rest 44 = 0,000044

Summe = 0,750000

Sollen aus den Zahlen 2 und 3 die Quadratwurzeln ausgezogen werden, so gibt dieß folgende Rechnungen:

$\sqrt{2{,}00} = 1{,}414\ldots$

1

100

(2)4

96

—400

(28)1

281

11900

(282)4

11296

—604

$\sqrt{3{,}00} = 1{,}732\ldots$

1

200

(2)7

189

—1100

(34)3

1029

—7100

(346)2

6924

—176

Die so eben gefundenen Quadratwurzeln $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,5} = 0,7071..$ und $\sqrt{2} = 1,414..$ wolle man dem Gedächtniß einprägen, da hievon in der Geometrie nützliche Anwendung gemacht wird.

Wie man sieht, ist $\sqrt{2} = 1,414..$ gerade das Doppelte von $\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707..$; während 2 das Vierfache von $\frac{1}{2}$ ist, wie es auch sein muß. Läßt man nehmlich Quadratzahlen um das 4=, 9=, 16fache wachsen, so wachsen die entsprechenden Quadratzahlen nur um das 2=, 3=, 4fache 2c.; z. B.: aus 4 ist die Quadratwurzel 2; aus dem 4fachen von 4 oder aus 16 ist die Quadratwurzel nur das Doppelte von 2 oder 4; aus dem 9fachen von 4 oder aus 36 ist die Quadratwurzel 6, das Dreifache von 2 u. s. w.

24. Um aus ächten Brüchen die Quadratwurzel ohne Anwendung von Decimalzahlen zu ziehen, muß man die Quadratwurzel aus dem Zähler und aus dem Nenner ziehen, z. B.:

$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$; da $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ (nach der Regel: 2 Brüche werden multiplizirt, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplizirt)

$= \frac{1 \times 1}{2 \times 2}$ wieder $\frac{1}{4}$ gibt;

$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$, da $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$ wieder $\frac{4}{9}$;

$\sqrt{\frac{81}{25}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{25}} = \frac{9}{5}$, da $\frac{9}{5} \times \frac{9}{5}$ wieder $\frac{81}{25}$ u. s. w.

In Decimalzahlen gerechnet, erhält man dasselbe Resultat:

$\sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{0,25} = 0,5$; da $0,5 \times 0,5 = 0,25$;
$\sqrt{\frac{81}{25}} = \sqrt{\frac{324}{100}} = \sqrt{3,24} = 1,8 = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$.

Gemischte Brüche werden vorher zu unächten Brüchen gemacht, oder, was am einfachsten ist, in Decimalbrüche verwandelt; z. B.: $\sqrt{1\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \sqrt{1,75}$; $\sqrt{4\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \sqrt{4,5}$ u. s. w.

25. Uebungsbeispiele.

$\sqrt{33856} = 184$ $\sqrt{6,73} = 2,59\ldots$
$\sqrt{60516} = 246$ $\sqrt{466} = 21,58\ldots$
$\sqrt{9662,89} = 98,3$ $\sqrt{0,09} = 0,3$
$\sqrt{0,7569} = 0,87$ $\sqrt{0,000144} = 0,012$
$\sqrt{21,8089} = 4,67$ $\sqrt{1,44} = 1,2$

$\sqrt{169}$; $\sqrt{441}$; $\sqrt{1849}$; $\sqrt{1529}$; Rest 0.

$\sqrt{207936}$; $\sqrt{622521}$; $\sqrt{185761}$; $\sqrt{163216}$;
Rest $= 0$.

$\sqrt{780811249}$; $\sqrt{900540081}$; $\sqrt{3466383376}$;
Rest $= 0$.

$\sqrt{783}$; $\sqrt{1279}$; $\sqrt{1818}$; $\sqrt{3190}$; $\sqrt{7623}$;
Rest $= 54$.

$\sqrt{846398}$; $\sqrt{2619761}$; $\sqrt{2717741}$; $\sqrt{1019918}$;
Rest $= 1837$.

$\sqrt{13,69}$; $\sqrt{5760,81}$; $\sqrt{0,2209}$; $\sqrt{0,013689}$;
Rest $= 0$.

26. Kubikwurzel. Erklärung. Wenn man eine Zahl 2mal mit sich selbst multiplizirt, so wird das Produkt der Kubus (Würfel) der ersten Zahl genannt. Z. B.: $5 \times 5 \times 5$ ist 125; daher heißt 125 der Kubus von 5. Umgekehrt nennt man diejenige Zahl, welche 2mal mit sich selbst multiplizirt eine andere Zahl gibt, die Kubikwurzel der letztern; so ist 7 die Kubikwurzel aus 343, weil $7 \times 7 \times 7$ wieder 343 gibt.

Aus einer Zahl die Kubikwurzel ausziehen, heißt daher: Eine Zahl suchen, welche 2mal mit sich selbst multiplizirt, die erste Zahl gibt.

Man bezeichnet das Ausziehen der Kubikwurzel mit dem Zeichen $\sqrt[3]{\ }$; $\sqrt[3]{729}$ heißt: aus 729 soll die Kubikwurzel ausgezogen werden; diese ist 9, weil $9 \times 9 \times 9 = 729$ ist.

Umgekehrt bezeichnet man den Kubus einer Zahl mit einem rechts oben stehenden kleinen 3er; z. B.: 8^3 heißt: man soll 8 zweimal mit sich selbst multiplizieren, dieß gibt $8 \times 8 \times 8 = 512$; und es ist umgekehrt wieder $\sqrt[3]{512} = 8$.

27. Für den Bauhandwerker haben die Kubikwurzeln nur eine geometrische Bedeutung. Ist nehmlich die Seite eines Würfels gegeben, so wird der Kubikinhalt desselben gefunden, wenn man die Seite desselben zweimal mit sich selbst multiplizirt, oder, wie man auch sagt, wenn man die Seite in den Kubus erhebt. Ist z. B. die Seite eines Würfels 6 Zoll, so ist dessen Kubikinhalt $= 6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$ Kubikzoll. Ist aber der Kubikinhalt eines Würfels

gegeben, und soll man dessen Seite suchen, so muß aus der Zahl, welche den Inhalt angibt, die Kubikwurzel gezogen werden. Soll z. B. ein Würfel 125 Kubikzoll Inhalt haben, so muß dessen Seite $\sqrt[3]{125}$ oder 5 Zoll sein, da $5 \times 5 \times 5$ wieder 125 gibt.

Noch eine Anwendung findet die Kubikwurzel bei der Kugel, und zwar in dem Fall, wenn der Inhalt einer Kugel gegeben ist, und es soll deren Durchmesser gesucht werden.

Dem Bauhandwerker soll daher das Verfahren des Kubikwurzel-Ausziehens nicht unbekannt sein.

28. Multiplizirt man die 10 ersten Ziffer 1, 2... 9, 10 mit sich selbst und dann die entstandenen Quadratzahlen nochmals mit den entsprechenden einfachen Zahlen, so entstehen die Kubikzahlen der ersten zehn Zahlen, wie folgt:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000.

Die Zahlen der dritten Reihe heißen die Kubikzahlen der ersten, und zwar sind diese Zahlen 1, 8, 27, ... 729, 1000 reine Kubikzahlen, weil ihre Kubikwurzeln 1, 2, 3, ... 9, 10 ganze geschlossene Zahlen sind. Jede andere Kubikzahl zwischen den angegebenen hat zur Kubikwurzel einen unendlichen Decimalbruch.

Da die Kubikwurzel von 1 = 1 und die Kubikwurzel von 8 = 2 ist; so müssen die Kubikwurzeln aus allen Zahlen, welche zwischen 1 und 8 liegen, also die Kubikwurzeln von 2, 3, 4, 5, 6, 7 zwischen 1 und 2 liegen. Die Kubikwurzeln der Zahlen 2, 3,

4, 5, 6, 7 sind daher unendliche Decimalbrüche, welche mit 1, ... beginnen. Die Kubikwurzeln aller Zahlen von 8 bis 27 beginnen ebenso mit 2, ...; die Kubikwurzeln aller Zahlen von 64 bis 124 beginnen mit 4, ... ꝛc., und die Kubikwurzeln aller Zahlen von 729 bis 999 beginnen mit 9, ..., und geben einen unendlichen Decimalbruch.

29. Da der Kubus

von 10	=	1 0 0 0	
„ 100	=	1 00 00 00	
„ 1000	=	1 000 000 000	

ist, so sieht man, daß je 9, 6, 3 Nullen des Kubus 3, 2, 1 Nullen in der Kubikwurzel geben. Was von diesen Nullen gilt, gilt auch von andern Ziffern. Um also aus einer mehrziffrigen Zahl die Kubikwurzel auszuziehen, theilt man die Zahl in Klassen von je 3 Ziffern von der Rechten zur Linken; jeder 3ziffrigen Klasse des Kubus muß e i n e Ziffer der Kubikwurzel entsprechen; z. B.:

$$\sqrt[3]{512\ 000} = 80, \text{ d. h.:}$$

Aus 512 Tausendern ist die Kubikwurzel = 8 Zehnern oder = 80.

$$\sqrt[3]{27\ 000\ 000} = 300, \text{ d. h.:}$$

Aus 27 Millionen oder aus 27000 Tausendern ist die Kubikwurzel = 3 Hundertern oder gleich 30 Zehnern u. s. w.

30. Soll nun aus einer Zahl die Kubikwurzel ausgezogen werden, z. B. aus 97336, so verfährt man wie folgt:

$$\sqrt{97|336} = 4|6$$

$$\begin{array}{rrl} & 64 & \\ \hline & 33\,336 & \\ 3 \times 16 = & 48 & \\ 3 \times 24 = & 72 & \\ 6^2 = & 36 & \\ \hline & 5556 & \times\ 6 \\ = & 33336 & \\ \hline \end{array}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{array}{rr} 4^2 = & 16 \\ 4 \times 6 = & 24 \\ \text{〃} = & 24 \\ 6^2 = & 36 \\ \hline 46^2 = & 2116 \end{array}$$

Man theilt die gegebene Zahl in Klassen von 3 Ziffern von der Rechten zur Linken, und zieht aus der ersten Klasse (welche auch aus 2 oder 1 Ziffer bestehen kann) sohin hier aus 97 die Kubikwurzel; diese ist 4, da $4^3 = 64$; 5^3 aber schon 125 gibt; 4 im Kubus $= 64$ wird von 97 abgezogen, bleibt 33; hiezu die nächste Klasse 336 herabgesetzt, gibt 33336. Nun wird folgende Nebenrechnung geführt: Die gefundene Wurzel 4 wird ins Quadrat erhoben, $4^2 = 16$; dieses 16 wird dreimal genommen $= 48$ und so unter den Rest 33336 gesetzt, daß rechts 2 Zifferstellen frei bleiben, also 48 unter 333 zu stehen kommt, und nun wird mit 48 als Divisor in die darüber stehenden 333 dividirt, was 6 als zweiten Theil der Wurzel gibt, welche 6 rechts oben hinter 4 angeschrieben wird, wodurch 46 als Wurzel entsteht. Hierauf wird die Nebenrechnung weiter geführt, und zwar wird das Produkt $4 \times 6 = 24$ der beiden gefundenen Ziffern der Wurzel 2mal unter 16 gesetzt, und e i n e Zifferstelle rechts hinausgerückt, endlich wird das Quadrat der zuletzt gefundenen Ziffer der Wurzel $6^2 = 36$ abermals um eine Zifferstelle rechts geschrieben darunter gesetzt und das Ganze addirt, wodurch 2116

entsteht, was das Quadrat der gefundenen Wurzel 46 ist. Ist dieses geschehen, so geht die Rechnung des Wurzelausziehens weiter, wie folgt: Das 3fache von 24 (aus der Nebenrechnung) $= 3 \times 24 = 72$ wird unter 48 gesetzt, jedoch eine Stelle rechts gerückt; endlich noch das Quadrat von $6 = 6^2 = 36$ unter 72 gesetzt und gleichfalls eine Stelle rechts geschoben. Nun werden die 3 letzten Zahlen 48, 72, 36, wie sie unter einander stehen, addirt, gibt 5556, und diese Summe mit der zuletzt gefundenen Wurzel Ziffer 6 multiplizirt, woraus 33336 entsteht; dieses Produkt wird von dem oben stehenden Rest 33336 abgezogen; die Rechnung geht auf, folglich ist

$$\sqrt[3]{97336} = 46$$

und die Probe zeigt, das $46^3 = 46 \times 46 \times 46 = 97336$ ist.

31. Der Vortheil dieser Methode, die Führung einer besonderen Nebenrechnung bei Ausziehung der Kubikwurzel, besteht darin, daß in dieser Nebenrechnung durch Multiplication einziffriger Zahlen alle jene Produkte gebildet werden, welche bei der Wurzelausziehung nöthig sind, und daß am Ende der Nebenrechnung durch einfaches Addiren das Quadrat der gefundenen 2-, 3-, 4ziffrigen Wurzel fertig erscheint. Z. B.:

Soll aus 272097792 die Kubikwurzel gezogen werden, so verfährt man wie folgt, wobei zur bessern Uebersicht des Ganges der Rechnung und wie von der Hauptrechnung zur Nebenrechnung und umgekehrt übergegangen wird, die Reihenfolge der einzelnen Berechnungen und Ansätze durch die fortlaufenden Buchstaben a, b, c . . . angegeben ist.

$$\sqrt[3]{272|097|792} = \overset{a}{6}|\overset{e}{4}|\overset{k}{8}$$

b) $6^3 =$ 216
— 56097
d) $3 \times 36 =$ . . 108
h) $3 \times 24 =$ . . . 72
$4^2 =$ 16
11536
$\times 4 =$ . . 46144
— 9953792
i) $3 \times 64^2 =$ . . 12288
n) $3 \times 512 =$ 1536
$8^2 =$ 64
1244224
o) $\times 8 =$ . . . 9953792
— — —

Nebenrechnung.

$6^2 = 36$ . . . . . c)
$6 \times 4 = 24$ (aus a u. e) f)
" $= 24$
$4^2 = 16$
$4096 = 64^2$ . . g)
$8 \times 64 = 512$ (aus k, a, e) l)
" $= 512$
$8^2 = 64$ (aus k)
$419904 = 648^2$ m)

Man schreibt und spricht hiebei, nachdem die Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen von je 3 Ziffern getheilt worden: Aus 272 ist die Kubikwurzel 6 (a); 6^3 gibt 216 (b); abgezogen bleibt 56; 097 herab gibt 56097; 6^2 gibt 36 (c); 3×36 gibt 108 (d); 108 in 560 geht 4mal (e); 4×6 ist 24 (f); dasselbe nochmals darunter; dazu $4^2 = 16$ und addirt gibt 4096 oder das Quadrat der gefundenen Wurzel 64 (g); 3×24 gibt 72 (h); $4^2 = 16$; 108, 72 und 16 addirt gibt 11536; mit der zuletzt gefundenen Wurzel 4 multiplizirt gibt 46144; von 56097 abgezogen bleibt 9953; 792 angehängt gibt 9953792; 3mal 4096 gibt 12288 (i); 12288 in 99537 dividirt geht 8mal (k); $8 \times 64 = 512$ (l), und wiederholt dasselbe darunter, dazu $8^2 = 64$ und addirt gibt $419904 = 648^2$ (m); 3×512 gibt 1536,

$8^2 = 64$ dazu; 12288, 1536 und 64 addirt gibt 1244224; mit 8 multiplizirt gibt 9953792 (o); von obigen 9953792 abgezogen, geht die Rechnung auf; die gesuchte Wurzel ist daher

$$\sqrt[3]{272\ 097\ 792} = 648 \text{ und}$$
$$648^3 = 272097792.$$

Es soll aus 91 185 763 501 die Kubikwurzel gezogen werden.

Die Rechnung sieht, mit Weglassung der Worterklärung, also aus:

$$\sqrt[3]{91|185|763|501} = \overset{a}{4}\overset{e}{5}\overset{k}{0}\overset{n}{1}$$

b)	$4^3 =$	64
		27185
d)	$3 \times 16 =$	48
h)	$3 \times 20 =$	60
	$5^2 =$	25
		5425
	$\times 5 =$	27125
		60763
i)	$3 \times 2025 =$	6075
		60763501
m)	$3 \times 202500 =$	607500
g)	$3 \times 450 =$	1350
	$1^2 =$	1
		60763501
r)	$\times 1 =$	60763501

Nebenrechnung.

$4^2 =$	16	c)
$4 \times 5 =$	20	f)
" =	20	
$5^2 =$	25	
	$2025 = 45^2$	g)
	$202500 = 450^2$	l)
$1 \times 450 =$	450	o)
" =	450	
$1^2 =$	1	
	$20259001 = 4501^2$	p)

Hier sagt man bei i): $3 \times 2025 = 6075$ geht in 607 Nullmal (k); jetzt wird die Haupt- und

Nebenrechnung durch Striche abgeschlossen; aus 2025 $= 45^2$ wird $202500 = 450^2$ (der neue Divisor) gebildet (l); zu 60763 wird 501 herabgenommen, woraus 60763501 wird; $3 \times 202500 = 607500$ (m) in 607635 geht 1mal (n); worauf wie gewöhnlich weiter gefahren wird. Die Rechnung geht auf, also ist

$$\sqrt[3]{91\,185\,763\,501} = 4501 \text{ und}$$

$$4501^3 = 91\,185\,763\,501.$$

Ein größeres Beispiel wird den Vortheil dieser Methode besonders deutlich zeigen.

Es soll aus der Zahl 204 409 331 068 643 die Kubikwurzel gezogen werden. Die Rechnung entwickelt sich dann folgendermaßen, wobei zur bessern Uebersicht des Ganges der Rechnung, und wie von der Hauptrechnung in die Nebenrechnung und umgekehrt, übergegangen wird, die Reihenfolge der Operationen durch die fortlaufenden Buchstaben a, b, c... angegeben ist.

a e k p s

$\sqrt[3]{204|409|331|068|643} = 5|8|9|0|7$

b) $5^3 = 125$

—79409

d) $3 \times 25 = 75$

h) $3 \times 40 = 120$

$8^2 = 64$

8764

$\times 8 = 70112$

—9297331

i) $3 \times 3364 = 10092$

n) $3 \times 522 = 1566$

$9^2 = \ldots 81$

1024941

$\times 9 = 9224469$

—72862068

o) $3 \times 346921 = 1040763$

72862068643

r) $3 \times 34692100 = 104076300$

v) $3 \times 41230 = \,.\,.\,123690$

$7^2 = \,.\,.\,.\,.\,.\,49$

10408866949

w) $\times 7 = 72862068643$

— —

Nebenrechnung.

$5^2 = 25$ . . . . . c)

$5 \times 8 = 40$ (aus a u. e) f)

" $= 40$

$8^2 = 64$ (aus e)

$3364 = 58^2$ g)

$9 \times 58 = 522$ (aus k, a, e) l)

" $= 522$

$9^2 = 81$ (aus k)

$346921 = 589^2$ m)

$34692100 = 5890^2$ q)

$7 \times 5890 = 41230$ . . t) (aus s u. a, e, k, p)

" $= 41230$

$7^2 = 49$ (aus s)

3470034649 . . u) $= 58907^2$

Man schreibt und spricht hier, nachdem die Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen von 3 Ziffern getheilt worden ist: Aus 204 ist die Kubikwurzel 5 (a); 5^3 ist 125 (b); abgezogen bleibt 79; 409 dazu herab, gibt 79409; 5^2 ist 25 (c); 3×25 ist 75 (d); 75 in 794 geht 8mal (e); 5×8 ist 40 (f); $5 \times 8 = 40$ nochmals darunter, 8^2 ist 64 gleichfalls dar-

unter; addirt gibt 3364 = 58^2 (g); 3 × 40 gibt 120 (h); 8^2 gibt 64; 75, 120 und 64 addirt gibt 8764; diese Zahl mit der gefundenen Wurzel 8 multiplizirt gibt 70112; von 79409 abgezogen, bleibt 9297; 331 dazu herab, gibt 9297331; 3mal 3364 = 10092 (i); 10092 in 9297 geht 9mal (k); diese gefundene Wurzel 9 mit der schon vorhandenen 58 (a e) multiplizirt gibt 9 × 58 = 522 (l); nochmals darunter, dazu 9^2 = 81; 3364, 522, 522 und 81 addirt, gibt 346921, das Quadrat der gefundenen Wurzel 589 = 589^2 (m); 3mal 522 gibt 1566 (n); 9^2 ist = 81; 10092, 1566 und 81 addirt gibt 1024941; diese Summe nochmals mit der gefundenen Wurzel 9 multiplicirt, gibt 9224469; dieß von 9297331 abgezogen, bleibt 72862; 068 dazu herab, gibt 72862068; 3mal 346921 gibt 1040763 (o); 1040763 in 728620 dividirt geht 0mal (p); Strich; 643 herab gibt 72862068643; 589^2 = 346921 wird um 2 Nullen vermehrt, wodurch 34692100 = 5890^2 entsteht (q); 3mal 34692100 gibt 104076300 (r); 104076300 in 728620686 geht 7mal (s); die gefundene Wurzel 5890 mit 7 multiplizirt gibt 41230 (t); 41230 nochmals darunter; dazu 7^2 = 49; addirt gibt 3470034649 = 58907^2 (u); 3mal 41230 gibt 123690 (v); 7^2 = 49 dazu, addirt gibt 10408866949; diese Summe mit der zuletzt gefundenen Wurzel 7 multiplizirt gibt 72862068643 (w); diese Zahl von 72862068643 abgezogen, geht auf; die gesuchte Wurzel ist also

$$\sqrt[3]{204\,409\,331\,068\,643} = 58907$$

oder es ist 58907^3 = 204 409 331 068 643.

32. Soll aus einer Decimalzahl die Kubikwurzel gezogen werden, so theilt man die Zahl vom Komma und rechts und links in Klassen von 3 Ziffern, und verfährt wie früher, setzt aber in der Wurzel das Komma dann, wenn die Klasse unmittelbar links des Komma's erschöpft ist; z. B.:

a e k

$$\sqrt[3]{371{,}694959} = 7{,}19$$

b) $7^3 = 343$

-28694

d) $3 \times 49 = 147$

h) $3 \times 7 = 21$

$1^2 = 1$

14911

$\times 1 = 14911$

13783959

i) $3 \times 5041 = 15123$

n) $3 \times 639 = 1917$

$9^2 = 81$

1531551

o) $\times 9 = 13783959$

— — —

Nebenrechnung.

$7^2 = 49$ . . . c)

$7 \times 1 = 7$ . . . f)

$'' = 7$

$1^2 = 1$

$5041 = 71^2$ g)

$9 \times 71 = 639$ l)

$'' = 639$

$9^2 = 81$

$516961 = 719^2$ m)

2. Beispiel. Es soll aus 1,331 die Kubikwurzel gezogen werden. Dieß gibt folgende Rechnung:

$$\sqrt[3]{1{,}331} = \overset{a\,e}{1{,}1}$$

b)	$1^3 =$	1	
		-331	Nebenrechnung.
d)	$3 \times 1 =$	3	
h)	$3 \times 1 =$	3	$1^2 = 1$ . . . . c)
	$1^2 =$	1	$1 \times 1 = 1$ . . . . f)
		331	" $= 1$
	$\times 1 =$	331	$1^2 = 1$
		—	$121 = 11^2$. g)

Es ist also $\sqrt[3]{1{,}331} = 1{,}1$ und $1{,}1^3 = 1{,}331$.

3. Beispiel. Es soll aus 0,658503 die Kubikwurzel ausgezogen werden.

$$\sqrt[3]{0{,}658|503} = \overset{a\,b\,f}{0{,}87}$$

c)	$8^3 =$	512	
		146503	Nebenrechnung.
e)	$3 \times 64 =$	192	
i)	$3 \times 56 =$	168	$8^2 = 64$ . . . . d)
	$7^2 =$	49	$7 \times 8 = 56$ . . . . g)
		20929	" $= 56$
	$\times 7 =$	146503	$7^2 = 49$
		———	$7549 = 87^2$. h)

Die Rechnung geht auf; es ist also

$\sqrt[3]{0{,}658\,503} = 0{,}87$ und die Probe zeigt, daß $0{,}87^3 = 0{,}658503$ ist.

4. Beispiel. Die Kubikwurzel aus 0,027 ist $= 0{,}3$; man sagt nehmlich: aus 0 ist die Kubik-

wurzel Null, Komma; aus der nächsten Klasse von 3 Ziffern 027 ist sie = 3; denn $3 \times 3 \times 3 = 27$; die Rechnung geht auf, daher ist

$$\sqrt[3]{0{,}027} = 0{,}3.$$

5. Beispiel. Ebenso ist $\sqrt[3]{0{,}000729} = 0{,}09$; man sagt nehmlich: aus Null ist die Kubikwurzel = Null, Komma; aus der nächsten Klasse von 3 Ziffern 000 ist sie = Null; und aus 729 ist sie = 9.

6. Beispiel. Aus ½ oder 0,5 die Kubikwurzel ausziehen. Hier muß erst rechts des Komma's eine Klasse von 3 Ziffern gebildet werden, was durch Anhängen von 2 Nullen geschieht. Man schreibt also:

$$\sqrt[3]{0{,}500} = 0{,}794 \ldots .$$

	343	
	157000	
$3 \times 49 =$	147	$7^2 = 49$
$3 \times 63 =$	189	$7 \times 9 = 63$
$9^2 =$	81	" $= 63$
	16671	$9^2 = 81$
$\times 9 =$	150039	$5241 = 79^2$
	—6962000	2c.
$3 \times 5241 =$	15723	
2c.	2c.	

Und man spricht: Aus Null Ganze ist die Kubikwurzel = Null, Komma; aus 500 ist sie 7; und verfährt dann wie früher.

7. Beispiel. Welches sind die Kubikwurzeln aus 0,8; 0,08 und 0,008?

Im ersten Fall schreibt man $\sqrt[3]{0,8} = \sqrt[3]{0,800}$ und man sagt: aus 0 ist die Kubikwurzel 0, Komma; aus 800 ist sie 9; die Kubikwurzel beginnt also mit **0,9** . . .; rechnet man nach der bisherigen Verfahrungsweise weiter, so findet man

$$\sqrt[3]{0,8} = \sqrt[3]{0,800} = 0,928 \ldots$$

Im zweiten Fall $\sqrt[3]{0,08} = \sqrt[3]{0,080}$ sagt man: aus 0 ist die Kubikwurzel = Null; aus 080 oder 80 ist sie 4; die Kubikwurzel beginnt also mit 0,4...; und rechnet man weiter, so findet man

$$\sqrt[3]{0,08} = \sqrt[3]{0,080} = 0,431 \ldots$$

Im dritten Fall ist die Zahl 0,008 ein reiner Kubus; und es ist ohne alle weitere Rechnung, da aus 008 oder 8 die Kubikwurzel = 2 ist;

$$\sqrt[3]{0,08} = 0,2.$$

33. Soll aus einer ganzen Zahl, welche kein reiner Kubus ist, die Kubikwurzel gezogen werden, so setzt man nach den Ganzen ein Komma, hängt Nullen an, theilt die Zahl rechts und links vom Komma aus in Klassen von 3 Ziffern, und verfährt wie früher.

Z. B. $\sqrt[3]{2}$ gibt:

$$\sqrt[3]{2{,}000} = 1{,}259\ldots$$

	1		
	1 000		
3 × 1 =	3		
3 × 2 =	6		
2² =	4	1² =	1
	364	2 × 1 =	2
× 2 =	728	" =	2
		2² =	4
	-272000		
			144 = 12²
3 × 144 =	432	5 × 12 =	60
3 × 60 =	180	" =	60
5² =	25	5² =	25
	45025		15625 = 125²
× 5 =	225125	9 × 125 =	1125
	-46875000	" =	1125
		9² =	81
3 × 15625 =	46875		
			1585081 = 1259²
3 × 1125 =	3375		
9² =	81		
	4721331		
× 9 =	42491979		
	-4383021		

ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Die Kubikwurzel aus 2 ist also bis auf ein Tausendel genau = 1,259....; macht man die Probe, das ist, multiplizirt man 1,259 zweimal mit sich selbst und addirt man den Rest 4383021 oder eigentlich (mit Rücksicht auf die Stellung des Komma's oben bei 2,000) = 0,004383021 hinzu, so erhält man $1{,}259^3 + 0{,}004383021 = 2{,}000$.

Auf gleiche Weise findet man:

$$\sqrt[3]{3{,}000} = 1{,}44224\ldots.$$

34. Uebungsbeispiele.

$\sqrt[3]{1771\,561} = 121$ $\sqrt[3]{117\,649} = 49$

$\sqrt[3]{69\,426\,531} = 411$ $\sqrt[3]{97{,}336} = 4{,}6$

$\sqrt[3]{75\,151\,448} = 422$; $\sqrt[3]{66\,135{,}317\,205} = 40{,}440\ldots$

$$\sqrt[3]{934{,}007\,359\,375}; \text{ Rest } = 0.$$

$\sqrt[3]{527\,672\,382\,059\,550\,874\,112}$; Rest $= 0.$

$\sqrt[3]{184\,00\,234}$; $\sqrt[3]{13\,998\,034}$; $\sqrt[3]{10360768}$
Reste $= 754$;

$\sqrt[3]{270\,27\,010\,235}$; $\sqrt[3]{29704594907}$;

$\sqrt[3]{125\,676\,216\,963}$; $\sqrt[3]{313323546322}$
Reste $= 1234$;

$\sqrt[3]{5} = 1{,}709975$; $\sqrt[3]{1\tfrac{9}{25}} = 1{,}107931$;

$$\sqrt[3]{934{,}007\,359\,375};$$

$\sqrt[3]{0{,}588\,480\,472}$; $\sqrt[3]{0{,}001\,771\,561}$ Reste $= 0.$

$\sqrt[3]{\tfrac{5}{27}} = 0{,}569992$; $\sqrt[3]{\tfrac{7}{11}} = 0{,}8601384.$

35. Ausziehen der Quadrat- und Kubik-Wurzel durch Probiren.

Die einfachste Regel zur Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel ist die des **Probirens**. Unter Probiren ist jedoch hier kein blindes Probiren, sondern ein systematisches, d. i. ein mit Sicherheit dem richtigen Resultat näher führendes zu verstehen. Da die in den vorigen §§. gezeigten Regeln zum Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel dem Anfänger immer einige Schwierigkeit bereiten, auch dem Gedächtniß entfallen können, so soll in dem Folgenden noch die höchst einfache Methode des Probirens an ein paar Beispielen gezeigt werden.

Es sei z. B. $\sqrt{5}$ auszuziehen.

Man weiß, daß $\sqrt{5}$ zwischen 2 und 3 liegt, denn 2^2 gibt 4, 3^2 schon 9; schreibt man nun alle Zahlen von 4 bis 9 in eine Reihe, setzt man ferner unter 4 die Quadratwurzel 2, unter 9 die Quadratwurzel 3 und schaltet man den darüber stehenden Quadratzahlen 5, 6, 7, 8, 9 entsprechend die fehlenden Quadratwurzeln zwischen 2 und 3 in Decimalbrüchen ein, so erhält man

Quadrate:	4	5	6	7	8	9
Wurzeln:	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0

d. h. da von 4 und 9 die Quadratwurzeln beziehungsweise 2 und 3 sind, so müssen die Quadratwurzeln von 5, 6, 7, 8 beziehungsweise 2,2; 2,4; 2,6; 2,8 sein. Die gesuchte $\sqrt{5}$ ist also annähernd $= 2{,}2$.

Probirt man 2,2 d. h. erhebt man 2,2 in's Quadrat, so erhält man

$$2{,}2^2 = 2{,}2 \times 2{,}2 = 4{,}84;$$

wie man sieht, erhält man nun 0,16 zu wenig; $\sqrt{5}$ muß also größer sein als 2,2; da $2,4^2$ schon annähernd 6 gibt; so probire man 2,3; man erhält

$$2,3^2 = 2,3 \times 2,3 = 5,29$$

sohin um 0,29 zu viel; die richtige $\sqrt{5}$ wird daher zwischen 2,2 und 2,3 und zwar näher an 2,2 liegen. Da der Fehler bei 2,2 nur 0,16, bei 2,3 aber 0,29 oder fast das Doppelte betrug, so wird auch die richtige $\sqrt{5}$ um die Hälfte näher an 2,2 als an 2,3 liegen. Man probirt daher 2,23 und erhält

$$2,23^2 = 2,23 \times 2,23 = 4,9729$$

noch um 0,0271 zu wenig. Probirt man 2,24, so findet man

$$2,24^2 = 2,24 \times 2,24 = 5,0176$$

um 0,0176 zu viel. Der Fehler bei 2,24 ist nahezu nur halb so groß als bei 2,23; man probirt daher 2,237 und findet

$$2,237^2 = 5,004169$$

noch um 0,004169 zu groß. Probirt man daher 2,236, so findet man

$$2,236^2 = 4,999696$$

nur noch 0,000304 zu wenig; die wahre Wurzel wird daher ein wenig größer als 2,236 oder 2,2361 sein; es ist daher

$$\sqrt{5} = 2,2361\ldots.$$

Zieht man die Quadratwurzel wirklich aus, so findet man

$$\sqrt{5} = 2,23607\ldots.$$

36. Ebenso verfährt man bei Ausziehung der Kubikwurzel.

Hat man z. B. $\sqrt[3]{36}$ auszuziehen, so schreibt man zuerst die nächst gelegenen reinen Kubikzahlen 27 und 64 an, und schaltet die Wurzeln entsprechend ein, wodurch man erhält

	9 Theile		28 Theile	
Kubikzahlen	27	36	....	64
Wurzel	3,00	3,25	......	4,00

indem man sagt: Von 27 bis 36 sind 9 Theile, von 36 bis 64 aber deren 28; 36 liegt also ohngefähr auf $\frac{1}{4}$ des Abstandes zwischen 27 und 64; $\sqrt[3]{36}$ wird also gleichfalls auf $\frac{1}{4}$ des Abstandes zwischen 3,0 und 4,0 liegen, daher ohngefähr 3,25 sein. Probirt man 3,25, so ergibt sich

$$3{,}25^3 = 3{,}25 \times 3{,}25 \times 3{,}25 = 34{,}328$$

um 2,672 zu wenig; probirt man daher 3,3, so findet man

$$3{,}3^3 = 3{,}3 \times 3{,}3 \times 3{,}3 = 35{,}937$$

noch um 0,063 zu wenig; probirt man 3,31, so ergibt sich

$$3{,}31^3 = 36{,}483$$

um 0,483 zu viel. Der Fehler bei 3,30 verhält sich zu dem Fehler bei 3,31 wie 6 : 48 oder 1 : 8. Man darf daher 3,30 nur um weniges vergrößern. Probirt man 3,301, so findet man

$$3{,}301^3 = 35{,}9697$$

Die gesuchte Wurzel ist daher hinreichend genau

$$\sqrt[3]{36} = 3{,}301 \ldots .$$

Eben so verfährt man in allen andern Fällen.

Wie man sieht, hat diese Methode noch den Vortheil der größeren Sicherheit für sich, indem in der Auflösung der Aufgabe selbst die Probe über die Richtigkeit des Resultates schon enthalten ist.

C. Von den Proportionen, von der einfachen und zusammengesetzten Regeldetri, Zins- und Interessen-Rechnung.

37. Proportionen. Erklärung. Wenn 4 Zahlen so beschaffen sind, daß sie paarweise gleiche Quotienten geben, so bilden diese Zahlen eine Proportion. Z. B. Es ist

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

daher die Proportion:

$$2 : 3 = 4 : 6$$

d. h. 2 verhält sich zu 3, wie 4 zu 6. Der Sinn dieser Proportion oder dieses Verhältnisses ist: 2 ist in 3 gerade so oft enthalten, als 4 in 6. Die Zahl 2 ist in 3 $\frac{2}{3}$mal enthalten, 4 in 6 $\frac{4}{6}$mal oder gleichfalls $\frac{2}{3}$mal.

So ist $\frac{6}{5} = \frac{12}{10}$; daher die Proportion:

$$6 : 5 = 12 : 10$$

d. h. 5 ist in 6 ebenso oft enthalten, als 10 in 12.

38. Lehrsatz. In jeder Proportion ist das Produkt der mittleren Glieder gleich dem Produkt der äußeren Glieder.

Ist z. B.

$$6 : 5 = 12 : 10$$ so ist

$$6 \times 10 = 5 \times 12 = 60$$

d. h. das Produkt 6×10 der äußeren Glieder ist gleich dem Produkt 5×12 der innern Glieder, nehmlich gleich 60. Umgekehrt:

Wenn 2 Paare von Zahlen gleiche Produkte geben, so stehen sie in Proportion.

Z. B. Es ist

$$4 \times 9 = 3 \times 12 = 36$$

daher bilden 4 und 9 die beiden äußeren, 3 und 12 die beiden inneren Glieder einer Proportion; oder aber es bilden 4 und 9 die beiden inneren, und 3 und 12 die beiden äußeren Glieder derselben Proportion:

$$\left.\begin{matrix} 4 : 3 = 12 : 9 \\ 4 : 12 = 3 : 9 \end{matrix}\right\}$$ Hier sind 4 und 9 äußere Glieder;

Oder $$\left.\begin{matrix} 3 : 9 = 4 : 12 \\ 3 : 4 = 9 : 12 \end{matrix}\right\}$$ Hier sind 3 und 12 äußere Glieder.

Eine und dieselbe Proportion läßt sich daher auf 4erlei Weisen anschreiben; die Proportion ist aber immer nur dann richtig, wenn das Produkt der 2 inneren Glieder dem Produkt der beiden äußeren Glieder gleich ist.

39. Lehrsatz. Wenn in einer Proportion 3 Glieder bekannt sind, so läßt sich das vierte unbekannte Glied durch Rechnung finden.

Ist nehmlich das gesuchte Glied (x) ein äußeres, so multiplizirt man die beiden innern Glieder und dividirt das Produkt mit dem gegebenen äußern; z. B.:

$$7 : 9 = 14 : x \quad \text{gibt}$$

$$x = \frac{9 \times 14}{7} = \frac{\text{Produkt der inneren Glieder}}{\text{Aeußeres Glied}}$$

$$x = \frac{126}{7} = 18.$$

Das gesuchte vierte Glied ist also 18, und die Proportion ist

$$7 : 9 = 14 : 18 \quad \text{wo wieder}$$

$$7 \times 18 = 9 \times 14 = 126 \text{ ist.}$$

Ist das gesuchte vierte Glied ein inneres, so multiplizirt man die beiden äußeren Glieder, und dividirt das Produkt mit dem gegebenen inneren; z. B.:

$$9 : x = 12 : 20 \quad \text{gibt}$$

$$x = \frac{9 \times 20}{12} = \frac{\text{Produkt der äußeren Glieder}}{\text{Inneres Glied}}$$

$$x = \frac{180}{12} = 15$$

und die Proportion ist

$$9 : 15 = 12 : 20$$

wobei wieder $12 \times 15 = 20 \times 9 = 180$ ist.

40. 1. Beispiel. Welches ist die Zahl, welche sich zu 5 ebenso verhält, wie 8 zu 9?

Antwort: Bezeichnet man die zu suchende Zahl mit x, so gibt die Proportion

$$x : 5 = 8 : 9$$

$$x = \frac{5 \times 8}{9} = \frac{40}{9} = 4\tfrac{4}{9}$$

und es verhält sich also

$$4\tfrac{4}{9} : 5 = 8 : 9$$ und es ist

$$4\tfrac{4}{9} \times 9 = 5 \times 8 = 40.$$

2. Beispiel. Welche Zahl ist in 160 ebenso oft enthalten, als 15 in 120?

$$x : 160 = 15 : 120$$

$$x = \frac{160 \times 15}{120} = 20$$

d. h. 20 ist in 160 ebenso oft enthalten, als 15 in 120, nehmlich 8mal.

Eine besonders deutliche Vorstellung von der Bedeutung der Proportionen erhält man durch die Betrachtung der Lehrsätze der Geometrie über die Aehnlichkeit der Figuren.

41. Im bürgerlichen Rechnungswesen spielen die Proportionen eine große Rolle, und die meisten der im Leben vorkommenden Aufgaben der Regeldetri, Zins- und Interessen-Rechnungen rc. werden mit ihrer Hilfe gelöst. Auch der Bauhandwerker kann sie nicht entbehren. Arbeit und Lohn, Waare und Preis, Arbeit und Arbeitszeit, Arbeitszeit und Lohn rc. stehen in Proportion zu einander. Bei Anfertigungen von Taglohnlisten, Kostenanschlägen, bei der Verwandlung von Maß und Gewicht, bei Zins- und Interessen-Rechnungen werden daher beständig Proportionen angewendet, weßhalb auch der Bauhandwerker dieselben kennen und mit ihnen sicher umzugehen wissen muß.

42. Die Lösung der einfachen Aufgabe: Was kosten 10 Tagschichten zu 45 kr.? beruht im Grunde auf der Proportion:

1 Tagschicht kostet 45 kr., was kosten 10 Tagschichten? Oder:

$$1 : 45 = 10 : x \quad \text{woraus}$$

$$x = \frac{10 \times 45}{1} = 450 \text{ kr.} = 7 \text{ fl. } 30 \text{ kr.}$$

Der geübte Rechner setzt nur diese Proportion nicht mehr an. Da er weiß, daß der Divisor = 1 wird, so multiplizirt er gleich die Zahl der Tagschichten mit dem Taglohn, und macht dabei ganz kurz den Schluß: 10 Tagschichten kosten 10mal so viel als 1 Tagschicht; kostet diese 45 kr., so kosten 10 Tagschichten 10mal 45 oder 450 kr. = 7 fl. 30 kr.

Ist die Aufgabe gegeben: Zwanzig Fuhren kosten 6 fl., was kostet eine? so liegt auch hier eigentlich die Proportion zu Grunde:

$$20 : 6 = 1 : x$$

d. h. 20 Fuhren verhalten sich zu ihrem Preis von 6 fl. wie 1 Fuhr zu dem gesuchten Preis; woraus

$$x = \frac{6 \times 1}{20} = \frac{6}{20} \text{ Gulden} = 18 \text{ kr.}$$

Der geübte Rechner rechnet aber ohne Proportion kürzer, indem er sagt: Wenn 20 Fuhren 6 fl. kosten, so kostet eine Fuhr den 20sten Theil von 6 fl., das ist $\frac{6}{20}$ fl. oder 18 kr.

Bei diesen beiden Aufgaben sind also im Grunde 3 Glieder einer Proportion gegeben, von welchen aber eines die Einheit (= 1) ist, daher die Aufsuchung des vierten unbekannten Gliedes auf eine einfache Multiplikation oder Division zurückgeführt wird.

43. Anders ist es, wenn 3 Zahlen in der Aufgabe gegeben sind; alsdann muß die Proportion

angesetzt werden. Z. B. 36 □ Fuß kosten 3 fl., was kosten 100 □ Fuß?

Nach dem Grundsatz: die Ausmaße der Arbeiten verhalten sich wie die Kosten, muß hier die Proportion angesetzt werden, entweder

$$36 \;\square' : 100 \;\square' = 3 \text{ fl.} : x \text{ fl.}$$

oder

$$36 \;\square' : 3 \text{ fl.} = 100 \;\square' : x \text{ fl.}$$

d. h. im ersten Fall: 36 □′ Arbeit verhalten sich zu 100 □′ Arbeit, wie die Kosten der 36 □′ (3 fl.) zu den Kosten der 100 □′ (x fl.);

Oder im zweiten Fall: 36 □′ Arbeit verhalten sich zu ihren Kosten 3 fl., wie 100 □′ Arbeit zu ihren Kosten x fl.

Die Auflösung der Proportion gibt in beiden Fällen dasselbe:

$$x = \frac{100 \times 3}{36} = \frac{100}{12} = 8\tfrac{4}{12} = 8\tfrac{1}{3} \text{ fl.}$$

$$= 8 \text{ fl. } 20 \text{ kr.}$$

Es sei ferner die Aufgabe gegeben: 14 Mann brauchen zu irgend einer Arbeit 9 Tage, wie lange brauchen zu derselben Arbeit 7 Mann?

Nach dem Satz: Je weniger Arbeitskräfte, desto mehr Zeit ist zur Vollendung einer und derselben Arbeit nöthig; ist die Proportion anzusetzen:

$$14 \text{ Mann} : 7 \text{ Mann} = x \text{ Tage} : 9 \text{ Tage}$$

woraus $x = \frac{9 \times 14}{7} = 18$ Tage,

was auch ohne Proportion dadurch gefunden werden kann, daß man schließt: 7 Mann sind halb so viel als 14 Mann; 7 Mann werden daher zu einer und

derselben Arbeit gerade doppelt so viel Zeit brauchen, als 14 Mann, das ist 2 × 9 oder 18 Tage.

Während in der ersten Aufgabe die Glieder der Proportion in „geradem Verhältniß“ zu einander standen, stehen sie in der letzten in „verkehrtem Verhältniß“, weßhalb auch in der letzten Aufgabe der zweite Theil der Proportion umgekehrt angesetzt werden muß.

Bei sog. „geraden Verhältnissen“ schließt man: „Je mehr — desto mehr“; bei den verkehrten Verhältnissen: „Je mehr — desto weniger“.

Hätte man im letzten Beispiel wie im ersten angesetzt

14 Mann : 9 Tage = 7 Mann : x Tage

so wäre $x = \frac{7 \times 9}{14} = \frac{63}{14} = 4\frac{1}{2}$ Tage

herausgekommen, was offenbar falsch ist.

Der Anfänger hüte sich daher zu glauben, daß eine Proportion in allen Fällen die richtige Lösung einer solchen Aufgabe gebe. Sie gibt nur dann ein richtiges Resultat, wenn sie richtig angesetzt wird. Dem noch nicht Geübten pflegt indeß der richtige Ansatz der Proportion, d. i. die Unterscheidung des sog. „geraden“ und des „verkehrten“ oder des „steigenden“ und „fallenden“ Verhältnisses einige Schwierigkeiten zu verursachen, weßhalb im Folgenden eine praktische Methode angegeben werden soll, wie sich einfache und zusammengesetzte Aufgaben der Regeldetri, Zins- und Interessenrechnung ꝛc., kurz alle Aufgaben, welche auf Proportionen beruhen, nach einer und derselben einfachen Regel leicht lösen lassen,

und welche die Anwendung von Proportionen, geraden und verkehrten, steigenden und fallenden Verhältnissen, reesischen Ansatz rc. ganz unnöthig macht.

44. Einfache Regeldetri.

Nehmen wir die Aufgabe des vorigen §. noch einmal vor: 36 □′ kosten 3 fl., was kosten 100 □′?

Die Auflösung mit Hilfe der Proportion

$$36 : 3 = 100 : x \quad \text{war}$$

$$x = \frac{3 \times 100}{36} \text{ fl.}$$

Hiefür kann man aber auch setzen:

$$x = 3 \times \frac{100}{36}$$

d. h. es muß, um x zu finden, 3 mit 100 multiplizirt und mit 36 dividirt werden.

Dieß führt aber auf eine andere Betrachtungsweise der Aufgabe und ihrer Lösung; nehmlich zu folgender:

100 □′ kosten offenbar mehr, als 36 □′; und zwar müssen 100 □′ gerade um so viel mal mehr kosten als 36 □′, als 100 □′ größer sind als 36 □′. Mit andern Worten: Um die Kosten von 100 □′ zu erhalten, muß ich die Kosten von 36 □′ (d. i. 3 fl.) vermehren im Verhältniß von 100 zu 36; d. h. ich muß 3 fl. mit 100 multipliziren und mit 36 dividiren.

Dieß gibt $3 \times \frac{100}{36} = \frac{3 \times 100}{36} = \frac{300}{36}$ fl.

Dieses Resultat kann nun durch einen schriftlichen Ansatz auf folgende Weise gefunden werden:

Man zerlege die Aufgabe immer in einen „ge-

gebenen Satz" und in einen „Fragesatz" und schreibe den letztern unter den erstern. In unserer Aufgabe ist der Satz: „36 □' kosten 3 fl." der „gegebene Satz"; und der Satz: „Was kosten 100 □'"? der Fragesatz, welcher allemal das gesuchte x enthalten muß.

Man schreibe also:

□'		fl.	
36	:	3	Gegebener Satz
100	:	x	Fragesatz

und setze einen Strich darunter. Bei dieser Art die Aufgabe anzusetzen, muß immer □' unter □'; ℔ unter ℔; fl. unter fl.; kr. unter kr. geschrieben werden; oder mit andern Worten: die übereinander zu stehen kommenden Zahlen müssen gleiche Dinge bedeuten. Da in unserer Aufgabe über x Gulden stehen, so müssen auch für x Gulden herauskommen.

Ist die Aufgabe auf diese Art angeschrieben, so wird zur Auflösung folgendermaßen weiter gefahren: Man schreibt unter den bereits gezogenen Strich x =; setzt daneben einen Bruchstrich und hinter diesem das Zeichen fl., da x in fl. herauskommen muß. Also

□'		fl.
36	:	3
100	:	x

x = ——— fl.

Die über dem Fragezeichen stehende Zahl (in unsrer Aufgabe die Zahl 3) wird ober den Bruchstrich, in den Zähler des Bruches, und ein Multiplikationszeichen × daneben gesetzt, also

$$\begin{array}{ccc} \square' & & \text{fl.} \\ 36 & : & 3 \\ 100 & : & x \end{array}$$

$$x = \frac{3 \times}{} \text{ fl.}$$

und nach diesen nur mechanisch gemachten Anschreibungen beginnt der wichtigste Theil der Rechnungsoperation, nehmlich der Gedankenschluß, welcher allein zum richtigen Resultat führen kann. Die über dem Bruchstrich angeschriebenen 3 fl. sind entweder im Verhältniß der beiden Zahlen 100 und 36 zu vermehren oder zu vermindern, also entweder mit 100 oder 36 zu multiplizieren oder zu dividiren. Man fragt sich nun: Werden 100 □′ mehr kosten (denn nach Kosten ist gefragt) als 36 □′? Antwort: Ja. Schluß: Wenn 100 □′ mehr kosten als 36 □′ so muß auch für x mehr als 3 fl. herauskommen, und zwar in demselben Verhältniß so viel mal mehr als 3 fl., als 100 größer ist als 36. Die Zahl 3 muß also mit der größeren der beiden Zahlen, also mit 100 multiplizirt, und mit der kleineren, d. i. mit 36 dividirt werden. Man setzt also 100 neben 3 über den Bruchstrich und 36 unter den Bruchstrich, und erhält

$$x = \frac{3 \times 100}{36}$$

Man darf jetzt nur ausrechnen, und erhält

$$x = \frac{300}{36} = 8\tfrac{1}{3}$$

und zwar $8\frac{1}{3}$ Gulden, da die über x stehende Zahl 3 des Ansatzes gleichfalls Gulden bedeutet.

2. Beispiel. Aufgabe: Wenn 14 Mann zu

einer gewissen Arbeit 9 Tage brauchen, wie viel (x) Tage werden zu derselben Arbeit 7 Mann brauchen?

Ansatz:

	Mann		Tage	
	14	:	9	Gegebener Satz
	7	:	x	Fragesatz

$$x = \frac{\qquad}{\qquad} \text{ Tage}$$

Man sagt nun: Die Zahl über dem x wird zuerst in den Zähler des Bruches angeschrieben, und das Zeichen der Multiplikation $\times$ daneben; also

$$x = \frac{9 \times}{\qquad} \text{ Tage}$$

Und nun fragt man sich: Werden 7 Mann mehr oder weniger Zeit zu derselben Arbeit brauchen als 14 Mann? Antwort: Sie werden mehr Zeit brauchen. Folgerung: Man muß also mit der größeren der beiden Zahlen (14) multipliziren, und mit der kleineren (7) dividiren; es wird daher 14 ober, 7 unter den Bruchstrich gesetzt, woraus

$$x = \frac{9 \times 14}{7}$$

entsteht, was

$$x = 18$$

gibt, und zwar Tage, da die über dem x stehende Zahl 9 gleichfalls Tage bedeutet.

3. Beispiel. Aufgabe. Ein Kapital von 2580 fl. wird zu $4\frac{1}{2}$ Prozent ($= 4\frac{1}{2}$ %) auf Zinsen ausgeliehen, wie viel betragen die jährlichen Zinsen?

Erklärung: Prozent, das ist, pro cent heißt „vom Hundert per Jahr"; $4\frac{1}{2}$ % Zins heißt also: Von je 100 fl. jährlich $4\frac{1}{2}$ fl. Zins.

Die gegebene Aufgabe heißt also eigentlich: Wenn 100 fl. Kapital jährlich $4\frac{1}{2}$ fl. an Zins abwerfen, wie viel geben 2580 fl. Kapital?

Auflösung:

fl. Kap.		fl. Zins	
100	:	$4\frac{1}{2}$	Gegebener Satz
2580	:	x	Fragesatz

$$x = \frac{4\frac{1}{2} \times}{\quad} \text{ fl.}$$

Man fragt nun wieder: Werden 2580 fl. mehr Zins tragen als 100 fl. oder weniger? Antwort: Mehr. Schluß: Es muß also mit der größeren Zahl (2580) multiplizirt und mit der kleineren (100) dividirt werden; daher ist

$$x = \frac{4\frac{1}{2} \times 2580}{100} = \frac{4{,}5 \times 258}{10}$$
$$= 4{,}5 \times 25{,}8 = 116{,}1 \text{ fl.}$$
$$= 116 \text{ fl. } 6 \text{ kr.}$$

45. Kommen Ganze und Brüche in der Rechnung vor, so werden die Ganzen zu einem unächten Bruch gemacht; der Zähler desselben bleibt da stehen, wo die Ganzen zu stehen haben, der Nenner wird auf die andere Seite des Bruchstrichs gesetzt. Z. B.

4. Beispiel. Ein Akkordant bietet auf ein Bau-Objekt von 1558 fl. Anschlagswerth 138 fl. 57 kr. ab, wie viele Prozent sind dieß?

Die Frage ist eigentlich: Wenn auf 1588 fl. Anschlagswerth 138 fl. 57 kr. abgeboten werden, wie viel werden auf 100 fl. abgeboten?

Auflösung:

$$138 \text{ fl. } 57 \text{ kr. sind } = 138\tfrac{19}{20} \text{ fl.}$$

daher

$$\begin{array}{ccc} \text{fl.} & & \text{fl. Abgebot} \\ 1588 & : & 138\tfrac{19}{20} \\ 100 & : & x \\ \hline \end{array}$$

$$x = \frac{138\tfrac{19}{20} \times}{}$$

Hier fragt man: Werden auf 100 fl. mehr oder weniger Abgebot treffen, als auf 1588 fl.? Antwort: Weniger. Schluß: Es muß also mit der kleineren Zahl 100 multiplizirt und mit der größeren 1588 dividirt werden.

Daher wird

$$x = \frac{138\tfrac{19}{20} \times 100}{1588}$$

weil nun $138\tfrac{19}{20} = \frac{2779}{20}$ ist, so gibt dieß, indem man 2779 an die Stelle der $138\tfrac{19}{20}$ über, und die 20 unter den Hauptstrich setzt, und mit den 1588 durch das Multiplikationszeichen verbindet:

$$x = \frac{2779 \times 100}{20 \times 1588}$$

Nun kann noch der Zähler und der Nenner mit 20 verkleinert oder dividirt werden, so daß

$$x = \frac{2779 \times 5}{1588} = 8{,}75$$

wird. Das gemachte Abgebot beträgt daher 8,75 oder $8\tfrac{3}{4}$ %.

5. Beispiel. Aufgabe. 27 Mann vollenden eine gewisse Arbeit in $8\tfrac{3}{4}$ Tagen, wie viel Mann werden dieselbe Arbeit in $3\tfrac{3}{8}$ Tagen vollenden?

Auflösung:

In Tagen		Mann
$8\frac{3}{4}$	:	27
$3\frac{3}{8}$	:	x

$$x = \frac{27 \times}{}$$

Da nach der Zahl der Arbeiter gefragt ist, so sagt man: Wenn man, um mit einer gewissen Arbeit in $8\frac{3}{4}$ Tagen fertig zu werden, 27 Mann braucht, so wird man, um mit derselben Arbeit in $3\frac{3}{8}$ Tagen fertig zu werden, mehr Arbeiter brauchen; daher ist mit der größeren Zahl $8\frac{3}{4}$ zu multipliciren, mit der kleineren $3\frac{3}{8}$ zu dividiren. Hiernach wird

$$x = \frac{27 \times 8\frac{3}{4}}{3\frac{3}{8}}$$

Macht man hier die Ganzen zu unächten Brüchen, so muß man $\frac{35}{4}$ für $8\frac{3}{4}$ und $\frac{27}{8}$ für $3\frac{3}{8}$ schreiben, die Zähler dieser Brüche 35 an die Stelle von $8\frac{3}{4}$ und 27 an die Stelle von $3\frac{3}{8}$ setzen, die Nenner 4 und 8 aber jedesmal auf die andere Seite des Bruchstriches setzen, und die Zahlen durch das Zeichen $\times$ verbinden; dann wird

$$x = \frac{27 \times 35}{3\frac{3}{8} \times 4} = 27 \times \frac{35}{4} \times \frac{8}{27} = \frac{27 \times 35 \times 8}{4 \times 27}$$

und wenn man Zähler und Nenner zuerst mit 27 dann mit 4 dividirt,

$$x = \frac{35 \times 2}{1} = 70$$

und zwar 70 Mann, da die im Ansatz über x stehende Zahl gleichfalls „Mann“ bedeutet.

6. Beispiel. Aufgabe. 1000 Backsteine kosten 18 fl. 45 kr., was kosten 888 Stück?

Auflösung:

Backsteine		fl.
1000	:	$18\frac{3}{4}$
888	:	x

$$x = \frac{18\frac{3}{4} \times}{}$$

Weniger Backsteine kosten weniger Geld, daher ist mit der kleineren Zahl 888 zu multiplizIren, und mit der größeren zu dividiren. Dieß gibt:

$$x = \frac{18\frac{3}{4} \times 888}{1000} = \frac{75 \times 888}{4 \times 1000} = \frac{75 \times 222}{1000} = \frac{1665}{1000}$$

$$= 16{,}65 \text{ fl.} = 16 \text{ fl. } 39 \text{ kr.}$$

46. Zusammengesetzte Regeldetri. Die angegebene Verfahrungsweise zur Lösung der Aufgaben der einfachen Regeldetri dient auch zur Lösung der Aufgaben der zusammengesetzten Regeldetri, nur ist in letzterem Fall die vorige Operation öfter zu wiederholen.

1. Aufgabe. Wenn 8 Mann zu 5240 c′ Maurerarbeit 6 Tage brauchen und dabei täglich 10 Stunden arbeiten, wie viel c′ werden 12 Mann in 15 Tagen herstellen, wenn sie täglich nur 9 Stunden arbeiten?

Ansatz:

Mann		Tage		Stund. tägl.		c′
8	—	6	—	10	—	5240
12	—	15	—	9	—	x

$$x = \frac{5240 \times \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot} c'$$

Auch hier wird die Zahl über dem x zuerst oben angesetzt, daneben das Multiplikationszeichen x. Nun

sagt man: 12 Mann werden (bei ganz gleichen übrigen Umständen) mehr arbeiten als 8 Mann; daher ist mit der größeren Zahl (12) zu multipliciren, mit der kleineren (8) zu dividiren; dieß gibt:

$$x = \frac{5240 \times 12 \times \ldots\ldots}{8 \times \ldots\ldots\ldots} c'$$

Weiter schließt man: in 15 Tagen werden mehr c' gefertigt, als in 6 Tagen, daher ist mit der größeren Zahl 15 zu multipliciren und mit der kleineren 6 zu dividiren; gibt

$$x = \frac{5240 \times 12 \times 15 \times \ldots\ldots}{8 \times 6 \times \ldots\ldots} c';$$

Ferner: bei 9stündiger täglicher Arbeit werden weniger c' gefertigt, als bei täglich 10stündiger Arbeit, daher ist mit der kleineren Zahl 9 zu multipliciren und mit der größeren 10 zu dividiren; dieß gibt endlich

$$x = \frac{5240 \times 12 \times 15 \times 9}{8 \times 6 \times 10} c'$$

oder wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl nach einander mit 6, 5, 2 und 8 dividirt (mit andern Worten: wenn man reducirt):

$$x = \frac{655 \times 3 \times 9}{1} c' = 17685\ c'$$

Als Probe der Rechnung und zur Uebung kann man aus dieser Aufgabe noch 7 andere Aufgaben bilden, indem man die für x gefundenen 17685 einsetzt, und dafür eine andere der gegebenen Zahlen sucht, z. B.

2. Aufgabe. Wenn 12 Mann in 15 Tagen 17685 c' herstellen und dabei täglich 9 Stunden arbeiten, wie viele Stunden werden täglich 8 Mann arbeiten müssen, um in 6 Tagen 5240 c' zu liefern?

Auflösung:

Mann		Tage		c'		Stund. tägl.
12	—	15	—	17685	—	9
8	—	6	—	5240	—	x

$$x = \frac{9 \times \ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \text{ Stunden täglich.}$$

Hier sagt man: 8 Mann müssen täglich mehr Stunden arbeiten, um Gleiches zu leisten wie 12 Mann; daher ist mit der größeren Zahl 12 zu multipliziren und mit der kleineren 8 zu dividiren; gibt

$$x = \frac{9 \times 12 \ldots\ldots}{8 \times \ldots\ldots} \text{ Stunden täglich;}$$

Weiter: Um in 6 Tagen mit einer Arbeit fertig zu werden, muß man täglich mehr Stunden arbeiten, als um in 15 Tagen dieselbe zu vollenden; daher ist mit der größeren Zahl 15 zu multipliziren und mit der kleineren zu dividiren; gibt

$$x = \frac{9 \times 12 \times 15 \times \ldots}{8 \times 6 \times \ldots} \text{ Stunden täglich;}$$

Weiter: Zu 5240 c' braucht man weniger Stunden täglich, als zu 17685, daher ist mit der kleineren beider Zahlen 5240 zu multipliziren und mit der größeren (17685) zu dividiren; gibt endlich

$$x = \frac{9 \times 12 \times 15 \times 5240}{8 \times 6 \times 17685} \text{ Stunden täglich}$$

und wenn man reduzirt, indem man oben und unten nach einander mit 6, 2, 5, 9, 3, 4 dividirt, so wird zuletzt

$$x = \frac{5240}{4 \times 131} = \frac{1310}{131} = 10 \text{ Stunden täglich}$$

wie es nach der 1. Aufgabe sein muß.

3. Aufgabe. Welches sind die $3\frac{1}{2}$jährigen Zinsen eines Kapitals von 12000 fl. zu $4\frac{1}{2}$ Proz.?

Auflösung:

fl. Kapital		Jahre		fl. Zins
100	—	1	—	$4\frac{1}{2}$
12000	—	$3\frac{1}{2}$	—	x

$$x = \frac{4\frac{1}{2} \times 12000 \times 3\frac{1}{2}}{100 \times 1} = \frac{9 \times 120 \times 7}{2 \times 2} = \frac{63 \times 120}{4}$$

$$= 63 \times 30 = 1890 \text{ fl.}$$

4. Aufgabe. Probe der vorigen. Zu welchem Zinsfuß muß ein Kapital von 12000 fl. ausgeliehen sein, wenn es in $3\frac{1}{2}$ Jahren 1890 fl. Zins tragen soll?

Auflösung:

fl. Kap.		Jahre		fl. Zins
12000	—	$3\frac{1}{2}$	—	1890
100	—	1	—	x

$$x = \frac{1890 \times 100 \times 1}{12000 \times 3\frac{1}{2}} = \frac{1890 \times 2}{12 \times 7} = 4\frac{1}{2};$$

d. h. 100 fl. Kapital müssen $4\frac{1}{2}$ fl. Zins tragen, oder das Kapital muß zu $4\frac{1}{2}$ % ausgeliehen werden.

5. Aufgabe. Es leiht Jemand 500 fl. auf 9 Monate her, und läßt sich nach Ablauf dieser Zeit an Kapital und Zinsen 540 fl. zurück zahlen; wie viele Prozent hat er genommen?

Aufl. Der bezahlte Zins für $\frac{3}{4}$ Jahr 40 fl.; daher

fl. Kap.		Jahre		fl. Zins
500	—	$\frac{3}{4}$	—	40
100	—	1	—	x

$$x = \frac{40 \times 100 \times 1}{500 \times \frac{3}{4}} = \frac{40 \times 4}{5 \times 3} = \frac{160}{15} = 10\frac{2}{3} \%.$$

47. Uebungsbeispiele zur Regeldetri.

1. Eine Klafter Steine (216c′) kostet 7 fl. 12 kr. was kostet die Schachtruthe (100 c′)?

Antw.: 3 fl. 20 kr.

2. Eine □ Klafter (36 □′) doppeltes Plattendach kostet 3 fl. 48 kr., was kostet die □ Ruthe (100 c′)?

Antw.: 10 fl. $33\frac{1}{3}$ kr.

3. Eine □ Ruthe Schindeldachung kostet 8 fl. 25 kr. was kostet die □ Klafter?

Antw.: 3 fl. $1\frac{8}{10}$ kr.

4. Zu einer □ Ruthe 1 Stein starke Mauer sind 660 Backsteine nöthig, wie viele bedarf man zu einer □ Klafter?

Antw.: 237,6 oder 238 Steine.

5. Eine □ Klafter Spritzwurf kostet 52 kr. was kostet die □ Ruthe?

Antw.: 2 fl. $24\frac{4}{10}$ kr.

6. Ein Zentner Ofengußwaare kostet 12 fl. — kr. was kostet ein Ofen von $355\frac{1}{2}$ Pfd. Gewicht?

Antw.: 42 fl. $39\frac{6}{10}$ kr.

7. Ein Schäffel (= 8,94 c′) Kalk kostet 1 fl. 36 kr. was kostet 1 Metzen (= 1,49 c′)?

Antw.: 16 kr.

8. Ein Accordant bietet auf einen Bau zu 8500 fl. veranschlagt, $1\frac{1}{2}$ % ab, wie viel beträgt dieß Abgebot in Geld?

Antw.: 127 fl. 30 kr.

9. Auf ein Bau-Objekt, zu 1475 fl. 45 kr.

veranschlagt, werden $7\frac{9}{10}$ Prozent abgeboten, wie viel beträgt dieß Abgebot in Geld?

Antw.: 116 fl. 35 kr.

10. Ein Haus kostet 25800 fl. und trägt jährlich nach Abzug der Unterhaltungskosten 650 fl. Miethe ein, wie viel % Rente sind dieß?

Antw.: 2,519 oder etwas mehr als $2\frac{1}{2}$ %.

11. Eine gußeiserne Platte von 115 Pfd. Gewicht kostet 9 fl. $29\frac{1}{4}$ kr., wie hoch ist der Zentner dieser Gußwaare gerechnet?

Antw.: Zu 8 fl. 15 kr.

12. Ein Zimmer von 745 □′ Fläche kostet 2 fl. 29 kr. auszuweißeln; wie hoch ist die □ Ruthe zu weißeln hier gerechnet?

Antw.: Zu 20 kr.

13. Um 4800 c′ Hausteine beizufahren braucht man mit 3 Fuhrwerken, jedes zu 20 c′ Ladungsfähigkeit 24 Tage, wenn die Steine 5000 Fuß weit gefahren werden müssen, wie viel Tage wird man zur Beischaffung von 8400 c′ Steinen brauchen, wenn 6 Fuhrwerke täglich gehen, dabei 24 c′ laden und dieselben 6000 Fuß weit zu fahren haben?

Antw.: 21 Tage.

14. Mit einem gewissen Habervorrath können 60 Pferde $112\frac{1}{2}$ Wochen erhalten werden, wie lange wird man 75 Pferde mit obigem Vorrath ernähren können?

Antw.: 90 Wochen.

15. Zu einem Küchenpflaster braucht man 460 Stück Pflasterziegel von einer gewissen Größe, wie

viel wird man zur Pflasterung derselben Küche Pflasterziegel brauchen, wenn dieselben um $\frac{1}{5}$ an Fläche größer sind, als die vorher verwendeten?

Antw.: 368 Stück.

16. Zur Bretterung eines Dachbodens brauchte man seinerzeit 208 Stück Bretter von 14 Duodecimalzoll Breite; derselbe Dachboden soll nun wieder gebrettert werden und zwar mit Brettern welche dieselbe Länge haben, aber um 1 Duodecimalzoll schmäler sind, als die früher verwendeten, wie viele Bretter wird man nöthig haben?

Antw.: 224 Bretter.

17. Ein Kanal, welcher 300′ lang 75′ breit 20′ tief ist, wird von 500 Arbeitern in 45 Wochen fertig, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten; wie viel Stunden täglich müssen 750 Mann arbeiten, wenn sie mit einem Kanal von 576′ Länge 50′ Breite 25′ Tiefe in 60 Wochen fertig werden wollen?

Antw.: 8 Stunden täglich.

18. Der Wiener Fuß enthält 316 französische Millimeter, der bayerische deren nur 292; oder was dasselbe ist: der Wiener Fuß verhält sich zum bayerischen Fuß, wie 316 zu 292; wie viel Wiener Fuß sind 442 bayerische Fuß?

Antw.: $442 \times \frac{292}{316} = 408{,}4$ Wiener Fuß.

19. Ein bayerischer Kubikfuß ist gleich 0,025 Kubik-Meter, ein preußischer Kubikfuß hält dagegen 0,031 Kubik-Meter; oder mit andern Worten: der bayer. Kubikfuß verhält sich zum preußischen Kubikfuß wie 25:31; wie viele preußische Kubikfuß sind 3500 bayerische Kubikfuß?

Antw.: $3500 \times \frac{25}{31} = 2822{,}6$ preußische Kubikfuß.

20. Das bayer. Pfund hält 0,56 Kilogramm das englische Pfund nur 0,45 Kilogramm; wie viel englische Pfund sind 2000 bayer. Pfund?

Antw.: $2000 \times \frac{56}{46} = 2488{,}88$ Pfund englisch.

Bemerkung. Bei den drei letzten Aufgaben wolle das Kapitel über die Verwandlung der Maße und Gewichte verglichen werden.

D. Einiges über Buchstabenrechnung und Formeln.

48. Erklärung. Zum besseren Verständniß der in dem Kapitel über Flächen- und Körperberechnung vorkommenden Regeln, welche mit Hilfe von Buchstaben ausgedrückt sind, ist es nöthig, eine Erklärung einzuschalten, wie solche Buchstabenrechnungen oder „Formeln" zu verstehen sind, und wie die Rechnung mit Zahlen nach ihnen stattfindet.

Für den Bauhandwerker haben diese Formeln nur den Zweck, eine Regel zur Auflösung einer Aufgabe und zur Berechnung des Resultats kürzer auszudrücken. Z. B. die Regel: „Der Umfang eines Kreises wird gefunden, wenn man den Durchmesser mit 3,14 multiplizirt," wird kürzer in einer Formel dadurch ausgedrückt, daß man den Durchmesser des Kreises mit d, den Umfang des Kreises mit u bezeichnet, und dann schreibt

$$u = 3{,}14 \times d.$$

Gewöhnlich werden hiebei für diese Buchstaben, welche an und für sich ganz beliebig sein könnten, die Anfangsbuchstaben der Dinge gewählt, welche sie vorstellen sollen. Z. B.

$$f = \frac{g \times h}{2}$$

heißt: Der Flächeninhalt (f) eines Dreiecks wird gefunden, wenn man die Grundlinie (g) des Dreiecks mit dessen Höhe (h) multiplizirt und mit 2 dividirt.

49. Buchstabenrechnung und Formeln.

Die dem Bauhandwerker vorkommenden Formeln in Buchstaben lassen sich auf folgende zurückführen, wobei die Operationszeichen zwischen den Buchstaben ganz dieselbe Bedeutung haben, wie in der Zahlen-Arithmetik.

$a + b = c$ (gelesen a plus b gleich c) heißt: Man soll a und b addiren, was herauskommt, ist gleich c. Die beiden Zahlen a und b heißen Summanden, c ist die Summe. Z. B. $8 + 3 = 11$.

$a - b = c$ (gelesen a minus b gleich c) heißt: Man soll b von a abziehen; was herauskommt, ist gleich c. Hier heißt a der Minuend, b der Subtrahend, c ist die Differenz oder der Rest. Z. B. $11 - 8 = 3$.

$a \times b = c$ (gelesen a mal b gleich c) heißt: Man soll a und b multipliziren; was herauskommt, ist gleich c. Hier heißen a und b Faktoren, c ist das Produkt. Z. B. $5 \times 3 = 15$.

$a : b = c$ oder $\frac{a}{b} = c$ (gelesen a dividirt

durch b ist gleich c) heißt: Man soll mit b in a dividiren; was herauskommt, ist gleich c. Hier heißt a der Dividend, b der Divisor, c der Quotient. Z. B. $18 : 3 = \frac{18}{3} = 6$.

Soll eine Zahl a mehrere Mal zu sich selbst addirt oder mehrere Mal genommen werden, so setzt man einen „Koeffizienten" vor dieselbe.

So bedeutet 2a so viel als $a + a$ oder 2 mal a
„ „ 3b „ „ „ $b + b + b$ „ 3 mal b.

Hier ist der Koeffizient einmal 2, das andere mal 3.

Soll hingegen eine Zahl a ein oder 2 mal mit sich selbst multiplizirt, also ins Quadrat oder in den Kubus erhoben werden, so setzt man einen „Exponenten" rechts oben an die Zahl. Z. B. $a \times a = a^2$; $b \times b \times b = b^3$; d. h. a^2 bedeutet so viel als $a \times a$ oder $a \,.\, a$ oder aa, d. h. a soll mit a multiplizirt werden; b^3 bedeutet so viel als $b \times b \times b$ oder $b \,.\, b \,.\, b$ oder bbb, d. h. b soll mit b, und was heraus kommt, nochmal mit b multiplizirt werden.

Im ersten Fall ist der Exponent 2, im letzten 3.
a^2 heißt: das Quadrat von a,
b^2 „ der Kubus (Würfel) von b.

Um den Unterschied zwischen Koeffizient und Exponent zu zeigen, sei bei 3b und b^3 der Werth von $b = 5$, so ist $3b = 3 \times 5 = 15$, aber $b^3 = 5^3$ ist der Kubus von $5 = 5 \times 5 \times 5 = 125$.

Bedeutet bei 2a das a einen Bruch, z. B. $\frac{5}{7}$, so ist $2a = 2 \times \frac{5}{7} = \frac{10}{7}$,

aber a^2 gibt das Quadrat von $\frac{5}{7}$ oder $(\frac{5}{7})^2 = \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} = \frac{25}{49}$.

$\sqrt{b}$ bedeutet, daß aus dem Werthe von b die Quadratwurzel ausgezogen werden soll; $\sqrt[3]{b}$ heißt, man soll aus dem Werthe von b die Kubikwurzel ausziehen.

Z. B. $\sqrt{81}$ heißt: man soll aus 81 die Quadratwurzel ausziehen, diese ist 9, weil 9×9 oder 9^2 wieder 81 gibt.

$\sqrt[3]{125}$ heißt: man soll aus 125 die Kubikwurzel ausziehen, diese ist 5, weil 5^3 oder $5 \times 5 \times 5$ wieder 125 gibt.

Klammern ( ) werden angewendet, wenn ein Operationszeichen auf das Resultat einer noch nicht ausgeführten Rechnung sich bezieht, oder, wenn eine Rechnungs-Operation sich auf mehrere Zahlen zu gleicher Zeit erstrecken soll.

$a \times (b + c)$ heißt: man soll b und c addiren, und was herauskommt, mit a multiplizIren. Z. B. $5 \times (7 + 3)$ heißt: Man soll 7 und 3 addiren, und was heraus kommt, mit 5 multiplizIren; dieß gibt: $5 \times (7 + 3) = 5 \times 10 = 50$.

$(a + b) \times (c + d)$ heißt: Man soll die Summen von $a + b$ und von $c + d$ mit einander multiplizIren. Z. B. $(6 + 4) \times (5 + 3) = 10 \times 8 = 80$.

$f = \left(\frac{B + b}{2}\right) \times h$ heißt: Man soll B

und b addiren, von der Summe die Hälfte nehmen und mit h multiplizIren. Z. B.

$$f = \left(\frac{10+8}{2}\right) \times 7 = 9 \times 7 = 63.$$

$$k = \frac{3{,}14 \times (D^2 - d^2)}{4} \times h$$ heißt: Man soll d^2 von D^2 abziehen, den Rest mit 3,14 multipliziren, das Produkt mit 4 dividiren, und was heraus kommt, mit h multipliren.

$\sqrt{(a^2 + b^2)}$ heißt: man soll das Quadrat von a zu dem Quadrat von b addiren, und aus der Summe die Quadratwurzel ziehen. Z. B.:

$$\sqrt{(8^2 + 6^2)} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10.$$

$\sqrt{\frac{f}{0{,}785}}$ heißt: Man soll mit 0,785 in f dividiren, und aus dem Quotient die Quadratwurzel ziehen. Ist z. B. f = 78,5, so gibt dieß

$$\sqrt{\frac{f}{0{,}785}} = \sqrt{\frac{78{,}5}{0{,}785}} = \sqrt{100} = 10.$$

$\left(\frac{B + \sqrt{B \times b} + b}{3}\right) \times 3{,}14 \times h$ heißt: man soll B und b multiplizIren, die Quadratwurzel aus dem Produkte ziehen, B und b dazu addiren, die Summe mit 3 dividiren, den Quotienten mit 3,14 und was heraus kommt, noch mit h multiplizIren.

$\sqrt[3]{\frac{6 \times k}{3{,}14}}$ heißt: Man soll k mit 6 multipli-

ziren, mit 3,14 dividiren und dann die Kubikwurzel ausziehen. Z. B.: Ist k = 4,186, so wird

$$\sqrt[3]{\frac{6 \times 4{,}186}{3{,}14}} = \sqrt[3]{8{,}00} = 2{,}0.$$

50. Uebungs-Beispiele:

1) $3 \times (5 + 7) = 3 \times 12 = 36.$

2) $5 \times \left(\frac{8+4}{2}\right) = 5 \times \left(\frac{12}{2}\right) = 5 \times 6 = 30.$

3) $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{(3^2 + 4^2)} = \sqrt{9 + 16}$
$= \sqrt{25} = 5.$

4) $\frac{(12^2 - 8^2) \times 3{,}14}{4} = \frac{(144 - 64) \times 3{,}14}{4}$
$= \frac{80 \times 3{,}14}{4} = 62{,}8.$

5) $k = \frac{(D^3 - d^3) \times 3{,}14}{12}$ gibt für $D = 5$, $d = 4$,
$k = 15{,}96.$

6) $k = \left(\frac{B + \sqrt{B \times b} + b}{3}\right) \times 3{,}14 \times h$

gibt für $B = 16$, $b = 4$ und $h = 10$:

$$\left(\frac{16 + \sqrt{16 \times 4} + 4}{3}\right) \times 3{,}14 \times 10 =$$

$$\left(\frac{20 + \sqrt{64}}{3}\right) \times 31{,}4 = \left(\frac{20 + 8}{3}\right) \times 31{,}4$$

$$= \left(\frac{28}{3}\right) \times 31{,}4 = 293{,}066\ \ldots$$

Zweites Kapitel.

Vom Maß und Gewicht und den verjüngten Maßstäben.

51. Längenmaß. — Das Grundmaß im Königreiche Bayern (mit Ausnahme der Pfalz) ist der bayerische Fuß oder Schuh, welcher $129\frac{28}{100}$ Duodecimallinien des in 144 Linien eingetheilten ehemaligen Pariserfußes enthält.

Man theilt den bayerischen Schuh entweder in 12 oder 10 gleiche Theile, welche Zoll heißen, und ebenso den Zoll wieder in 12 oder 10 gleiche Theile, welche Linien genannt werden; im ersten Fall erhält man den Duodecimalzoll und die Duodecimallinie, im zweiten Fall den Decimalzoll und die Decimallinie. Die erste Eintheilung gibt das Duodecimalmaß oder das zwölftheilige Maß auch Werkmaß genannt und wird mit (dd) bezeichnet; die zweite gibt das Decimalmaß oder das zehntheilige Maß (dec).

Zwölftheiliges Längenmaß.

1 Klafter	hält	6 Schuh,	oder	6′
1 Schuh	„	12 Zoll,	„	12″ dd
1 Zoll	„	12 Linien,	„	12‴ dd

Es ist daher auch:

1 Klafter = 6′ = 72″ = 864‴ dd.
1 Schuh = 12″ = 144‴ „
1 Zoll (dd) = 12‴ „

Zehntheiliges Längenmaß.

1 Ruthe (°) hält 10 Schuh, oder 10′
1 Schuh „ 10 Zoll, „ 10″ dec.
1 Zoll „ 10 Linien, „ 10‴ „

Es ist daher auch:

1 Ruthe = 10′ = 100″ = 1000‴ dec.
1 Schuh = 10″ = 100‴ „
1 Zoll (dec) = 10‴ „

Ferner:

1 Linie (dec) = 0,1 Zoll = 0,01 Schuh,
= 0,001 Ruthe.
1 Zoll „ = 0,1 Schuh = 0,01 „
1 Schuh = 0,1 „

8 Ruthen 7 Schuh 6 Zoll 5 Linien (dec) werden daher angeschrieben = 8,765 Ruthen = 87,65 Schuh = 876,5 Zoll = 8765 Linien.

Ebenso bedeutet: 6,75 Schuh = 6 Schuh 7 Zoll 5 Linien (dec) oder $6\frac{3}{4}$ Schuh, u. s. w.

Bei dem königl. bayerischen Staatsbauwesen ist durch Verordnung die ausschließliche Anwendung des Decimalmaßes vorgeschrieben.

In der Pfalz (Rheinbayern) ist der französische Meter (Mètre) eingeführt. Der Meter ist der 40 Millionste Theil des Erdumfangs (Erdmeridians). Dieses Maß wird in 10 gleiche Theile, die man Decimeter oder Zehntheile eines Meters, diese in 10 andere, die man Centimeter oder Hundertheile, und diese wieder in 10 andere, die man Millimeter oder Tausendtheile eines Meters nennt, eingetheilt. Der Meter enthält daher 10 Decimeter, oder 100 Centimeter, oder 1000 Millimeter. 10 Meter nennt man einen Dekameter oder eine

metrische Ruthe, 100 Meter einen Hektometer, 1000 Meter einen Kilometer, 10000 Meter einen Myriameter (Lieue).

1 Meter ist = 3,42631 bayr. Fuß
= 3′ 4″ 2‴ (dec.)
= 3′ 5″ 1‴ (dd).

1 bayr. Fuß ist = 0,29186 Meter.

1 bayr. Dezimalzoll ist = 2,918 Centimeter.

1 bayr. Dezimallinie ist = 2,918 Millimeter.

Eine geometrische Stunde, nach welcher in Bayern die Straßen eingetheilt sind, ist 12703 bayer. F. oder 3703 Meter lang; es ist daher eine Weg- (oder Chaussée-) Meile in Bayern = 25406 F. = 7406 Meter = 2 Stunden. Die deutsche oder geographische Meile hat 25380 bayer. F. = 22803 Par. Fuß.

Eine bayer. Elle hat 2 F. $10\frac{1}{4}$ Duodecimalzoll oder 2,854 bayer. Fuß. Die pfälzische Elle hat 6 Decimeter = 60 Centimeter = 0,6 Meter.

52. Flächenmaß. — Zur Berechnung der Flächen bedient man sich des Quadratschuhes (□′). Der Quadratschuh ist ein Quadrat, welches 1 Schuh Seite hat.

Zwölftheiliges Flächenmaß.

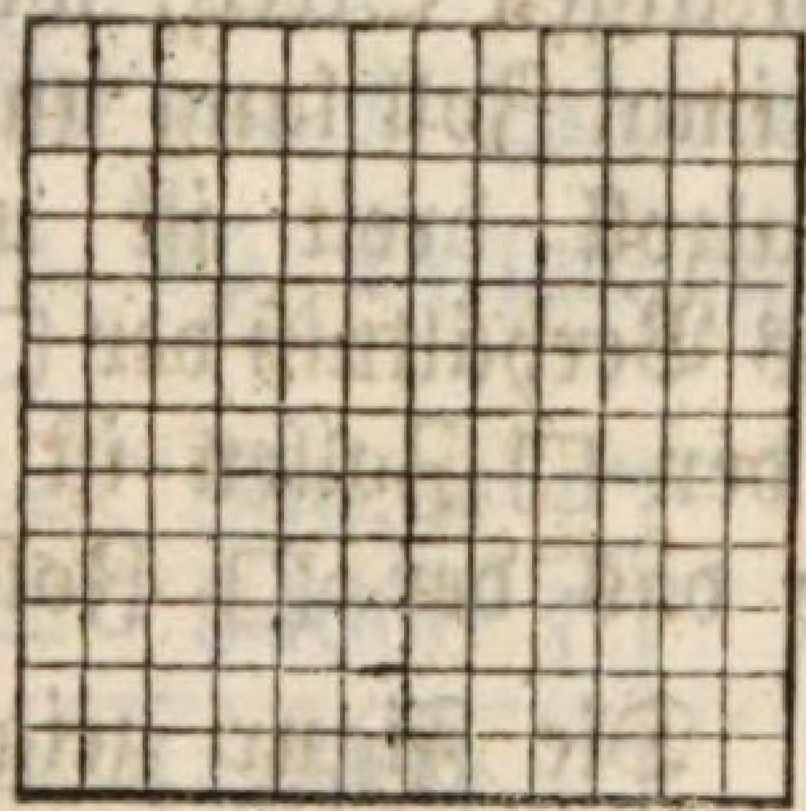
1 Quadratklafter hält 36 □′
1 Quadratschuh „ 144 □″ dd
1 Quadratzoll (dd) „ 144 □‴ „

d. h. eine Quadratklafter ist ein Quadrat, welches 6 Fuß Seite hat. Der □′ ist in der □ Klafter 36 mal enthalten

18 □′ sind = $\frac{1}{2}$ □ Klafter
9 □′ „ = $\frac{1}{4}$ □ Klafter ꝛc.

Ein Quadratfuß ist ein Quadrat, welches einen Fuß oder 12 Duodec. Zoll zur Seite hat. Ein □ Duodec. Zoll (□″ dd) ist in dem □ Fuß 12 × 12 oder 144 mal enthalten.

Ein halber □ Fuß hat 72 □ dd Zoll; $\frac{1}{4}$ □′ hat 36 □″ dd; $\frac{1}{12}$ □′ hat 12 □″ dd; $\frac{1}{12}$ □′ ist ein rechteckiger Streif, welcher 12 dd Zoll Länge und 1 dd Zoll Breite hat u. s. w.



Der Holzschnitt zeigt einen bayr. □ Duodec. Zoll in 144 □ Duodec. Linien getheilt in natürlicher Größe.

Es ist daher auch:

1 Quadratklafter	= 36 □′	=	5184 □″	
		=	746496 □‴	dd
1 Quadratschuh	= 144 □″	=	20736 □‴	„
1 Quadratzoll (dd)		=	144 □‴	„

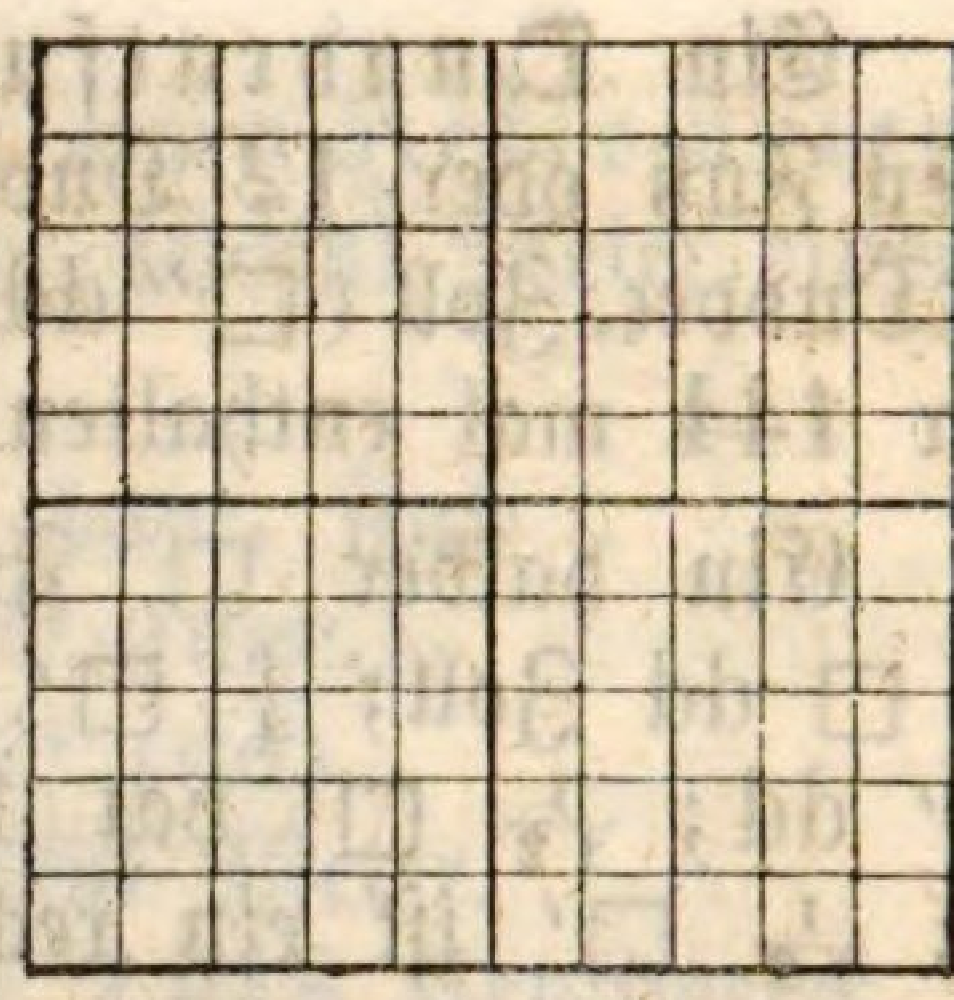
Zehntheiliges Flächenmaß.

1 Quadratruthe (□°)	hält	100 □′	
1 Quadratschuh	„	100 □″	dec.
1 Quadratzoll (dec)	„	100 □‴	„

Eine Quadratruthe ist ein Quadrat, welches 10 Fuß Seite hat.

Der □′ ist in der □ Ruthe 100 mal enthalten, daher = 0,01 □ Ruthe. Eine halbe □ Ruthe hat 50 □′; eine Viertel □ Ruthe 25 □′, eine zehntel □ Ruthe 10 □′.

Ein Quadratfuß ist ein Quadrat, welches einen Fuß oder 10 Decimalzoll zur Seite hat. Ein De=



cimalquadratzoll (□″ dec.) ist in dem □′ 100 mal enthalten, daher = 0,10 □ Fuß. 10 □″ dec. bilden einen rechteckigen Streif, welcher 10 Decimal-Zoll lang und 1 Decimalzoll breit ist u. s. w. Das Verhältniß der □ Linien zu den □ Zollen ist dasselbe wie das der □ Zolle zu dem □ Fuß.

Die Figur zeigt einen □ Decimalzoll in 100 □ Decimallinien getheilt in natürlicher Größe.

Es ist daher auch:

1 Quadratruthe = 100 □′ = 10000 □″ dec.
= 1000000 □‴ „
1 Quadratschuh = 100 □″ = 10000 □‴ „
1 Quadratzoll (dec) = 100 □‴ „

Ferner:

1 Quadratlinie (dec) = 0,01 □″ = 0,0001 □′
= 0,000001 □°
1 Quadratzoll (dec) = 0,01 □′ = 0,0001 □°
1 Quadratschuh = 0,01 □°

12 Quadratruthen 85 Quadratschuh 21 Quadratzoll 98 Quadratlinien werden daher angeschrieben:

12,852198 □° = 1285,2198 □′ = 128521,98 □″
= 12852198 □‴;

Ebenso sind:

78,243618 □° = 78 □° 24 □′ 36 □″ 18 □‴
5,099 □′ = 5 □′ 9 □″ 90 □‴
31,01 □″ = 31 □″ 1 □‴ u. s. w.

Bei größeren Flächen dient zum Maße das bayer. Tagwerk, welches 40000 bayer. □ Schuh hält.

Das bayer. Tagwerk wird in 100 gleiche Theile getheilt, und ein solcher Theil heißt eine Decimale. Die Decimale hat also 400 □′ Es ist daher:

1 Decimale = 400 □′
10 Decimalen = 4000 □′
100 „ = 40000 □′ = 1 Tagwerk.

Hält ein Grundstück 2 Tgw. 85 Decimalen, so gibt dieß

2 × 40000 □′ = 80000 □′
und 85 × 400 □′ = 34000 □′
zusammen = 114000 □′

oder mit Decimalbrüchen gerechnet: 2 Tgw. 85 Dec. sind = 2,85 Tgw. = 2,85 × 40000 □′ = 114000 □′.

Hält ein Bauplatz 49 Decimalen, so ist seine Fläche = 0,49 Tgw. = 0,49 × 40000 □′ = 19600 □′.

Hat ein Gärtchen $2\frac{1}{2}$ Decimalen Fläche, so wird dieß ausgedrückt:

2,5 Dec. oder 0,025 Tgw.

und seine Fläche ist 0,025 × 40000 = 1000 □′
oder in Dec. gerechnet 2,5 × 400 = 1000 □′ *)

Um sich von der Größe eines Tagwerks eine

---

*) Entgegen dieser einzig richtigen Bezeichnung kann man sehr häufig in Blättern, selbst bei gerichtlichen Bekanntmachungen u. s. w., lesen:

0,15 Decimalen Haus mit Hofraum u. s. w.

was offenbar keinen vernünftigen Sinn hat, da 0,15 Decimalen eigentlich $\frac{15}{100}$ Dec. oder 0,15 × 400 = 60 □′ sind, was ein sehr kleines Kämmerchen von etwa 10′ Länge und 6′ Breite, aber kein Haus mit Hofraum vorstellen kann. Es muß offenbar heißen

15 Dec. oder 0 Tgw. 15 Decimalen oder
0,15 Tagwerk

was 15 × 400 = 6000 □′ gibt.

richtige Vorstellung zu machen, merke man sich, daß dasselbe einem Quadrat von 200 Fuß Seite gleichkommt; denn 200 × 200 = 40000.

Eine Decimale ist gleich der Fläche eines Quadrats von 20 Fuß Seite. Denn 20 × 20 = 400. Eine Dezimale ist also ohngefähr so groß wie die Fläche eines kleinen Zimmers.

In der Pfalz werden die Flächen durch den Quadratmeter ausgedrückt. Der □Meter hat 100 □Decimeter, der □Decimeter hat 100 □Centimeter, der □Centimeter hat 100 Millimeter. 100 □Meter geben 1 Are; 100 Aren = 10000 □Meter geben 1 Hectare oder einen metrischen Morgen.

1 □Meter ist = 11,73960 □′ bayer.
1 bayer. □Fuß ist = 0,08518 □Meter.

53. Körpermaß. — Zur Berechnung der Körper bedient man sich des Kubikfußes (c′). Der Kubikfuß ist ein Würfel, dessen Seite 1 Fuß ist.

Zwölftheiliges Körpermaß.

1 Kubikklafter	hält	216 c′
1 Kubikschuh	„	1728 c″ dd
1 Kubikzoll (dd)	„	1728 c‴ „

Es ist daher auch:

1 Kubikfuß = 1728 c″	=	2985984 c‴	(dd)
1 Kubikzoll (dd)	=	1728 c‴	„

Die Kubikklafter ist ein Würfel, dessen Seiten eine Klafter oder 6 Fuß groß sind. Daher ist der Inhalt einer Kubikklafter 6 × 6 × 6 = 216 c′.

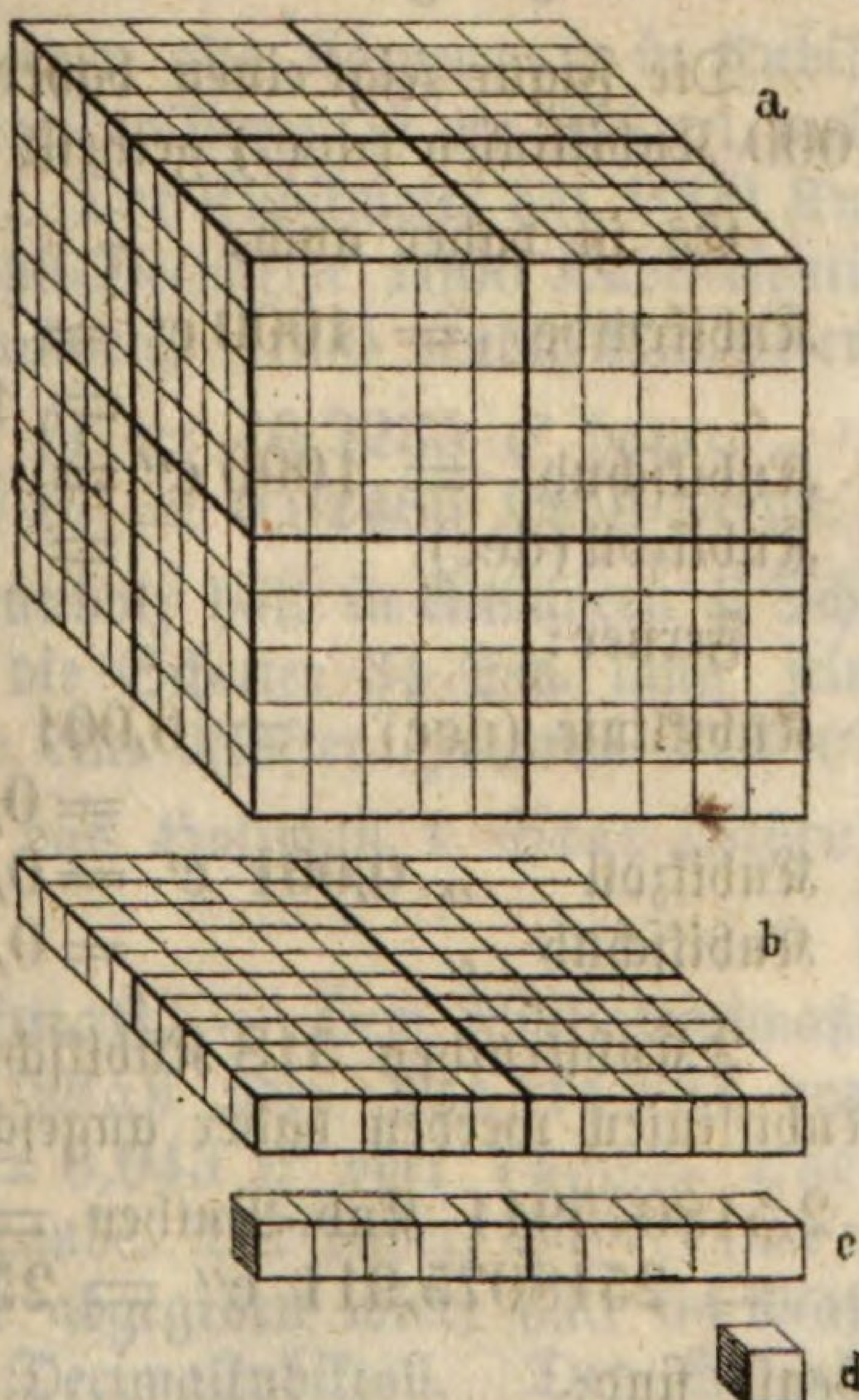
Im Bauwesen kommen jedoch auch in einigen Gegenden beim Messen der Bausteine Klafter zu 108 c′ vor. Eine solche Klafter darf dann nicht

Kubikklafter genannt werden, da sie nur halb so groß ist. Eine solche Klafter ist ein rechtwinkliger Körper von 6′ Länge, 6′ Breite und 3′ Höhe, woraus der Inhalt $= 6 \times 6 \times 3 = 108$ c′ folgt.

Zehntheiliges Körpermaß.

1 Kubikruthe	hält	1000 c′	
1 Kubikschuh	„	1000 c″	dec.
1 Kubikzoll (dec)	„	1000 c‴	„

Eine **Kubikruthe** ist ein Würfel, welcher 1 Ruthe oder 10 Fuß zur Seite hat.



Die nebenstehende Figur a eines Würfels stellt eine Kubikruthe vor. Denkt man sich diesen Würfel a in horizontaler Richtung in 10 gleich dicke Platten zerschnitten, so ist eine solche Platte b 10′ lang 10′ breit und 1′ dick, und hält 100 c′ oder eine **Schachtruthe**.

Wird diese Platte nach der Quer wieder in 10 gleiche Theile zerlegt, so erhält man 10 Stäbe; jeder dieser Stäbe c ist 10′ lang hat 1 □′ Querschnitt und hält 10 c′.

Wird auch dieser Stab noch in 10 gleiche Theile der Quere nach zerschnitten, so erhält man 10 Würfel d deren jeder 1′ lang 1′ breit 1′ hoch oder 1 c′ ist.

Der ganze Würfel läßt sich also in 10 Platten zu 100 c′, in 100 Stäbe zu 10 c′ und in 1000 Würfel zu 1 c′ zerlegen.

Eine Kubikruthe enthält daher 10 × 10 × 10 = 1000 c′.

Auf dieselbe Art läßt sich der Kubikfuß in 1000 dec. Kubikzolle, und der Kubikzoll in 1000 dec. Kubiklinien zerlegen.

Die Figur zeigt einen bayer. Kubikzoll (dec.) in 1000 Kubiklinien (dec.) getheilt in natürlicher Größe.

Es ist daher auch:

1 Kubikruthe	= 1000 c′	=	1000000 c″	
		=	1000000000 c‴	dec.
1 Kubikschuh	= 1000 c″	=	1000000 c‴	„
1 Kubikzoll (dec)		=	1000 c‴	„

Ferner:

1 Kubiklinie (dec)	= 0,001 c″	=	0,000001 c′	
		=	0,000000001	c Ruthe.
1 Kubikzoll	„ 0,001 c′	=	0,000001	c Ruthe.
1 Kubikschuh	„	=	0,001	c Ruthe.

2 Kubikruthen 518 Kubikschuh 75 Kubikzoll 911 Kubiklinien werden daher angeschrieben:

2,518075911 Kub.-Ruthen = 2518,075911 c′
= 2518075,911 c″ = 2518075911 c‴;

ebenso sind:

40,0803 c′ = 40 c′ 80 c″ 300 c‴
9,005 c″ = 9 c″ 5 c‴ u. s. w.

Die Körpermaße werden beim Bauwesen gemäß bestehender Instruktion nach 100 Kubikschuh, welche eine Schachtruthe geben, berechnet.

Eine Schachtruthe ist ein rechtwinkliger Körper, welcher 10′ lang 10′ breit und 1′ hoch ist.

Der leichteren Rechnung wegen sollen in Kostenanschlägen nur □Ruthen zu 100 □′ und nur Schachtruthen zu 100 c′ in Anwendung kommen.

Bei dem Straßenbaue wird noch das früher angenommene Maß von 18 c′ für einen Materialhaufen beibehalten.

In der Pfalz werden alle Körpermaße in Kubikmeter ausgedrückt. Der Kubikmeter ist ein Würfel, welcher 1 Meter Seite hat. Der Kubikmeter hat 1000 Kubik-Decimeter, der Kubik-Decimeter 1000 Kubik-Centimeter, der Kubik-Centimeter 1000 Kubik-Millimeter.

Ein Kubik-Meter ist = 40,2235 c′ bayer.
1 bayer. Kubik-Fuß ist = 0,02486 Kubik-Meter.

Die Klafter Brennholz hält in Altbayern 6 Sch. im Quadrate, wobei die Scheiter $3\frac{1}{2}$ Sch. lang sein müssen; es hält also eine Klafter Holzmaß 126 c′.

In der Pfalz ist das Holzmaß 1 Ster (Stère) gleich 1 Kubikmeter.

54. Getränkmaß. — Dem Flüssigkeitsmaße liegt in Bayern die Maß oder Maßkanne von 43 Decimalkubikzoll = 0,043 c′ oder $74\frac{304}{1000}$ Duodecimalkubikzoll zu Grunde. Der bayer. Visireimer, wie er an die Wirthe abgegeben wird, hält 64 Maß oder 2 c′ und 752 Decimalkubikzoll. Der Schenkeimer hält 60 Maß = 60 × 0,043 c′ = 2,58 c′.

Ein Kubikfuß hält 23,256 bayer. Maß.

In der Pfalz heißt die Einheit des Flüssigkeitsmaßes Liter. Der Liter ist 1 Kubik-Decimeter oder $\frac{1}{1000}$ Kubikmeter. 100 Liter geben einen Hectoliter.

1 bayer. Maß ist = 1,069 Liter, 1 Liter ist = 0,935 bayer. Maß. Ein Hectoliter ist daher $93\frac{1}{2}$ bayer. Maß.

55. Getreid- und Kalkmaß. — Die Einheit ist der altbayerische Metzen, er hält genau $34\frac{3}{4}$ bayer. Maßkannen oder 1,49 c'. Das Sechsmetzenmaß heißt in Bayern Schäffel, und hält 208 Maß oder 8,944 c'. In der Pfalz wird das Getreid nach Hectolitern, in neuester Zeit aber nach dem Gewicht in Kilogrammen verkauft.

Im Betreffe des Kalkmaßes wird nach Bestimmung im k. Regierungsblatte Nr. 42 v. J. 1811 verfahren, wornach 1 Muth 4 bayer. Schäffel enthalten muß. Ein Kalkmetzen soll ein abgekürzter Kegel sein, unten 1' 6'', oben 1' 3'' im Durchmesser, und 11'' $11\frac{2}{5}$''' hoch. Derselbe hält 1,5 c'. Beim Messen muß aufgehäuft werden.

56. Gewicht. — Das bayerische Pfund (℔) hält verordnungsmäßig 560 französische Gramm oder 0,560 Kilogramm. 1 Pfd. hält 32 Loth, 1 Loth 4 Quintel, 1 Quintel 4 Pfenniggewicht.

100 bayer. Pfd. geben einen bayer. Centner.

Ein deutsches Zollpfund (zugleich das badische und hessische Landesgewicht) ist gleich 500 Gramm oder 0,5 oder $\frac{1}{2}$ Kilogramm.

Der bayer. Centner hat daher 56 Kilogr.
der deutsche Zoll-Centner " 50 "

Der bayer. Centner verhält sich also zum Zoll-Centner wie 56 : 50 oder wie 112 : 100 d. h. 100 bayer. Pfd. sind gleich 112 Zollpfund.

1 Zollpfund ist daher gleich 0,8928 bayer. Pfd. 1 Zoll-Centner ist = 89,285 bayer. Pfd. oder nahe zu $89\frac{1}{4}$ Pfd. bayer.

In der Pfalz gilt das französische Gewicht, dessen Einheit das Gramm ist. Ein Gramm ist das Gewicht eines Kubik-Centimeters reinen Wassers. 1000 Gramm geben ein Kilogramm (das Gewicht eines Kubik-Decimeters oder Liters reinen Wassers). Ein Kilogramm entspricht einem Gewicht von 1 Pfd. 25 Loth bayerisch, = 1,78571 Pfd. bayer.

Der bayer. c′ Wasser wiegt 44,39 Pfd. In der Praxis setzt man 44 Pfd. an. Das Gewicht eines Pariser Kubikfußes Wasser ist gleich 70 Pfd. franz. Gewicht. Der preußische und rheinische Kubikfuß Wasser wiegt 66 Pfd. rhein. Gewicht. Der österreichische Kubikfuß Wasser wiegt 56,4 Pfd. Wienergewicht.

57. Verwandlung von Duodecimalmaß in Decimalmaß und umgekehrt. — Die Umwandlung des dd. Maßes in dec. Maß und umgekehrt hat keine Schwierigkeit, wenn man nur ein für allemal fest hält, daß eine und dieselbe Größe, mit einem kleineren Maßstab ausgemessen, ein größeres Resultat gibt, als wenn dieselbe Größe mit einem größeren Maßstab ausgemessen wird; und zwar wird das Resultat im ersten Fall genau in demselben Verhältniß größer sein müssen, als der angewendete Maßstab kleiner ist als der im zweiten Fall angewendete. Die dd. Zoll sind nun kleiner als die dec. Zoll; die Verwandlung einer Anzahl von dd. Zoll (kleineres Maß) in dec. Zoll (größeres Maß), muß also immer ein kleineres Resultat,

die Verwandlung der dec. Zoll (größeres Maß) in (dd) Zoll (kleineres Maß) ein größeres Resultat geben.

Nun ist 1′ = 12″ dd = 10″ dec.; 12″ dd. geben also 10″ dec. und umgekehrt.

dd. Zoll werden also in dec. Zoll verwandelt, wenn man die gegebene Anzahl von dd. Zoll vermindert im Verhältniß von 12 zu 10, oder wenn man dieselbe mit 10 multiplizirt und mit 12 dividirt.

dec. Zoll werden in dd. Zoll verwandelt, wenn man die gegebene Anzahl von dec. Zoll vermehrt im Verhältniß von 10 zu 12, also wenn man dieselbe mit 12 multiplizirt und mit 10 dividirt. Z. B.

$$7'' \text{ dd} = 7 \times \tfrac{10}{12}'' \text{ dec.} = \tfrac{70}{12}'' \text{ dec.} = 5{,}833\ldots'' \text{ dec.}$$

$$9'' \text{ dec.} = 9 \times \tfrac{12}{10}'' \text{ dd} = 10{,}8'' \text{ dd.}$$

Um den Bruchtheil 0,8″ dd in dd Linien zu verwandeln, setzt man, weil der dd Zoll 12 dd Linien hat,

$$0{,}8'' \text{ dd} = 0{,}8 \times 12''' \text{ dd} = 9{,}6''' \text{ dd.}$$

9″ dec. sind also = 10″ $9\tfrac{6}{10}'''$ dd.

Zum Gebrauch dient folgende Tabelle:

Verwandlungstabelle der Duodecimalzoll in Decimalzoll.

Dd. Zoll	Bruch	Fuß	Dec. Zoll
1″	$\frac{1'}{12}$	0,08333	0,8333
2″	$\frac{2'}{12} = \frac{1'}{6}$	0,16666	1,6666
3″	$\frac{3'}{12} = \frac{1'}{4}$	0,25000	2,5000
4″	$\frac{4'}{12} = \frac{1'}{3}$	0,33333	3,3333
5″	$\frac{5'}{12}$	0,41666	4,1666
6″	$\frac{6'}{12} = \frac{1'}{2}$	0,50000	5,0000
7″	$\frac{7'}{12}$	0,58333	5,8333
8″	$\frac{8'}{12} = \frac{2'}{3}$	0,66600	6,6666
9″	$\frac{9'}{12} = \frac{3'}{4}$	0,75000	7,5000
10″	$\frac{10'}{12} = \frac{5'}{6}$	0,83333	8,3333
11″	$\frac{11'}{12}$	0,91666	9,1666
12″	$\frac{12'}{12} = 1'$	1,00000	10,0000

Sind dd. Zoll und dd. Linien in dec. Maß zu verwandeln, so macht man die Zoll ebenfalls zu Linien, multiplizirt die Gesammtzahl der Linien (weil 100‴ dec. = 144‴ dd.) mit 100 und dividirt mit 144; z. B. 18′ 7″ 5‴ dd. in Dec. Maß verwandeln.

Die Anzahl der Schuhe bleibt unverändert.

$$7'' \; 5''' = 7 \times 12''' + 5''' = 89''' \text{ dd.}$$

$$89''' \text{ dd} = 89 \times \frac{100'''}{144} \text{ dec.} = 61{,}8''' \text{ dec.},$$

sohin sind

$$18' \; 7'' \; 5''' \text{ dd} = 18' \; 61{,}8''' \text{ dec.} = 18' \; 6'' \; 1{,}8''' \text{ dec.}$$
$$= 18{,}618'.$$

Umgekehrt sind 18,618′ dec. in dd. Maß zu verwandeln, so multiplizirt man einfach den Decimal-Bruchtheil von Schuhen 0,618 mit 12; die Ganzen im Produkt sind dd. Zoll, der Decimal-Bruchtheil davon wird durch nochmaliges Multipliziren mit 12 zu dd. Linien gemacht.

$$0{,}618' = 0{,}618 \times 12'' \text{ dd} = 7{,}416'' \text{ dd}$$
$$0{,}416'' \text{ dd} = 0{,}416 \times 12''' \text{ dd} = 4{,}992''' \text{ dd}$$
$$\text{oder} = 5''' \text{ dd}$$

also sind

$$18{,}618' = 18' \; 7'' \; 5''' \text{ dd wie oben.} —$$

Bei der Verwandlung der dd. □ Zoll in dec. □ Zoll und umgekehrt ist ebenso zu beachten, daß 1 □′ = 144 □″ dd = 100 □″ dec. Es geben sohin 144 □″ dd in dec. Maß verwandelt 100 □″ dec.

dd. □ Zoll werden daher in dec. □ Zoll verwandelt, wenn man die gegebene Anzahl von dd. □ Zoll vermindert im Verhältniß von 144 zu 100, wenn man also die gegebene Anzahl von dd. □ Zoll mit 100 multiplizirt und mit 144 dividirt. Umgekehrt werden:

dec. □ Zoll in dd. □ Zoll verwandelt, wenn man die gegebene Anzahl von dec. □ Zoll vermehrt im Verhältniß von 100 zu 144, wenn man also die gegebene Anzahl von dec. □ Zoll mit 144 multiplizirt und mit 100 dividirt.

Z. B. Es sind 2 □′ 108 □″ dd. Maß in dec. Maß zu verwandeln. Da die Verschiedenheit von dd. Maß und dec. Maß sich nur auf die Zoll und Linien erstreckt, so bleiben die 2 □′ unverändert.

$$108 \square'' \text{ dd geben } 108 \times \frac{100''}{144} \text{ dec.} = 75 \square'' \text{ dec.}$$

Also sind: 2 □′ 108 □″ dd = 2,75 □′ dec.

Sind außer den dd. □ Zoll noch dd. □ Linien in dec. Maß zu verwandeln, so macht man die dd. □ Zoll ebenfalls zu dd. □ Linien, multiplizirt die Gesammtzahl von dd. □ Linien (weil 1 □′ = 100 × 100 oder 10000 □‴ dec. = 144 × 144 oder 20736 □‴ dd.) mit 10000 und dividirt mit 20736.

Z. B. Es sind 45 □′ 112 □″ 72 □‴ dd in dec. Maß zu verwandeln.

$$112 \square'' + 72 \square''' = 112 \times 144 + 72 \square''' = 16200 \square''' \text{ dd}$$

$$16200 \square''' \text{ dd} = \frac{16200 \times 10000}{20736} \square''' \text{ dec.} = 7812{,}5 \square''' \text{ dec.}$$ Folglich sind

$$45 \square' 112 \square'' 72 \square''' = 45 \square' 78 \square'' 12{,}5 \square''' \text{ dec.} = 45{,}78125 \square'.$$

Umgekehrt: sind 45,78125 □′ in dd. Maß auszudrücken, so multiplizirt man den Decimalbruch 0,78125 (weil der □′ 144 □″ dd hat) mit 144, die Ganzen des Produkts sind dd. □ Zoll, die Decimalbruchtheile davon werden durch Multiplikation mit 144 zu dd. □ Linien gemacht.

$$0{,}78125 \square' = 0{,}78125 \times 144 \square'' \text{ dd} = 112{,}5 \square'' \text{ dd}$$

$$0{,}5 \square'' \text{ dd} = 0{,}5 \times 144 \square''' \text{dd} = 72 \square''' \text{dd}$$

Also sind:

45,78125 □′ = 45 □′ 112 □″ 72 □‴ (dd) wie oben. —

Bei der Verwandlung der dd. Kubikzoll in dec. Kubikzoll und umgekehrt ist nach dem Frühern zu bemerken, daß 1 c′ = 1728 c″ dd = 1000 c″ dec. ist, daß also 1728 c″ dd bei der Verwandlung in dec. Maß 1000 c″ dec. geben.

dd. Kubikzoll werden daher in dec. Kubikzoll verwandelt, wenn man die gegebene Anzahl von dd. Kubikzoll vermindert im Verhältniß von 1728 zu 1000, oder also, wenn man die gegebene Anzahl von dd. Kubikzoll mit 1000 multiplizirt und mit 1728 dividirt. Umgekehrt:

dec. Kubikzoll werden in dd. Kubikzoll verwandelt, wenn man die gegebene Anzahl von dd. Kubikzoll vermehrt im Verhältniß von 1000 zu 1728, oder, wenn man die gegebene Anzahl von dec. Kubikzoll mit 1728 multiplizirt und mit 1000 dividirt.

Z. B. Es sollen 48 c′ 1512 c″ dd. in dec. Maß verwandelt werden.

$$1512\,c''\,dd = 1512 \times \frac{1000}{1728}\,c''\,dec. = 875\,c''\,dec.$$

Also sind

48 c′ 1512 c″ dd = 48,875 c′.

Sind außer den dd. Kubikzoll noch dd. Kubik-Linien zu verwandeln, so macht man die dd. Kubik-Zoll ebenfalls zu dd. Kubik-Linien, multiplizirt die Gesammtanzahl von dd. Kubik-Linien (weil 1 c′ = 1000 × 1000 oder 1000000 c‴ dec. = 1728 × 1728 oder 2985984 c‴ dd hat) mit 1000000 und dividirt mit 2985984.

Z. B. 112 c′ 1228 c″ 864 c‴ dd. in dec. Maß verwandeln.

$$1228\,c'' \; 864\,c''' = 1228 \times 1728 + 864\,c'''\,dd$$
$$= 2122848\;c'''\;dd,$$

$$2122848\,c'''\,dd = 2122148 \times \frac{1000000}{2985984}\,c''\,dec.$$
$$= 710937{,}5\;c'''\;dec.$$

Also sind

$112\;c'\;1228\;c''\;864\;c'''\;dd = 112\;c'\;710\;c''\;937{,}5\;c'''\;dec. = 112{,}7109375\;c'.$

Sind umgekehrt 112,7109375 c′ in dd. Maß zu verwandeln, so multiplizirt man den Duodecimalbruchtheil von c′ 0,7109375 (weil der c′ 1728 c″ dd hat) mit 1728, die Ganzen des Produkts sind dd. Kubikzoll, der Decimalbruchtheil des Produkts wieder mit 1728 multiplizirt, gibt die dd. Kubik-Linien.

$$0{,}7019375\;c' = 0{,}710375 \times 1728\;c''\;dd$$
$$= 1228{,}5\;c''\;dd,$$

$$0{,}5\;c''\,dd = 0{,}5 \times 1728\;c'''\,dd = 864\;c'''\,dd.$$

Also sind

$112{,}7109375\;c' = 112\;c'\;1228\;c''\;864\;c'''\;dd$ wie oben. —

58. Vergleichung und Verwandlung der verschiedenen landesüblichen Maße und Gewichte. — Man vergleicht die Maße und Gewichte der einzelnen Länder am besten mit dem französischen Maß- und Gewichtssystem, welches das „metrische" heißt, weil es auf den Meter gegründet ist. Folgende Tabelle gibt eine Vergleichung der wichtigsten örtlichen Längen-, Flächen- und Körpermaße in Theilen des Meters, □ Meters und Kubikmeters, endlich das Gewicht eines Kubikfußes Wassers, den Kubikfuß und die Pfunde im betreffenden ortsüblichen Maße ausgedrückt.

Tabelle zur Vergleichung der landesüblichen Maße und Gewichte.

Ort	1 Fuß = □ Meter	1 □ Fuß = □ Meter	1 Kub. Fuß = Kub. Meter	1 Pfund = Kilogramm.	1 Kub. Fuß Wasser wiegt Pfunde
Baden*)	0,30000	0,09000	0,02700	0,50000	54,4
Bayern	0,29186	0,08518	0,02486	0,56001	44,4
Braunschweig	0,28536	0,08143	0,02324	0,46745	49,7
Cassel	0,28491	0,08117	0,02313	0,48405	47,8
Darmstadt	0,25000	0,06250	0,01563	0,50000	31,25
Dresden	0,28326	0,08024	0,02273	0,46693	48,7
Hannover	0,29199	0,08526	0,02489	0,48960	50,8
London	0,30479	0,09290	0,02832	0,45341	62,4
Paris	0,32484	0,10550	0,03428	0,48951	70,0
Preußen	0,31385	0,09850	0,03092	0,46771	66,0
Wien	0,31610	0,09992	0,03159	0,56001	56,4
Württemberg	0,28649	0,08208	0,02351	0,46992	50,0

*) Auch das neue schweizerische Maß und Gewicht.

Um bei der Verwandlung von Maß und Gewicht sicher zu gehen, darf man auch wieder nur im Auge behalten, daß eine und dieselbe Länge mit zweierlei Maßstäben gemessen verschiedene Resultate giebt, daß aber das Resultat um so größer seyn muß, je kleiner der Maßstab ist, und umgekehrt. Ist z. B. ein Gebäude 408 Wiener Fuß lang, und wird dessen Länge mit dem bayer. Fuß gemessen, so wird eine größere Anzahl von Fußen herauskommen, weil der bayer. Fuß kleiner ist, als der Wiener Fuß, und zwar wird eine gerade in demselben Verhältniß größere Anzahl von Fußen herauskommen, als der bayerische Fuß kleiner ist, als der Wiener Fuß. Die Tabelle zeigt, daß der bayer. Fuß = 0,29186 Meter, der Wiener Fuß aber 0,31610 Meter beträgt. Der bayer. Fuß verhält sich also zum Wiener Fuß wie 0,29186 : 0,31610, oder wie 29186 : 31610. Sollen daher 408 Wiener Fuß in bayer. Fuß verwandelt werden, so muß die Anzahl der Wiener Fuße vermehrt werden im Verhältniß von 29186 zu 31610, man muß also die gegebene Anzahl von Wiener Fußen mit der größern der beiden Zahlen multipliziren und mit der kleinern dividiren. Es sind daher

$$408 \text{ Wiener Fuß} = 408 \times \frac{31610}{29186} \text{ bayer. Fuß}$$

$$= 441{,}88 \text{ bayer. Fuß.}$$

Weil sich die Flächeninhalte ähnlicher Figuren verhalten wie die Quadrate der Seiten und die Kubikinhalte ähnlicher Körper wie die Kubusse der Seiten, so müssen bei der Verwandlung von Flächenmaßen die Verhältnißzahlen der Längenmaße mit ihrem Quadrat, und bei der Verwandlung von Körpermaßen mit ihrem Kubus oder Würfel in Rechnung genommen werden.

So sind

$$408 \text{ Wiener } \square \text{ Fuß} = 408 \times \frac{31610^2}{29186^2} \text{ bayer. } \square \text{ Fuß}$$

$$= 478{,}58 \ \square' \text{ bayer. und}$$

$$408 \text{ Wiener Kub. Fuß} = 408 \times \frac{31610^3}{29186^3} \text{ bayer. Kub. Fuß}$$

$$= 518{,}33 \text{ bayer. Kub. Fuß.}$$

Zur größeren Erleichterung der Rechnung sind jedoch in der zweiten Columne die Quadrate und in der dritten die Kubusse oder Würfel der in der ersten Columne stehenden Verhältnißzahlen schon berechnet, und man darf also nur diese einfach in Rechnung nehmen. Nach der zweiten Zahlen-Columne sind daher

$$408 \text{ Wiener Fuß} = 408 \times \frac{9992}{8518} \text{ bayer. } \square \text{ Fuß}$$

$$= 478{,}58 \text{ bayer. } \square \text{ Fuß.}$$

und nach der dritten Columne

$$408 \text{ Wiener Kub. Fuß} = 408 \times \frac{3159}{2486} \text{ bayer. Kub. Fuß}$$

$$= 518{,}33 \text{ bayer. Kub. Fuß.}$$

Um also ein gegebenes Längen-, Körper-, Flächen- oder Gewichtmaß mit Hilfe der Tabelle zu verwandeln, multiplizirt man das gegebene Maß einfach mit der ihm zugehörigen Zahl aus der entsprechenden Columne der Tabelle, und dividirt das Produkt mit der entsprechenden Zahl desjenigen Maßes, in welches das gegebene Maß verwandelt werden soll. So sind z. B.

$$1200 \text{ Londoner Fuß} = 1200 \times \frac{0{,}30479}{0{,}32474} \text{ Pariser Fuß,}$$

$$6000 \text{ badische } \square \text{ Fuß} = 6000 \times \frac{0{,}09}{0{,}08518} \text{ bayer. } \square \text{ F.,}$$

$$100 \text{ preuß. Kub. Fuß} = 100 \times \frac{0{,}03092}{0{,}02351} \text{ württemb. c}'$$

$$1 \text{ engl. Pfund} = 1 \times \frac{0{,}45341}{0{,}56001} \text{ bayer. Pfund}$$

u. s. w.

59. Von den verjüngten Maßstäben.

Man nennt den Maßstab eines Planes 1000 theilig, wenn jede im Plan enthaltene Linie 1000 mal kleiner ist, als die entsprechende Linie in der Wirklichkeit, oder wenn 1000 Fuß natürliche Größe im Plan durch 1 Fuß vorgestellt werden. Ein Maßstab heißt 75 theilig, wenn 75′ natürliche Größe im Plan durch 1′ vorgestellt werden, u. s. w.

Um einen beliebigen Maßstab zu verfertigen, hat man nur zu untersuchen, wie groß für den verlangten Maßstab 10′ natürliche Größe auf dem Plan zu erscheinen haben.

Um z. B. einen 100 theiligen Maßstab anzufertigen, setzt man an

100′ natürl. Größe geben 1′ auf dem Plan

10′ 〃 〃 〃 $\frac{1'}{10}$ 〃 〃 〃 = 0,1′ = 1 Dec. Zoll.

Nimmt man also 1″ (dec) bayer. und theilt diesen durch Transversalen (Querlinien) in 10, 100 gleiche Theile, so hat man den 100 theiligen bayer. Maßstab.

Um einen 75 theiligen Maßstab anzufertigen, setzt man an:

75′ natürl. Größe geben 1′ auf dem Plan, also
150′ 〃 〃 〃 2′ 〃 〃 〃
200′ 〃 〃 〃 4′ 〃 〃 〃

30′ natürl. Größe geben $0{,}4' = 4''$ dec.

10′ „ „ „ $\frac{0{,}4'}{3} = \frac{4''}{3}$ „

Nimmt man also 4 bayer. dec. Zoll und theilt diese in 3 gleiche Theile, so gibt ein solcher Theil, durch Transversalen in 10, 100 gleiche Theile getheilt, den 75 theiligen bayer. Maßstab.

So werden vorgestellt, beim

5000	theil.	Maßstab	100′	natürl.	Gr.	durch	2‴	dec.
2500	„	„	100′	„	„	„	4‴	„
1000	„	„	100′	„	„	„	1″	„
500	„	„	10′	„	„	„	2‴	„
250	„	„	10′	„	„	„	4‴	„
100	„	„	10′	„	„	„	1″	„
50	„	„	1′	„	„	„	2‴	„

u. s. w.

Die Steuerblätter, welche die bayer. Landesvermessung enthalten, sind im 5000 theil. Maßstab aufgetragen, die Pläne der Städte und Märkte im 2500 theil. Maße, also noch einmal so groß. Das Steuerblatt ist ein Quadrat von 8000′ Seite, und enthält eine Fläche von 1600 bayer. Tagwerk.

Der vorschriftsmäßige Maßstab für die Anfertigung der Grundpläne für Gebäude ist der 100 theilige.

Will man einen ausländischen Maßstab anfertigen, so untersucht man, wie groß der ausländische Fuß in inländischem Maß erscheint, und verfährt mit dem sich ergebenden Maß wie mit dem inländischen Fuß. Um z. B. einen österreichischen Maßstab anzufertigen, setzt man an

$$1' \text{ österr. Fuß} = 1 \times \frac{0{,}31610}{0{,}29186} \text{ bayer. Fuß}$$

$$= 1{,}0830 \text{ bayer. Fuß.}$$

1 Fuß $8\frac{3}{10}$ Linien (dec) bayer. geben also den österr. Fuß, und folglich 1 Zoll $\frac{8}{10}$ Linien (dec) durch Transversalen in 10, 100 gleiche Theile getheilt, gibt den österr. 100 theil. Maßstab.

60. Construktion des Transversalmaßstabs. Ist ein beliebiger Transversalmaßstab, z. B. der 100 theilige, als der gebräuchlichste, zu construiren, so ziehe man auf einem starken Zeichnungspapier in einer gleichen Entfernung von ohngefähr $1\frac{1}{2}$ Dec. Linien (Taf. I. Fig. 1.) 11 Parallellinien, 0—10, 1—1, 2—2, ... 9—9, 0—10, von ohngefähr 5—6 Zoll Länge, und senkrecht zu diesen in einer gleichen Entfernung von 1 Dec. Zoll die Querlinien 10—10, 0—0, 10—10, 20—20, u. s. w., so daß der Maßstab in lauter Rechtecke von der angenommenen Breite des Maßstabs und genau derselben Höhe (hier 1 Dec. Zoll) eingetheilt wird. Das oberste Rechteck wird nun in das in der Figur dargestellte Gitter getheilt, indem die beiden Seiten 0—10 in 10 gleiche Theile (jeder 1 Dec. Linie) eingetheilt, die Theilpunkte von unten nach oben mit 0—10 numerirt und die schrägen Querlinien (Transversalen) 0—1, 1—2, 2—3, ... 8—9, 9—10 mit möglichster Genauigkeit parallel gezogen werden. Die senkrechten Parallellinien werden noch, wie in der Figur, auf den Horizontallinien 0—0 und 10—10 mit 1 bis 9 numerirt, die horizontalen Querlinien von oben herab mit 10—10, 0—0, 10—10, 20—20, 30—30, u. s. w. bezeichnet, alle Linien möglichst scharf und schwarz ausgezogen, die Mittellinie 5—5, ohne die Durchschnittspunkte zu verundeutlichen, mit Sternchen bezeichnet, und der Transversalmaßstab ist fertig.

Sind die senkrechten Parallellinien genau parallel (was dadurch erreicht wird, daß man ihre Entfernungen am obern und untern Ende des Maßstabs quer aufträgt und durch die Theilpunkte die Linien durchzieht), sind die horizontalen Querlinien genau darauf senkrecht, und die Transversalen ebenfalls genau parallel und gleich weit von einander entfernt, so müssen die entstehenden kleinen Parallelogramme m n o p, q r s t u. s. w. alle genau gleich groß seyn, was eine Prüfung für die Richtigkeit des Maßstabes darbietet.

Die Entfernung der 11 vertikalen Parallellinien ist ganz beliebig, doch wird man sie, um den Maßstab nicht zu breit oder zu schmal zu machen, nicht viel größer oder kleiner annehmen, als in der Figur.

Wird der Maßstab viel gebraucht, so ist es gut, denselben auf ein ausgetrocknetes Brettchen von gleicher Größe zu kleben, in diesem Fall ist es jedoch wegen der Ausdehnung des Papiers vortheilhafter, denselben erst nach geschehener Aufklebung des Papiers aufzutragen.

Weil beim 100theiligen Maßstab 10 Fuß durch 1 Zoll vorgestellt werden, so ist also die Entfernung ab, bc der horizontalen Querlinien 10 Fuß; die Entfernung m o, q s der Transversalen der zehnte Theil davon, also 1 Fuß; und die zwischen der Horizontalen 0 — 0 und der Transversalen 0 — 1 abgeschnittenen Stückchen der mittleren 9 senkrechten Parallelen sind nach einander 1″, 2″, 3″, ... 9″, das Stückchen ax ist also = 3″, das Stückchen dy = 7″. Es ist also:

ax = 3″ und xo = 0—4 = 4′

bx = 10′ 3″ „ ao = 4′ 3″

cx = 20′ 3″ und bo = 14′ 3″

„ co = 24′ 3″

Ebenso ist:

dy = 7″ „ ys = 0 — 6 = 6′

ey = 10′ 7″ „ ds = 6′ 7″

fy = 20′ 7″ „ es = 16′ 7″

„ fs = 26′ 7″

u. s. w.

61. Gebrauch des Transversalmaßstabes. Die horizontalen Linien 0—0, 10—10, 20—20, 30—30 u. s. w. geben also die Zehner oder je 10 Fuß, die Transversalen 0—1, 1—2, 2—3, u. s. w. 9—10, die Einer oder die Fuße, die Vertikalen 1—1, 2—2, ... 9—9, die Zehntel oder die Zoll an. Ist also irgend ein in Zahlen gegebenes Maß, z. B. 32′ 9″ oder 32,9 auf dem Transversalmaßstab abzugreifen, so setzt man die eine Zirkelspitze auf der Horizontalen 30—30 der 3 Zehner, und gleichzeitig auf der Vertikalen 9—9 der 9 Zolle, also in v ein, und öffnet den Zirkel bis zur Transversalen 2—3 der 2 Einer oder der 2 Fuße, so daß also vu das verjüngte Maß für 32′ 9″ im 100theiligen Maßstab ist.

Umgekehrt, hat man irgend eine Linie gemessen, und trifft beim Abgreifen die eine Zirkelspitze in f, die andere in q, so gibt dieß, weil f in der Horizontalen der 20—20 liegt, 20′, ferner weil q der 7ten Transversalen angehört, 7′ und endlich weil f und q in der 7ten Vertikalen liegen, 7″, so daß also

$$fs = 20' + 7' + 7'' = 27'\ 7''$$

im 100theiligen Maßstabe sind.

Ist ein anderer Maßstab, z. B. der 75theilige zu construiren, so verfährt man ebenso, nur ist bei derselben Breite des Maßstabs die Entfernung der horizontalen Querlinien 0—0, 10—10 u. s. w. statt 1 Zoll = $\frac{4}{3}$″ dec. wie früher gezeigt, zu nehmen, im Uebrigen aber das Gitter von $\frac{4}{3}$″ dec. Höhe gerade so einzutheilen und zu numeriren. Die punktirten Horizontallinien in der Figur geben die Anlage des 75theiligen Maßstabes an.

Transversalmaßstäbe und ihr Gebrauch haben das Nachtheilige, daß bei häufigem Abgreifen von Maßen Maßstab und Pläne (letztere besonders beim Auftragen) durch die Zirkelspitzen Noth leiden. Vortheilhafter sind daher die sogenannten prismatischen Maßstäbe (Fig. 2) von 6—7″ Länge, welche auf den beiden oberen Seiten genau und durchaus in Fünftel-Decimal-Linien eingetheilt, mit ihrer untern Seite nur auf das Papier an eine Linie angelegt zu werden brauchen, um jedes beliebige Maß ohne Hilfe eines Zirkels bei gleicher und unter Umständen noch größerer Genauigkeit als mittelst des Zirkels, abzulesen und aufzutragen. Sie verdienen allgemein eingeführt zu werden, und der Bautechniker wird sich insbesondere bei Anfertigung von Plänen und Kostenanschlägen derselben mit großem Vortheil und Zeitersparniß bedienen.

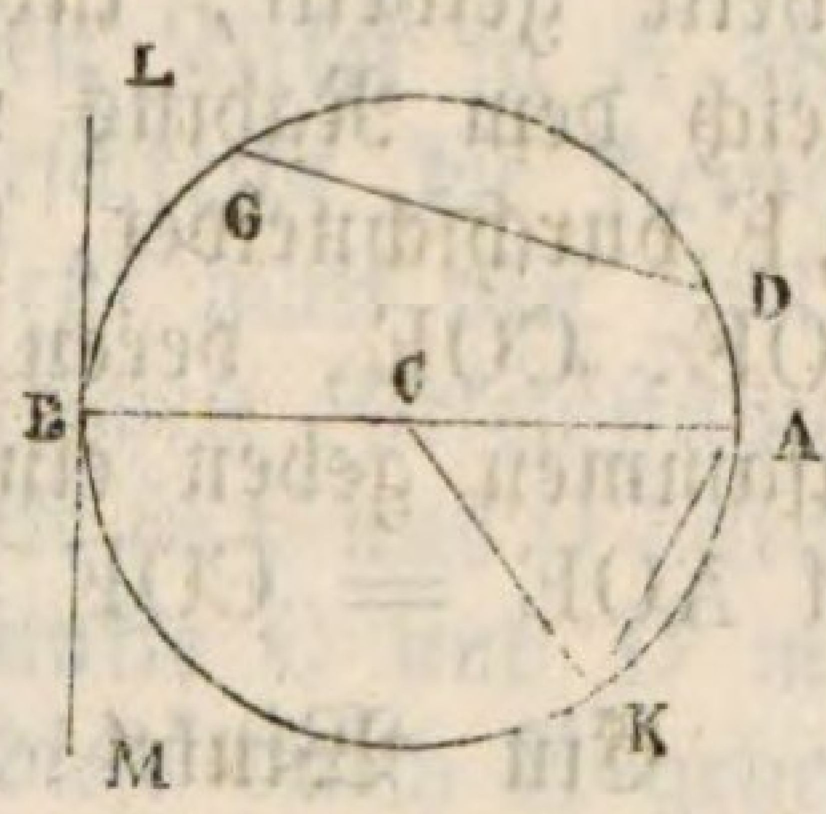
Das mechanische Institut von Ertel und Sohn in München liefert solche prismatische Maßstäbe von hartem Holz, 7 Dec.-Zoll lang, für jedes beliebige in- oder ausländische Maß mit großer Vollkommenheit bis auf $^1/_5$ Linie durchaus eingetheilt um den mäßigen Preis von 2 fl. 6 kr.; solche von 1 Fuß Länge durchaus in Fünftel-Decimallinien eingetheilt um 3 fl.

Drittes Kapitel.

Geometrie.

Die wichtigsten Lehrsätze über die im Bauwesen vorkommenden Linien, Flächen und Körper.

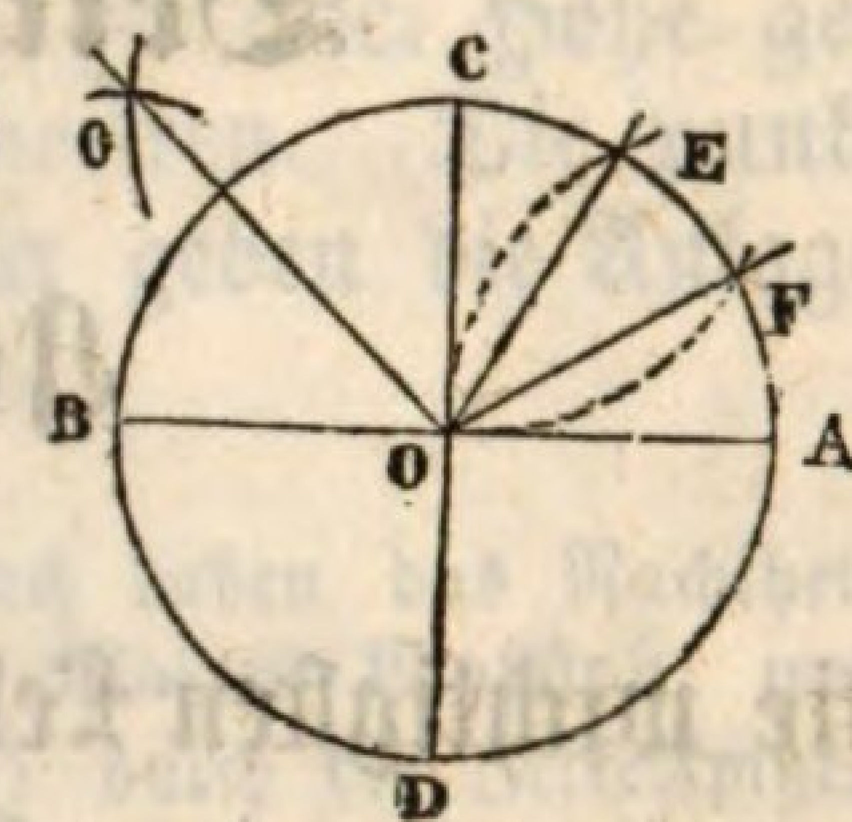
62. Vom Kreis. Der Kreis ist eine in sich selbst zurückkehrende krumme Linie, deren Punkte alle die Eigenschaft haben, daß sie von einem andern Punkte (dem Mittelpunkt) gleichweit entfernt sind. Die krumme Linie selbst heißt der Kreisumfang (Peripherie), eine Gerade CA, CK



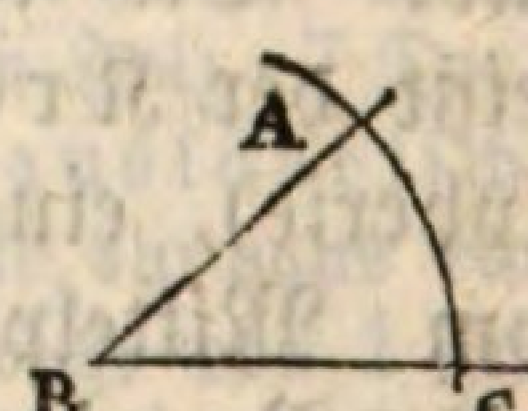
vom Mittelpunkt zum Umfang (die Zirkelöffnung) heißt Radius oder Halbmesser, eine Gerade DG oder AK von einem Punkt des Umfangs bis zum andern, Sehne, und eine Sehne AB welche durch den Mittelpunkt geht, Durchmesser. Eine Gerade LM welche mit dem Kreis nur einen Punkt B gemeinschaftlich hat, heißt Tangente (Berührungslinie); sie steht auf dem zugehörigen Radius CB senkrecht.

63. Der Kreisumfang wird in 360 gleiche Theile getheilt, und ein solcher Theil heißt ein Grad (1°).

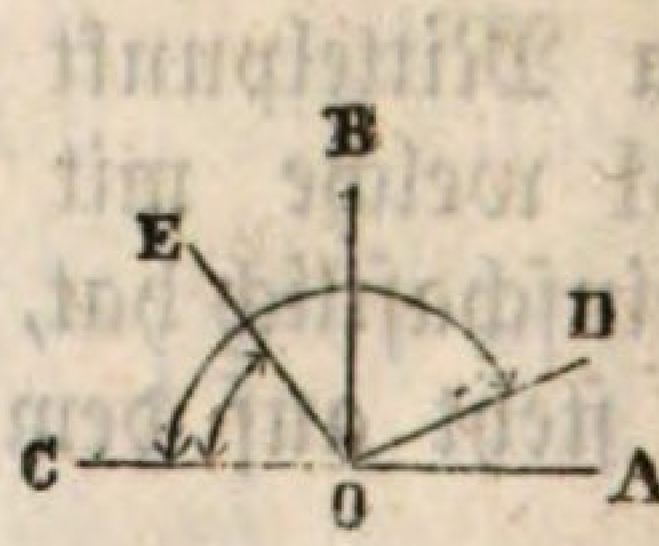
Der Grad wird wieder in 60 gleiche Theile, welche man Minuten ('), und jede Minute wird in 60 gleiche Theile getheilt, die man Sekunden ('') nennt.



Zieht man in einem Kreis einen Durchmesser AB und einen zweiten CD darauf senkrecht, so wird der Umfang in 4 gleiche Theile getheilt. Jeder dieser Viertelskreise AC, CB, BD, DA hält folglich 90°. Der rechte Winkel AOC = COB hat also 90°. Halbirt man einen Viertelkreis CB in D, so entstehen 2 halbrechte Winkel COG und BOG, deren jeder 45° enthält. Wird der rechte Winkel AOC in 3 gleiche Theile getheilt, indem man mit einer Zirkelöffnung gleich dem Radius von A aus in E, und von C aus in F durchschneidet, so entstehen 3 gleiche Winkel AOF, FOE, COE, deren jeder 30° enthält. Zwei solche zusammen geben einen Winkel von 60°, z. B. Winkel AOE = COF = 60°.



Ein Winkel ABC wird gemessen, wenn man mit einem beliebigen Radius BA = BC von der Spitze B des Winkels einen Kreisbogen AC beschreibt, und untersucht, wie viel Grade, Minuten, Sekunden derselbe mißt.



Ein Winkel heißt spitz, wenn er kleiner ist als ein rechter, stumpf, wenn er größer ist, als ein rechter. EOC ist ein spitzer, DOC ein stumpfer Winkel.

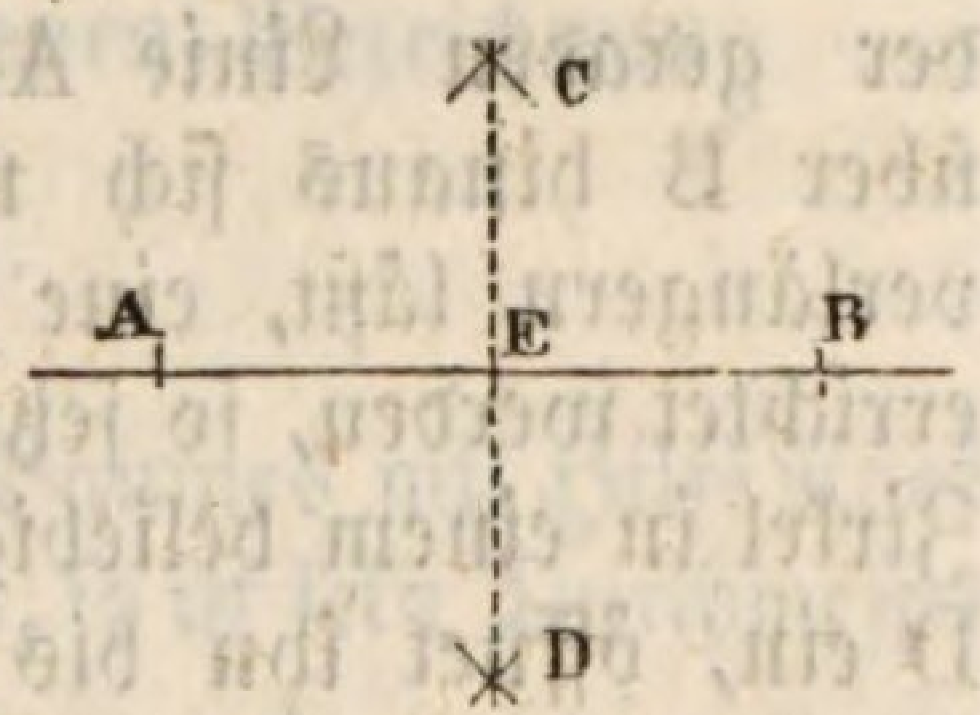
Die Winkel COE und AOE werden Neben=

winkel genannt; ebenso sind AOD und DOE Nebenwinkel.

Ein rechter Winkel ist einer von zwei gleichen Nebenwinkeln.

Aufgaben über den rechten Winkel.

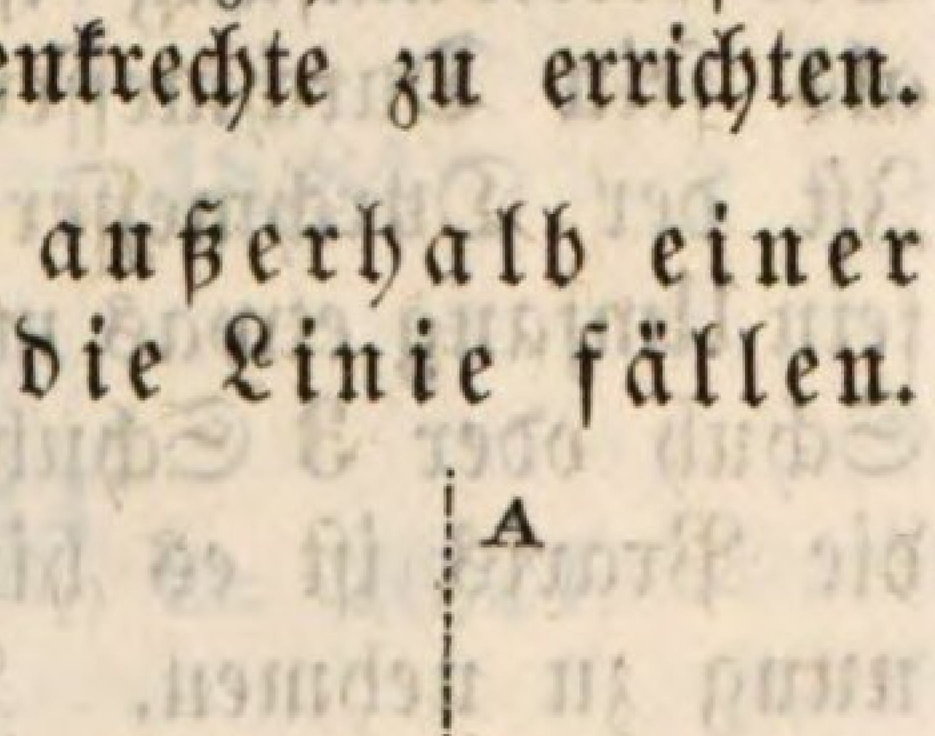
64. In einem beliebigen Punkt einer Linie eine Senkrechte errichten.



Ist AB die gegebene Linie und soll in E eine Senkrechte errichtet werden, so setzt man die eine Zirkelspitze in E ein, und schneidet mit der andern rechts und links die gleichen Stücke EA und EB ab. Hierauf setzt man den Zirkel in A ein, öffnet ihn beliebig weit und beschreibt die kleinen Bogenstücke bei C und D; dann setzt man den Zirkel in B ein und schneidet mit der gleichen Zirkelöffnung die vorhin beschriebenen Bogenstücke in C und D durch. Verbindet man nun die Schnittpunkte C und D mit einer geraden Linie CD, so wird diese durch E gehen und auf AB senkrecht stehen.

Die gleiche Construktion dient dazu, um auf der Mitte E einer Linie AB eine Senkrechte zu errichten.

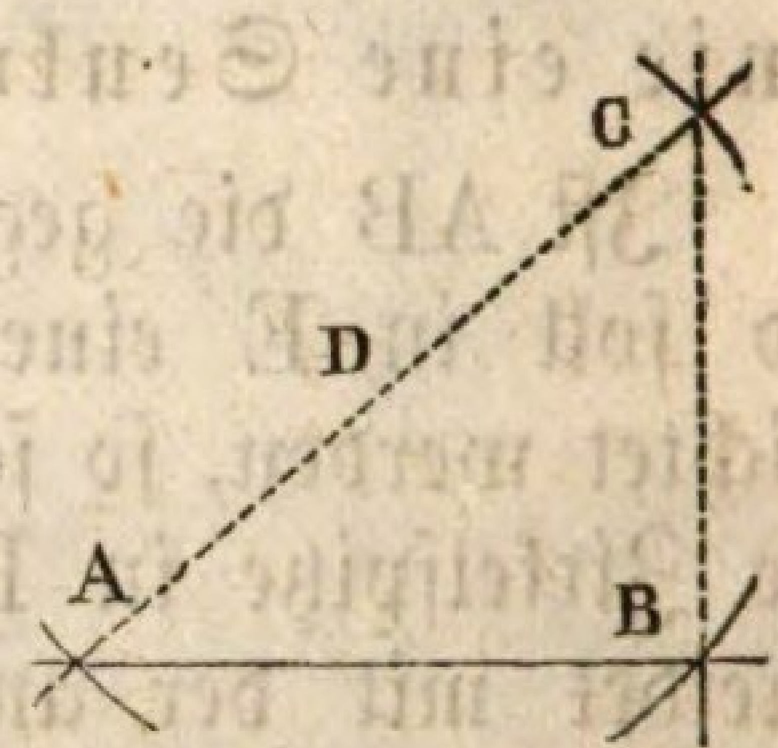
65. Von einem Punkt außerhalb einer Linie eine Senkrechte auf die Linie fällen.



Ist A der Punkt, von welchem eine Senkrechte auf die Linie BC gefällt werden soll, so beschreibt man von A aus als Mittelpunkt mit dem Zirkel einen Kreisbogen BDC, welcher die

Linie BC in B und C schneidet; beschreibt man dann von B und C aus mit demselben Radius zwei Bögen unterhalb BC, welche sich in D schneiden, und verbindet man A mit D durch eine gerade Linie AD, so steht diese Linie AD in E auf der Linie BC senkrecht.

66. Am Ende einer geraden Linie eine Senkrechte errichten.



Soll an dem Endpunkt A der geraden Linie AB, welche über B hinaus sich nicht mehr verlängern läßt, eine Senkrechte errichtet werden, so setzt man den Zirkel in einem beliebigen Punkt D ein, öffnet ihn bis B und beschreibt einen Kreisbogen ABC, welcher die Linie AB in A und B schneidet. Verbindet man nun den Schnittpunkt A mit dem Mittelpunkt D durch eine gerade Linie AD, verlängert man diese bis sie den Kreisbogen in C schneidet, und verbindet man den Schnittpunkt C mit B durch eine gerade Linie, so steht diese Linie CB in B auf AB senkrecht.

67. Berechnung des Kreisumfanges. Der Kreisumfang ist etwas mehr als 3mal so groß als sein Durchmesser, genauer 3,1416mal so groß. Ist der Durchmesser eines Kreises 1 Schuh, so ist sein Umfang etwas mehr als 3 Schuh, genauer 3,1416 Schuh oder 3 Schuh 1 Zoll $4\frac{16}{100}$ Linien (dec.). Für die Praxis ist es hinreichend die Zahl 3,14 in Rechnung zu nehmen. Daher die Regel:

Man findet den Umfang eines Kreises, wenn man den Durchmesser mit 3,14 multiplizirt.

Bezeichnet d den Durchmesser eines Kreises und u den Umfang, so ist der Umfang

$$u = 3,14 \times d.$$

Ist z. B. der Durchmesser einer runden Säule 3′, so ist deren Umfang $u = 3,14 \times 3 = 9,42'$.

Umgekehrt wird aus dem Umfang eines Kreises sein Durchmesser gefunden, wenn man den Umfang mit 3,14 dividirt.

Oder nach der angenommenen Bezeichnung

$$d = \frac{u}{3,14}.$$

Ist z. B. der Umfang eines Baumes mit Hilfe eines Fadens 5′ groß gefunden worden, so ist sein Durchmesser

$$d = \frac{5}{3,14}' = 1,59' \text{ oder fast } 1' \; 6'' \text{ (dec.)}$$

68. Uebungsbeispiele.

1. Beispiel. Ein halbkreisförmiges Tonnengewölbe hat 12′ Durchmesser im Lichten und 1′ Gewölbstärke, welches ist sein innerer, sein mittlerer und sein äußerer Gewölbeumfang?

Antwort. Der innere Umfang u ist:

$$u = \frac{12 \times 3,14}{2} = 18,84'$$

Der mittlere Umfang u′ ist:

$$u' = \frac{(12 + 1) \times 3,14}{2} = 20,21'$$

Der äußere Umfang ist:

$$u'' = \frac{(12 + 2) \times 3,14}{2} = 21,98'.$$

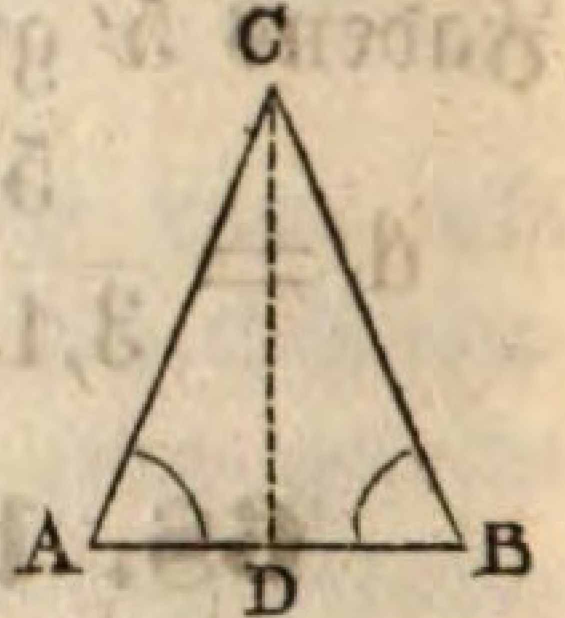
2. Beispiel. Der Umfang der Erde ist durch unmittelbare Messung einzelner Bogenstücke des Umfangs zu 5400 geogr. Meilen gefunden worden, wie groß ist hienach der Durchmesser der Erde?

Antwort: $\frac{5400}{3,1416} = 1719$ Meilen.

69. Vom Dreieck. Ein Dreieck ABC heißt gleichseitig oder regelmäßig, wenn in demselben alle 3 Seiten AB, AC, BC einander gleich sind. In diesem Fall sind auch die 3 Winkel bei A, B und C einander gleich und jeder 60°.

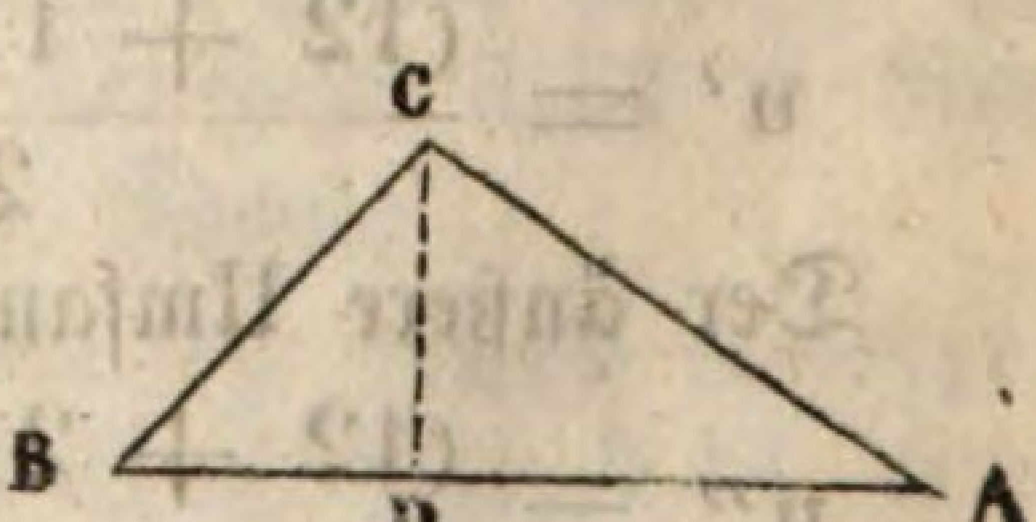


Ein Dreieck ABC heißt gleichschenklig, wenn in demselben 2 Seiten AC und BC einander gleich sind. Die dritte Seite AB heißt Grundlinie. Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel A und B an der Grundlinie ebenfalls einander gleich.

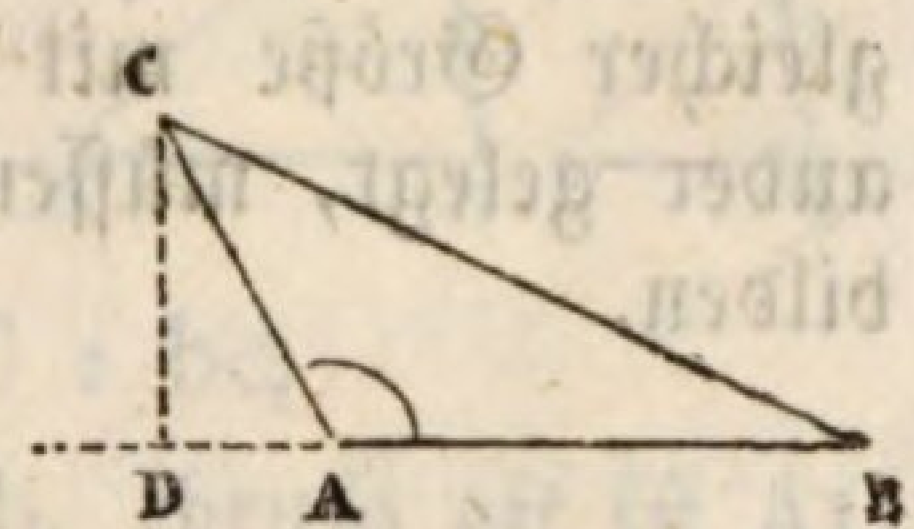


Das Leergespärre eines Dachstuhls ist ein gleichschenkliges Dreieck. Die gleichen Seiten sind die Sparren AC und BC, die Grundlinie ist der Balken AB, und der Winkel A oder B zwischen dem Sparren und dem Balken heißt die Dachrösche. Die Hängsäule CD stellt die Höhe des Dreiecks vor.

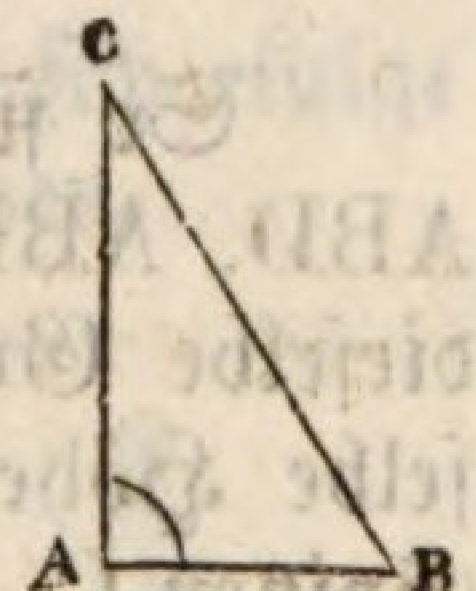
Ein Dreieck ABC heißt ungleichseitig oder unregelmäßig, wenn in demselben alle Seiten und Winkel ungleich sind. Eine Seite desselben, z. B. AB heißt Grundlinie. Fällt man von der Spitze C, welche



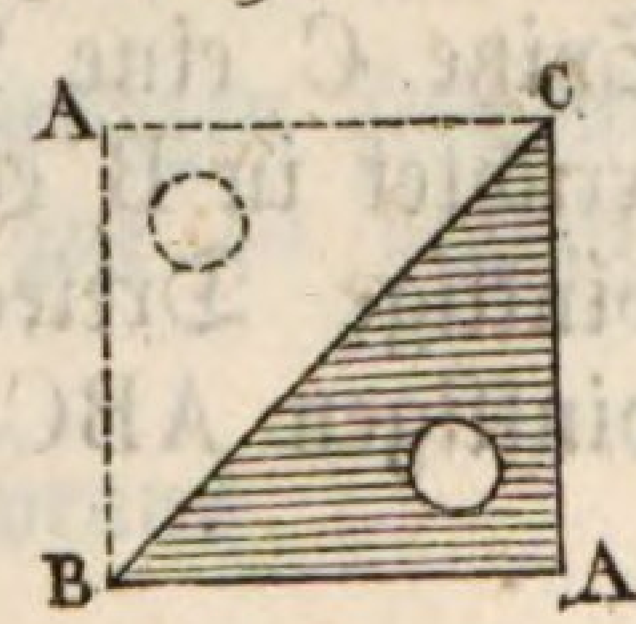
der Grundlinie AB gegenüber liegt, eine Senkrechte CD auf die Grundlinie AB, so heißt diese die Höhe des Dreiecks. Ist ein Winkel A an der Grundlinie stumpf, so muß man, um von der gegenüberliegenden Spitze C die Senkrechte CD auf die Grundlinie AB fällen zu können, diese verlängern, in diesem Fall fällt die Höhe CD außerhalb des Dreiecks ABC.



Ein Dreieck ABC heißt rechtwinklig, wenn ein Winkel A des Dreiecks ein rechter ist. Die beiden Seiten AC und AB des Dreiecks, welche den rechten Winkel einschließen, heißen Katheten, die dritte BC, welche dem rechten Winkel gegenüberliegt, heißt Hypothenuse.



Die hölzernen Dreiecke oder Winkel, welche beim Zeichnen gebraucht werden, sind rechtwinklige Dreiecke. Sie sollen von zweierlei Art seyn. Die der ersten Art sollen so angefertigt seyn, daß die beiden Seiten AB und AC, welche den rechten Winkel A einschließen, einander gleich sind. In diesem Fall sind die beiden spitzen Winkel B und C jeder ein Halbrechter oder 45°, weßhalb sie auch 45°-Winkel genannt werden. Ihrer zwei von gleicher Größe mit der Hypothenuse BC an einander gelegt, müssen ein richtiges Quadrat bilden. Die Dreiecke der zweiten Art sollen die Eigenschaft haben, daß die kleinste

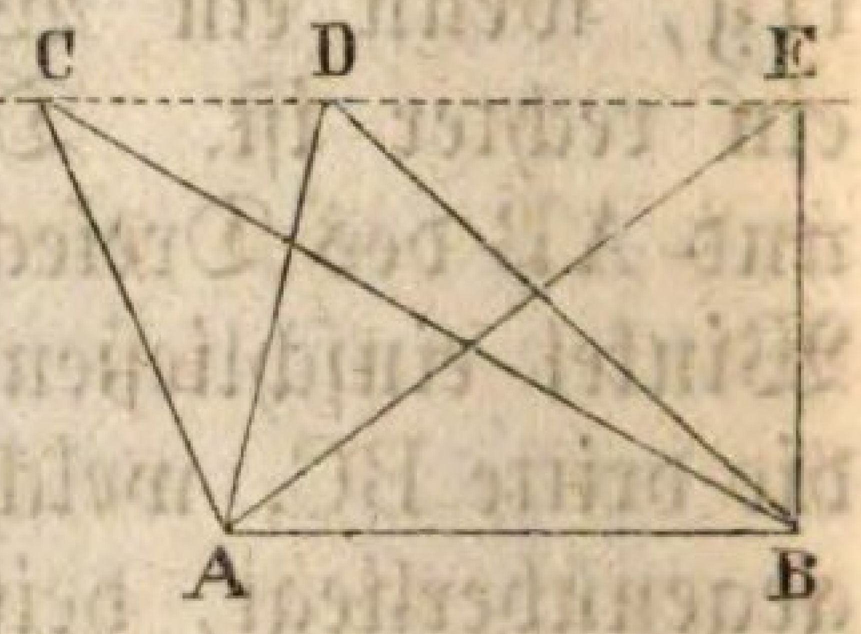




Seite AB genau halb so groß ist, als die größte BC. In diesem Fall wird der spitze Winkel bei C genau halb so groß als der spitze Winkel bei B, ersterer hat nehmlich 30°, letzterer 60°. Zwei solche Dreiecke von gleicher Größe mit der mittleren Seite AC an einander gelegt, müssen ein richtiges gleichseitiges Dreieck bilden.

70. Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind g l e i c h, wenn sie gleiche Grundlinie und gleiche Höhe haben.

So sind die 3 Dreiecke ABC, ABD, ABE gleich groß, weil sie dieselbe Grundlinie AB und dieselbe Höhe EB haben, oder ihre Spitzen C, D, E auf einer Parallelen zur Grundlinie liegen.

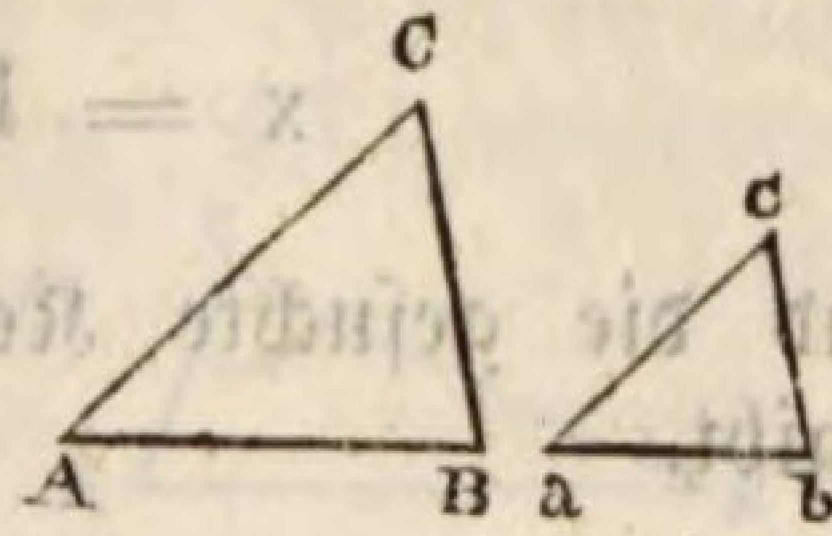


Um daher ein schiefwinkliges Dreieck ABC in ein rechtwinkliges zu verwandeln, zieht man durch die Spitze C eine Parallele CE zur Grundlinie AB und errichtet in B eine Senkrechte BE, dann ist das rechtwinklige Dreieck ABE gleich dem gegebenen schiefwinkligen ABC.

71. Aehnlichkeit der Dreiecke. Wenn in zwei Dreiecken die Winkel beziehungsweise gleich sind, so werden die Dreiecke ä h n l i c h e D r e i e c k e genannt. Von diesen gilt der Lehrsatz:

In ä h n l i c h e n D r e i e c k e n s t e h e n d i e d e n g l e i c h e n W i n k e l n g e g e n ü b e r s t e h e n d e n S e i t e n i n P r o p o r t i o n:

Wenn z. B. in den beiden Dreiecken ABC, abc die Winkel A, a, B, b, C, c beziehungsweise einander gleich sind, so stehen die entsprechenden Seiten beider Dreiecke in Proportion, oder es verhält sich:

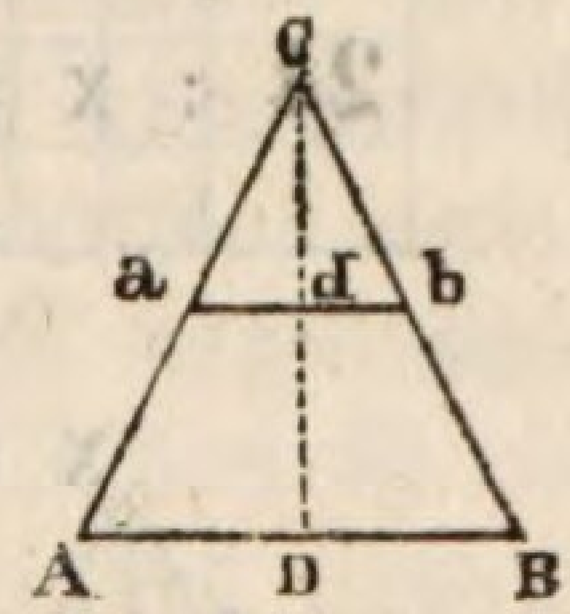


AB : ab = AC : ac = BC : bc,

d. h. so oft AB größer ist als ab, ebenso oft ist AC größer als ac und ebenso oft ist auch BC größer als bc.

72. Von diesem einfachen Satz lassen sich einige nützliche Anwendungen in der Praxis machen.

Ist z. B. ABC das Leergespärre eines Daches, AB der Balken, ab der Kehlbalken, CD die ganze Dachhöhe und Cd die Höhe des Kehlgebälkes; so kann man, wenn die Balkenlänge AB und die beiden Dachhöhen CD und cd gegeben sind, die Länge des Kehlbalkens ab durch Rechnung finden. Die rechtwinkligen Dreiecke BDC und bdc sind nehmlich ähnlich, und es verhält sich daher



BD : bd = DC : dC, woraus

$$bd = \frac{BD \times dC}{DC}$$

gefunden wird.

1. Beispiel. Ist die Balkenlänge AB = 32, die Dachhöhe DC = 20′ und dC = 11 Fuß, so verhält sich, wenn die gesuchte halbe Kehlbalkenlänge bd mit x bezeichnet wird,

$$16 : x = 20 : 11, \text{ woraus}$$

$$x = bd = \frac{16 \times 11}{20} = 8{,}8$$

und die gesuchte Kehlbalkenlänge sich zu 17,6 Fuß ergibt.

2. Beispiel. In einem Kirchendachboden sind 2 Kehlgebälke, das untere steht vom Hauptgebälk 11 Fuß, das zweite vom ersten 10 Fuß, vom Dachfirst aber 9 Fuß ab, wie lang werden die beiden Kehlbalken, wenn der Hauptbalken 48 Fuß lang ist?

Antwort: Für das erste Kehlgebälk ist die halbe Balkenlänge durch die Proportion gegeben:

$$24 : x = 9 + 10 + 11 : 9 + 10$$
$$= 30 : 19, \text{ woraus}$$
$$x = \frac{24 \times 19}{30} = 15{,}2$$

und die Kehlbalkenlänge = 30,4 Fuß folgt.

Für das zweite Gebälk ist

$$24 : x = 9 + 10 + 11 : 9, \text{ woraus}$$

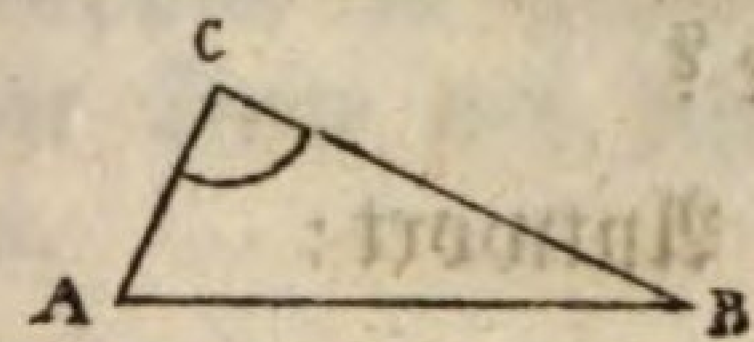
$$x = \frac{24 \times 9}{30} = 7{,}2 \quad \text{und}$$

der zweite Kehlbalken zu 14,4 Fuß Länge sich ergibt.

73. Pythagoräischer Lehrsatz. Um aus zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks die dritte durch Rechnung zu finden, wendet man den pythagoräischen Lehrsatz an. Dieser heißt:

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypothenuse gleich der Summe

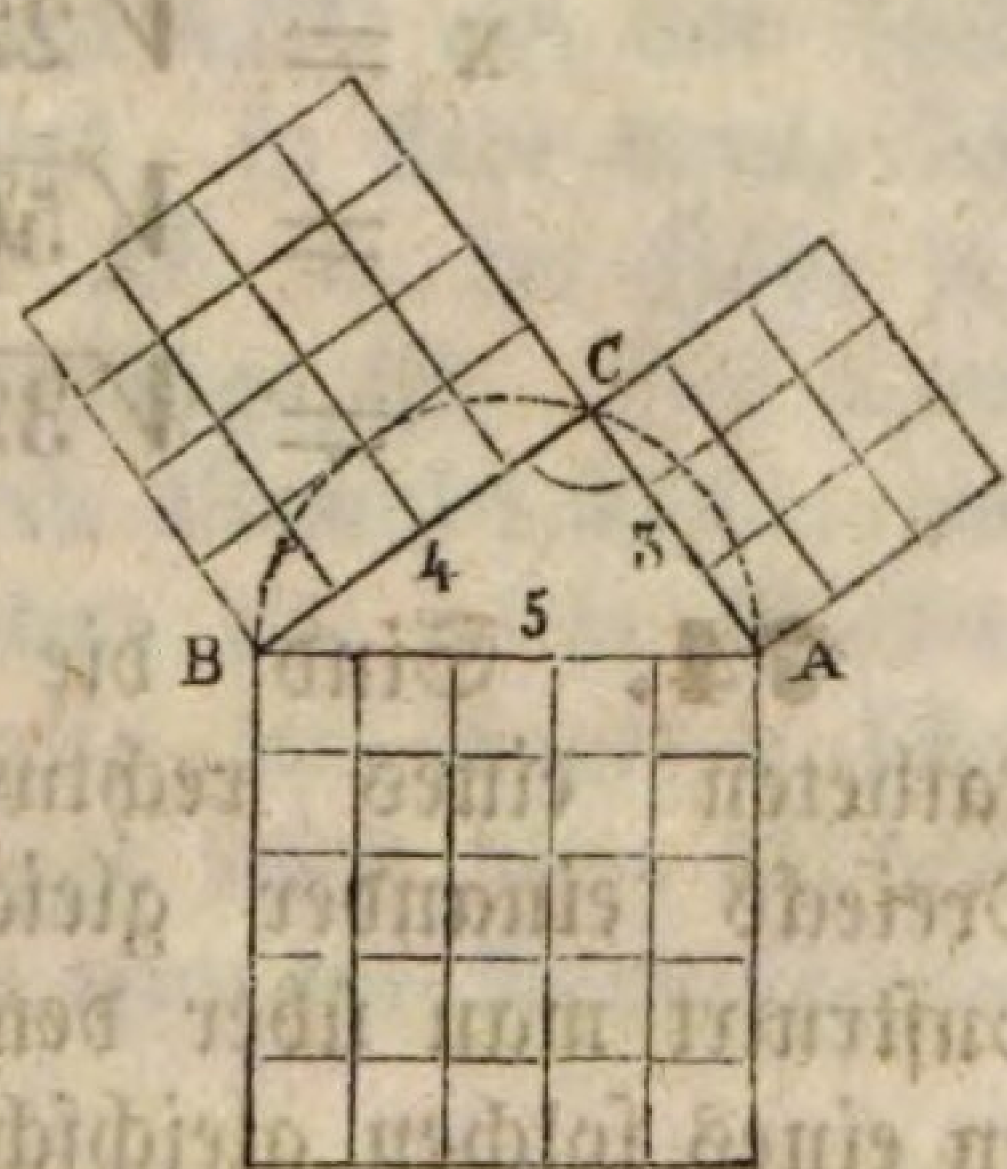
der Quadrate der beiden Katheten. Oder $AB^2 = AC^2 + BC^2$.



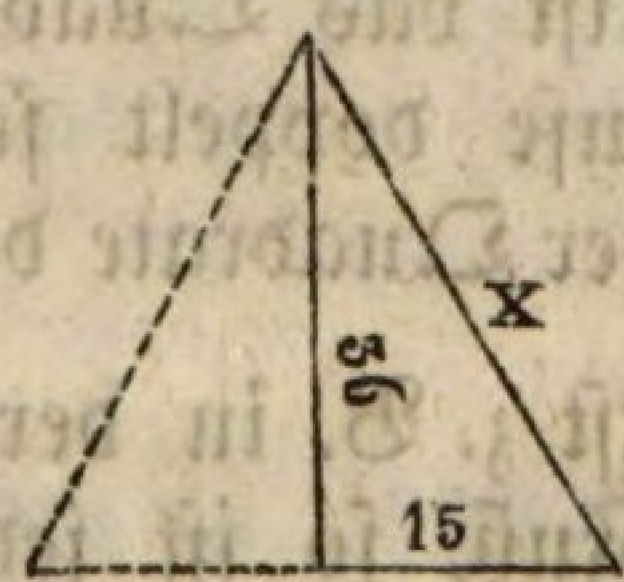
Ist z. B. im rechtwinkligen Dreieck ABC, die kleinere Kathete AC = 3′, die größere 4′, so ist die Hypothenuse AB = 5′, weil

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

oder $25 = 16 + 9$.



Man findet also aus den beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks die Hypothenuse, wenn man jede Kathete ins Quadrat erhebt, die Quadrate addirt und aus der Summe die Quadratwurzel zieht.



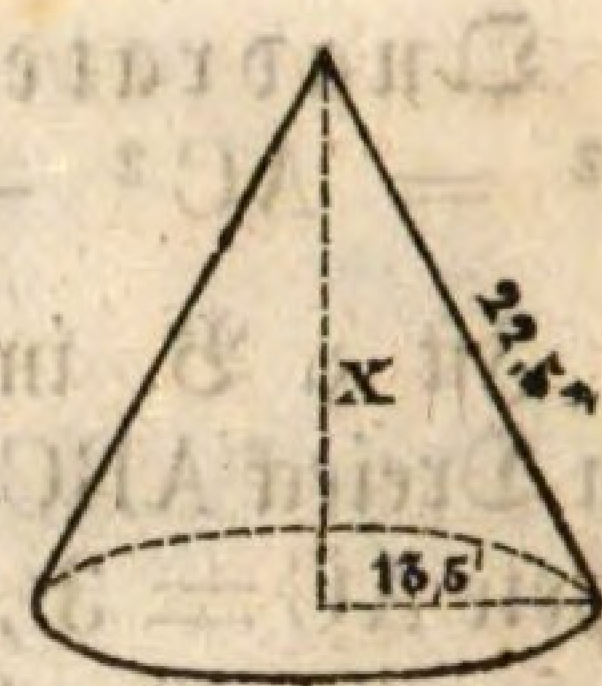
Z. B. die Höhe eines Daches sey 36′, die halbe Breite 15′, welches ist die Länge des Sparrens?

Antwort:

$$x = \sqrt{36^2 + 15^2} = \sqrt{1296 + 225}$$
$$= \sqrt{1521} = 39'.$$

Ist die Hypothenuse und eine der beiden Katheten gegeben, so findet man die andere Kathete, wenn man vom Quadrat der Hypothenuse das Quadrat der gegebenen Kathete abzieht, und aus dem Rest die Quadratwurzel zieht.

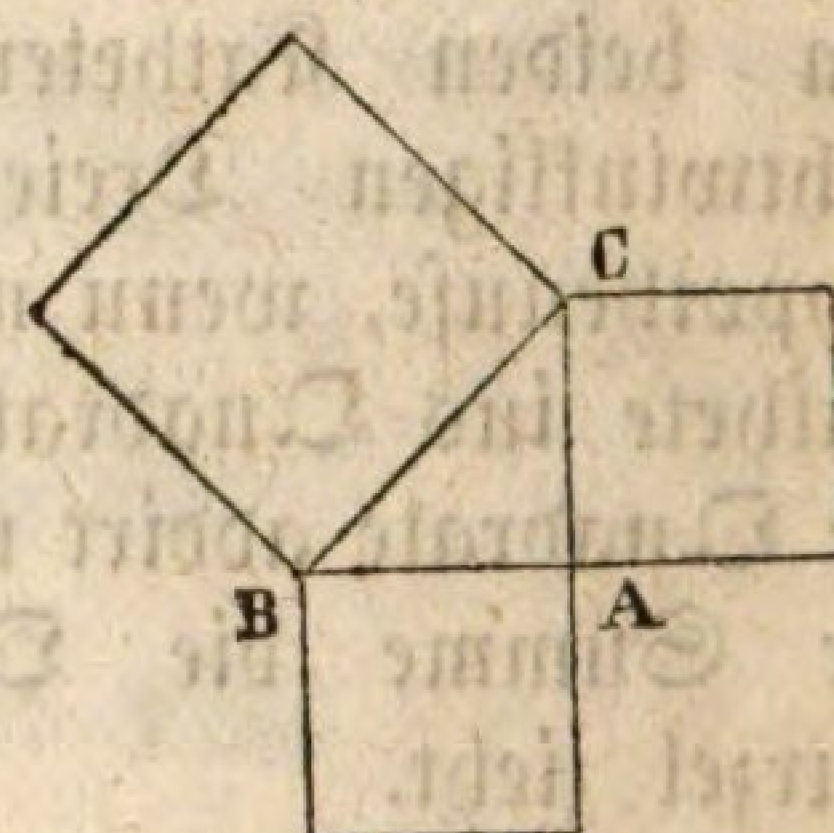
Z. B. Die schiefe Seite eines Kegels sei 22,5′, der Halbmesser der Grundfläche 13,5′, welches ist seine Höhe?



Antwort:

$$x = \sqrt{22{,}5^2 - 13{,}5^2}$$
$$= \sqrt{506{,}25 - 182{,}25}$$
$$= \sqrt{324} = 18'.$$

74. Sind die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks einander gleich, und construirt man über den 3 Seiten eines solchen gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks Quadrate, so ist das Quadrat der Hypothenuse doppelt so groß als jedes der Quadrate der Katheten.



Ist z. B. in der nebenstehenden Figur AB = AC = 1 Fuß, so ist jedes der beiden über AB und AC construirten Quadrate = 1 □Fuß; das Quadrat über der Hypothenuse BC ist alsdann = 2 □Fuß groß.

Da nun nach dem pythagoräischen Lehrsatz

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

ist, so folgt daraus, daß

$$\sqrt{BC^2} = BC = \sqrt{2} = 1{,}414\ldots \text{ ist;}$$

d. h. die Seite des Quadrats, welches den doppelten Inhalt hat, ist $\sqrt{2}$ oder 1,414mal so groß, als die Seite des Quadrates, welches den einfachen

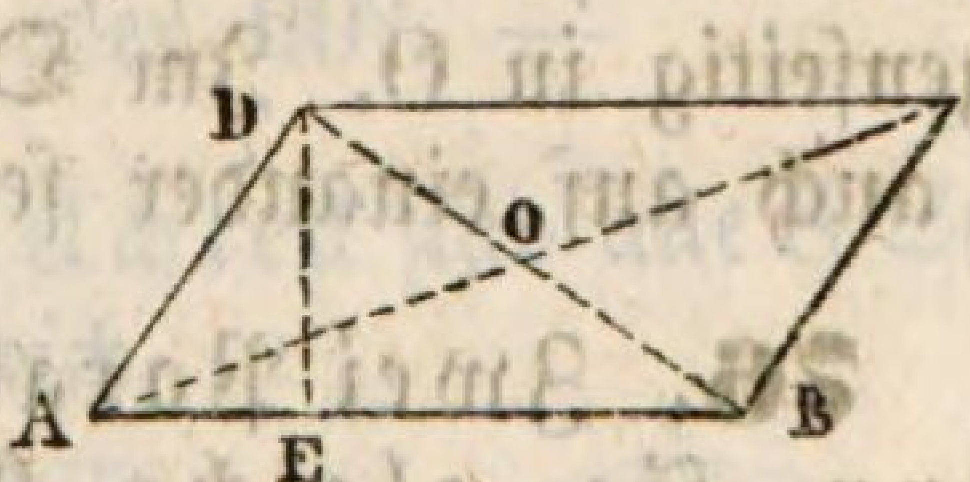
Inhalt hat. BC ist also 1,414 ... mal so groß, als AB und AC.

Soll daher ein Quadrat doppelt so groß werden, als ein andres, so muß die Seite des letzteren 1,414 ... mal genommen werden.

Denkt man sich das Dreieck ABC als das halbe Dachgespärre eines Winkeldaches, so sieht man, daß AB die halbe Balkenlänge = AC = der Höhe des Daches, und BC die Sparrenlänge ist. Bei einem Winkeldach wird also der Sparren allemal 1,414...mal so lang als die Dachhöhe oder der halbe Balken. Auf je 10′ Dachhöhe wird also der Sparren 14,1 Fuß lang; und die Sparrenlänge wird beim Winkeldach allgemein gefunden, wenn man die Dachhöhe mit 1,414 multiplizirt.

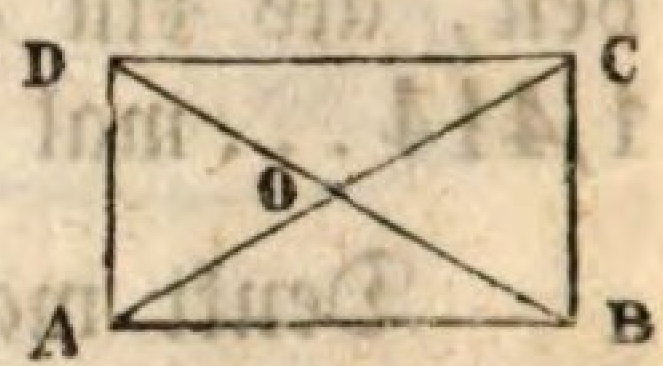
Hievon läßt sich in der Praxis eine nützliche Anwendung machen, wenn man die Sparrenlänge eines Winkeldaches wissen will, und keine Zeichnung zur Hand hat.

75. Vom Viereck. Wenn in einem Viereck je zwei gegenüberliegende Seiten AD, BC und AB, DC parallel laufen, so heißt das Viereck ein Parallelogramm.



Im Parallelogramm sind die gegenüber liegenden Seiten und Winkel gleich. Eine Linie DB von einem Eck zum gegenüber liegenden heißt Diagonale. Die beiden parallelen Seiten AB und CD heißen Grundlinien, ihre senkrechte Entfernung DE heißt die Höhe des Parallelogramms.

Ist im Parallelogramm **ein** Winkel ein rechter, so sind auch die drei andern Winkel rechte, und das Parallelogramm heißt ein **Rechteck**.



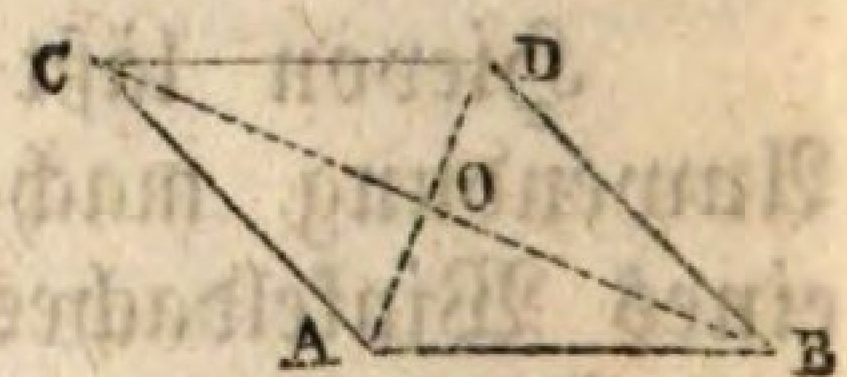
Die Seite AB heißt die **Grundlinie**, die Seite AD die **Höhe** des Rechtecks. Man nennt auch AB die Länge, AD die Breite des Rechtecks.

Eine Thür, ein Fenster, ein Brett, die Langseite eines Giebeldaches, die Façade eines Hauses u. s. w. sind Rechtecke.



Sind in einem Rechtecke alle Seiten gleich, so heißt es ein **Quadrat**. (Regelmäßiges Viereck.)

Sind in einem Parallelogramm ABCD alle vier Seiten gleich, so heißt es ein **Rhombus** (Raute).

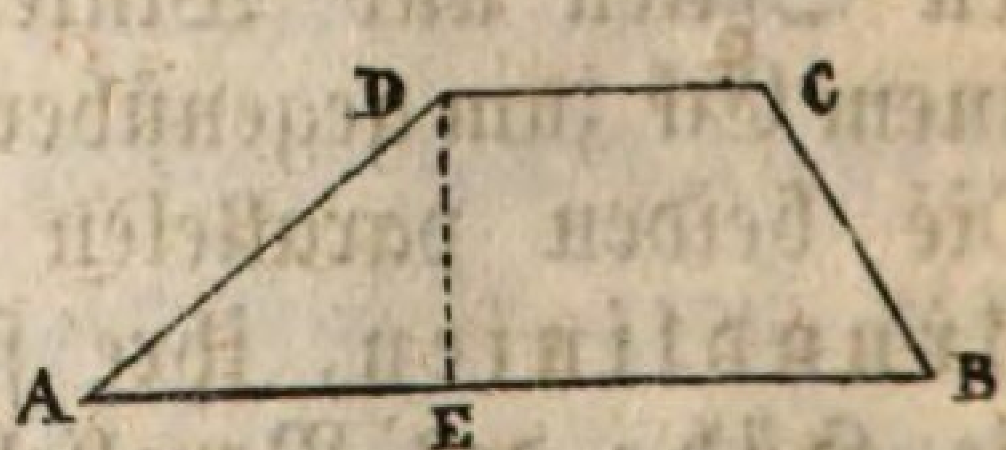


Der Rhombus ist ein verschobenes Quadrat, das Parallelogramm ein verschobenes Rechteck.

Im Parallelogramm, Rechteck, Quadrat und Rhombus halbiren sich die Diagonalen AC und BD gegenseitig in O. Im Quadrat und Rhombus stehen sie auch auf einander senkrecht.

76. **Zwei Parallelogramme sind gleich, wenn sie gleiche Grundlinie und gleiche Höhe haben.**

77. Sind in einem Viereck ABCD nur zwei Seiten parallel AB und DC, so heißt dasselbe ein **Trapez**.



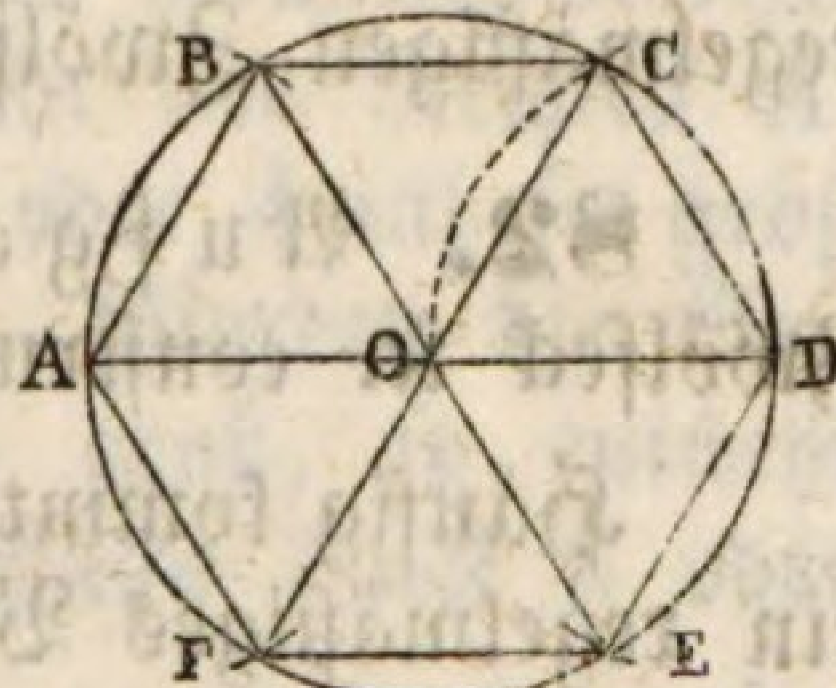
Die beiden parallelen Seiten AB und DC heißen die Grundlinien, ihre senkrechte Entfernung DE ist die Höhe des Trapezes.

Der Querschnitt eines Dammes, der Querschnitt einer Futtermauer mit Anlauf, die Dachflächen an den Langseiten eines Daches mit 2 Walmen, u. s. w. sind Trapeze.

78. Vieleck. Eine von mehr als 4 Seiten eingeschlossene Figur heißt ein Vieleck.

Von Vielecken kommt im Bauwesen hauptsächlich das regelmäßige Sechseck, Achteck und Zwölfeck vor.

79. Im regelmäßigen Sechseck ABCDEF sind alle sechs Seiten dem Radius des umschriebenen Kreises gleich. Das regelmäßige Sechseck wird daher construirt, wenn man den Radius OA sechsmal im Kreise herumträgt, wobei die Theilung aufgehen muß. Die Diagonalen theilen das regelmäßige Sechseck in 6 gleichseitige Dreiecke. Die 6 Winkel am Mittelpunkt O haben alle $\frac{360^o}{6}$ oder 60^o. —



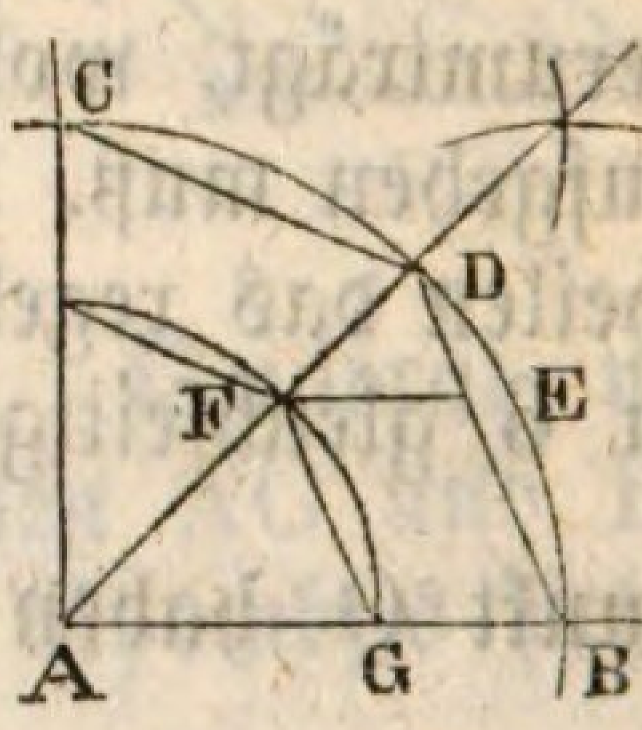
80. Im regelmäßigen Achteck sind alle 8 Seiten und Winkel am Umfange gleich. Es wird durch die 8 Diagonalen in 8 gleichschenklige Dreiecke zerlegt, und jeder der 8 entstehenden Winkel am Mittelpunkte hat $\frac{360^o}{8} = 45^o$. Das regelmäßige Achteck wird daher con-



struirt, indem man den Umfang in 8 gleiche Theile theilt. Dieß geschieht dadurch, daß man 2 Durchmesser AB, CD auf einander senkrecht errichtet und die entstehenden 4 rechten Winkel durch die Linien BF, DH halbirt.

81. Das regelmäßige Zwölfeck wird in den Kreis construirt, indem man (siehe Figur zu 63) 2 Durchmesser AB, CD senkrecht auf einander errichtet und von den Endpunkten A, B, C, D derselben als Mittelpunkten mit einer Zirkelöffnung gleich dem Radius den Kreisumfang durchschneidet, wodurch jeder Viertelskreis z. B. CA durch die entstehenden Schnittpunkte E, F in 3 gleiche Theile getheilt wird. Die Sehnen CE, EF, FA sind alsdann die Seiten des regelmäßigen Zwölfecks.

82. Aufgabe. Ein regelmäßiges Achteck, Zwölfeck ꝛc. construiren, dessen Seite gegeben ist.



Häufig kommt die Aufgabe vor, ein regelmäßiges Vieleck zu construiren, dessen Seite gegeben ist. In diesem Fall handelt es sich darum, den Radius zu dem gesuchten Vieleck zu finden. Die einfachste, genaueste Methode, welche zugleich für alle Vielecke gilt, ist folgende:

Es sei z. B. ein regelmäßiges Achteck zu construiren, dessen Seite der Linie BE gleich ist.

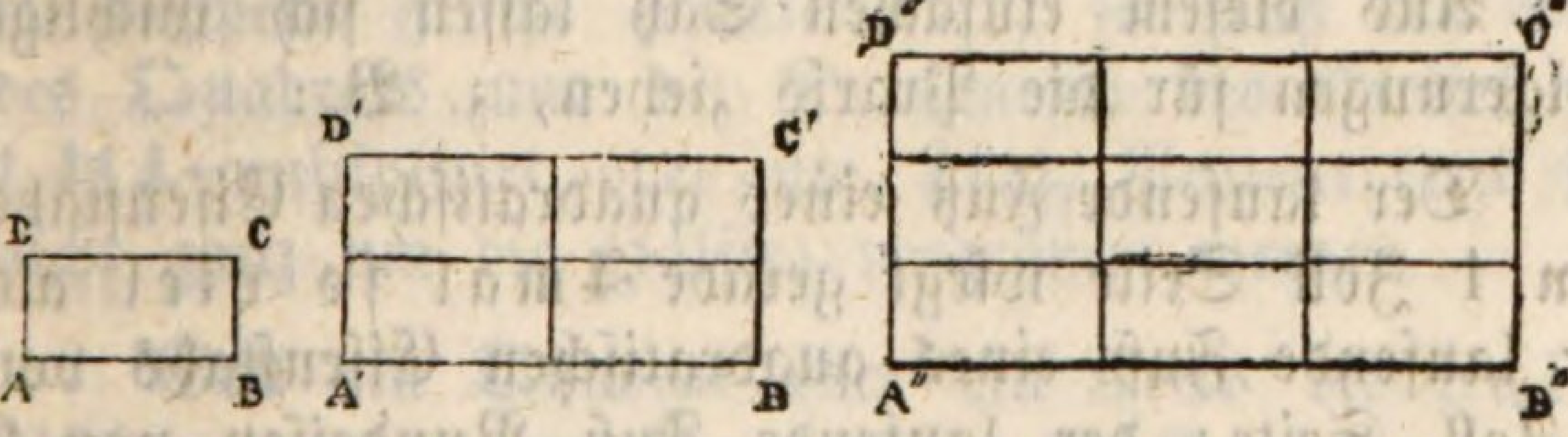
Man construirt zu diesem Zweck vorerst ein beliebiges Achteck, jedoch größer als das zu suchende, indem man die beiden Linien AB und AC auf einander senkrecht errichtet, den Viertelkreis CDB beschreibt, denselben in D halbirt und die Sehnen CD,

DB zieht. Die gegebene Achteckseite trägt man nun auf BD von B nach E auf, und zieht EF durch E parallel zu BA. Diese Parallele EF wird den Radius AD in F schneiden, und nun ist AF der Radius des Kreises, welcher das gesuchte Achteck einschließt, und die Sehne FG, parallel zu DB, eine Seite des gesuchten Achtecks und gleich EB, da das Viereck BEFG ein Parallelogramm ist.

Auf gleiche Weise wird bei jedem andern regelmäßigen Vieleck verfahren.

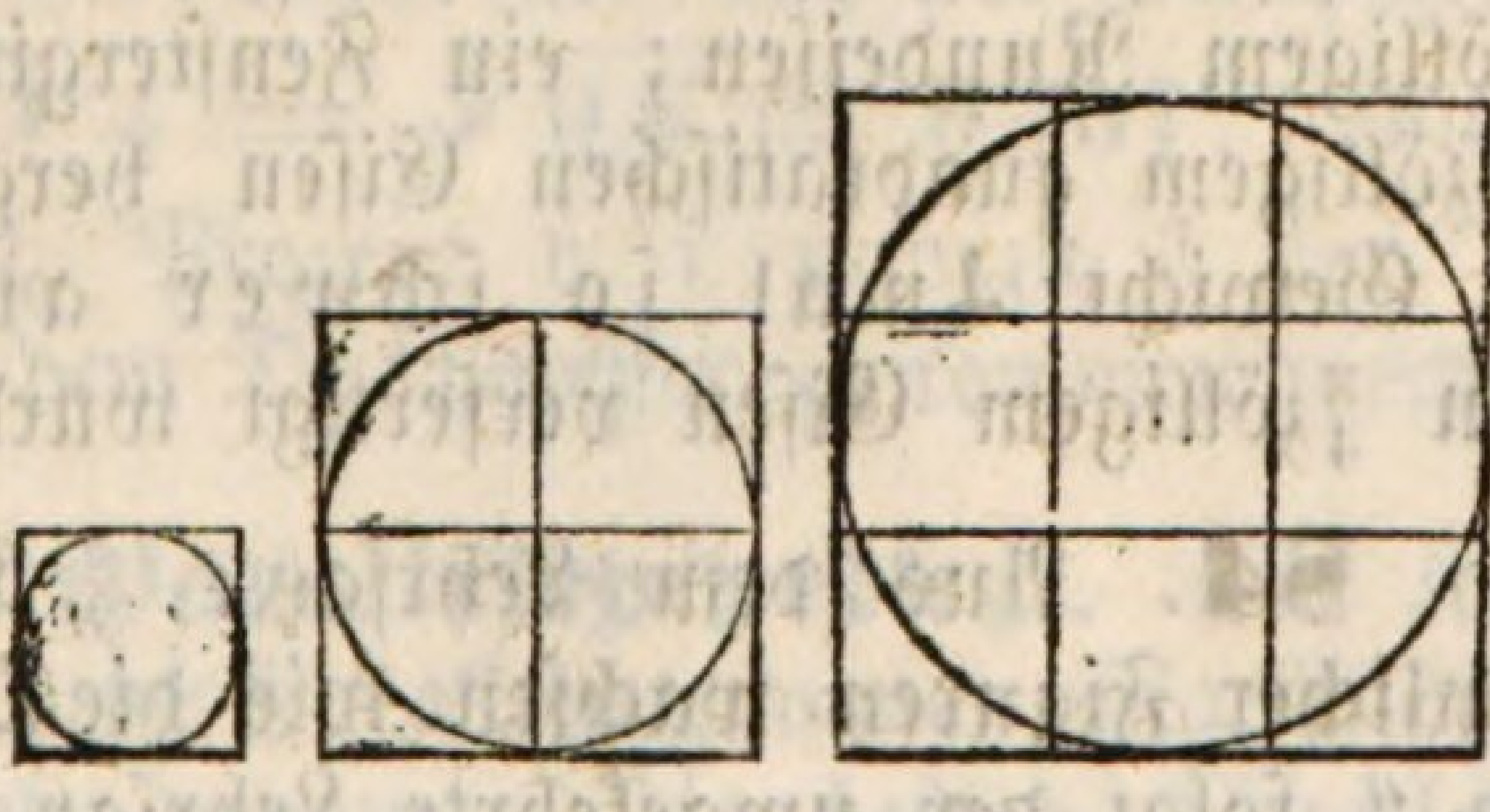
83. Verhältniß der Flächeninhalte ähnlicher Figuren.

Wenn die beiden Seiten eines Rechtecks ABCD doppelt so groß werden, so entsteht das Rechteck A′ B′ C′ D′, dessen Fläche 2mal 2 oder 4mal so groß ist, als jene des Rechtecks ABCD. Werden die Seiten des Rechtecks ABCD 3mal so groß, so entsteht das Rechteck A″ B″ C″ D″, dessen Fläche 3mal 3 oder



9mal so groß ist, als jene des Rechtecks ABCD.

Ein gleiches gilt vom Quadrat und dem eingeschlossenen Kreis. Wird die Seite eines Quadrats, oder der Durchmesser eines Krei-



ses 2, 3, 4mal so groß, so wird die Fläche des Quadrats und des Kreises 4, 9, 16mal größer.

Daher der Lehrsatz: Die Flächeninhalte ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadrate der Seiten.

Hat man z. B. 2 Quadrate, das eine von 3′ Seite, das andre von 4′ Seite, so verhalten sich ihre Seiten selbst wie 3 : 4 oder die Seite des ersten ist $\frac{3}{4}$ von der Seite des zweiten; ihre Flächeninhalte verhalten sich aber wie $3^2 : 4^2 = 9 : 16$ oder der Flächeninhalt des ersten ist $\frac{9}{16}$ vom Flächeninhalt des zweiten.

Ist der Durchmesser eines Baumes 1 Schuh, der eines andern 1 Schuh 4 Zoll 1 Linie (dec.) oder 1,41, so verhalten sich ihre Querschnitte wie $1{,}00^2 : 1{,}41^2 = 1 : 1{,}9881$ oder fast wie 1 : 2; der Querschnitt des letztern ist also doppelt so groß, als der des erstern, oder bei derselben Länge hat der zweite den doppelten Inhalt von dem des ersten.

Aus diesem einfachen Satz lassen sich wichtige Folgerungen für die Praxis ziehen, z. B.:

Der laufende Fuß eines quadratischen Eisenstabs von 1 Zoll Seite wiegt gerade 4mal so viel als der laufende Fuß eines quadratischen Eisenstabs von $\frac{1}{2}$ Zoll Seite; der laufende Fuß Rundeisen von 2 Zoll Stärke ist 4mal so schwer als jener von 1zölligem Rundeisen; ein Fenstergitter, welches von $1\frac{1}{2}$zölligem quadratischen Eisen hergestellt wird, fällt im Gewicht 4mal so schwer aus, als wenn es von $\frac{3}{4}$zölligem Eisen verfertigt würde u. s. w.

84. Aus dem Lehrsatz: „Die Flächeninhalte ähnlicher Figuren wachsen wie die Quadrate der Seiten,“ folgt der umgekehrte Lehrsatz:

Die Seiten ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Flächen.

Sollen z. B. die drei Rechtecke (Figur zu 83) ihrem Flächeninhalt nach sich wie 1 : 2 : 3 verhalten, d. h. soll das zweite doppelt so groß als das erste, das dritte dreimal so groß als das erste sein, so müssen die Seiten dieser Rechtecke sich wie

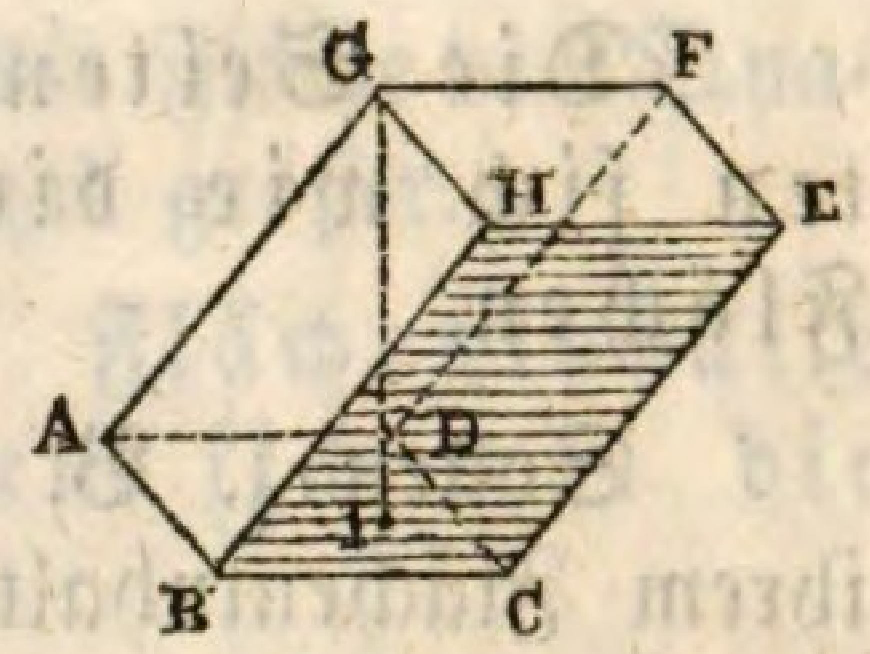
$\sqrt{1} : \sqrt{2} : \sqrt{3}$ oder wie
1 : 1,414 : 1,732 verhalten.

Soll z. B. ein Zimmer (bei derselben Form) doppelt oder dreimal so groß werden; so müssen seine beiden Seiten beziehungsweise mit 1,414 und 1,732 multiplizirt, oder was dasselbe ist, im ersten Fall um 41, im zweiten um 73 Prozent größer gemacht werden.

Quadrate sind immer ähnliche Figuren, Kreise deßgleichen. Wenn daher ein Quadrat oder ein Kreis die doppelte Fläche erhalten soll, so muß die Seite des Quadrats und der Durchmesser des Kreises mit 1,414 multiplizirt oder um $41\frac{4}{10}$ Prozent (das ist: nicht ganz um die Hälfte) vergrößert werden.

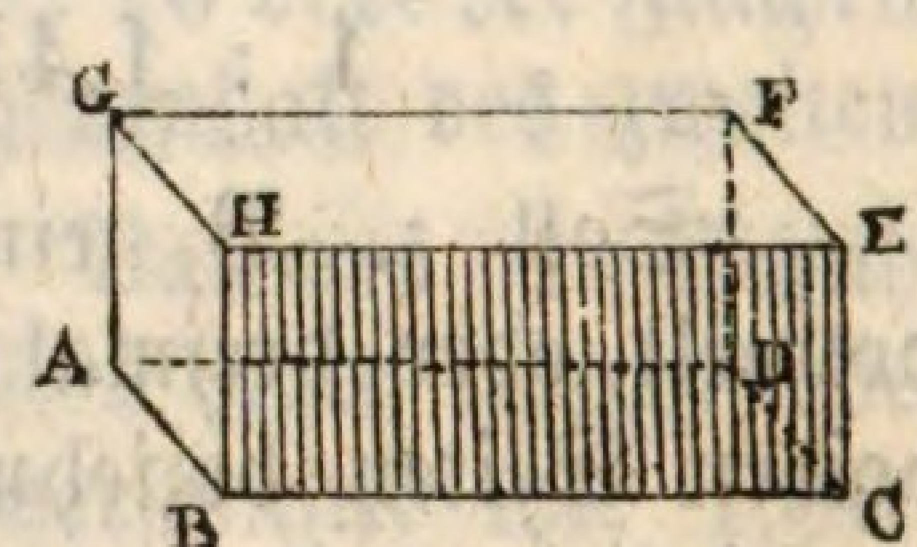
Soll ein Quadrat oder ein Kreis die halbe Fläche eines andern Quadrates oder Kreises erhalten, so muß die Seite des Quadrats und der Durchmesser des Kreises mit $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,5} = 0,707\ldots$ multiplizirt, oder $70\frac{7}{10}$ Prozent d. i. nahezu $\frac{3}{4}$ von der Quadratseite und dem Durchmesser genommen werden.

85. Vom Parallelepipedum. Ein Körper, welcher von lauter Parallelogrammen eingeschlossen ist, heißt Parallelepipedum. Die beiden Parallelo-



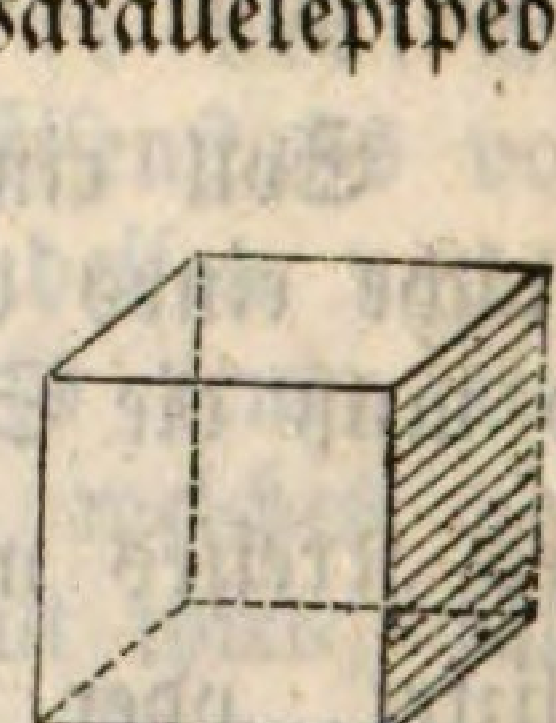
gramme ABCD und EFGH heißen **Grundflächen**, die andern 4 Parallelogramme **Seitenflächen**. Die senkrechte Entfernung GI der beiden Grundflächen ist die **Höhe**.

Im Parallelepipedum sind die gegenüberliegenden Seitenflächen und Kanten gleich und parallel.



Ist die Grundfläche ABCD eines Parallelepipedums ein Rechteck und eine der Seitenkanten z. B. AG auf der Grundfläche senkrecht, so sind alle Seitenflächen Rechtecke, und das Parallelepipedum heißt **rechtwinklig**. Die beiden Rechtecke ABCD und EFGH heißen die **Grundflächen**, eine der senkrechten Kanten z. B. AG, BH u. s. w. ist die Höhe.

Die meisten der im Bauwesen vorkommenden Körper haben die Gestalt eines Parallelepipedums. Ein Quaderstück, ein Backstein, eine Mauer, ein Balken, ein Brett u. s. w. sind rechtwinklige Parallelepipeda.

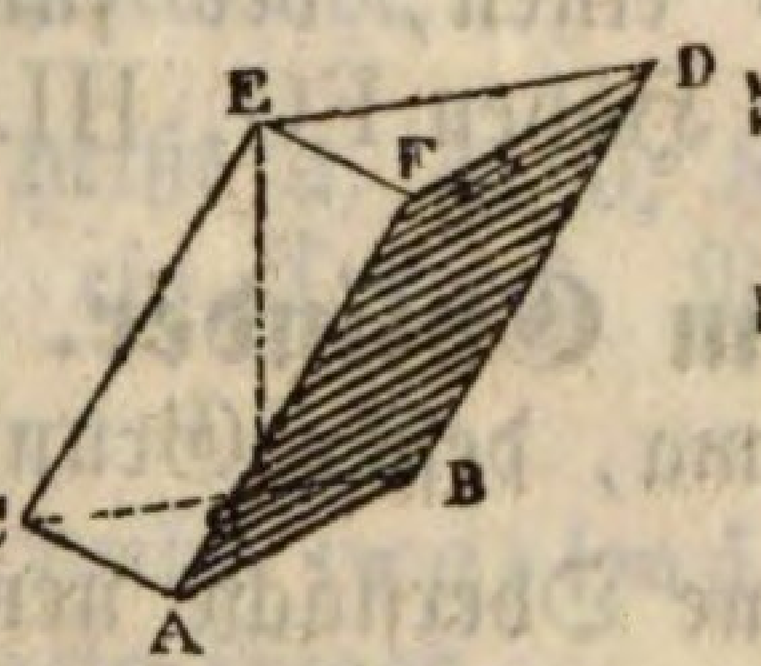


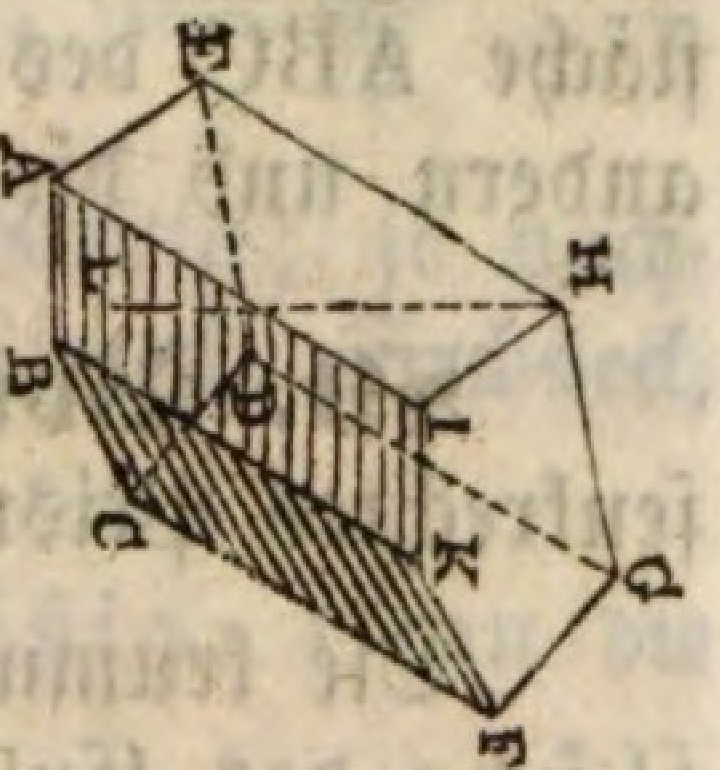
Sind bei einem rechtwinkligen Parallelepipedum drei an einem Eck zusammenstoßende Kanten gleich lang, so sind alle Kanten gleich lang, alle Seitenflächen Quadrate, und der Körper heißt ein **Würfel** (Kubus).

86. Zwei Parallelepipeda sind gleich, wenn sie gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben.

87. Vom Prisma. Ein Körper, welcher von zwei parallelen und gleichen Grundflächen und lauter Parallelogrammen als Seitenflächen eingeschlossen ist, heißt Prisma.

Sind die Grundflächen eines Prisma's Dreiecke ABC, DEF, so heißt das Prisma 3seitig, sind die Grundflächen Fünfecke ABCDE, FGHIK, so heißt dasselbe 5seitig u. s. w.



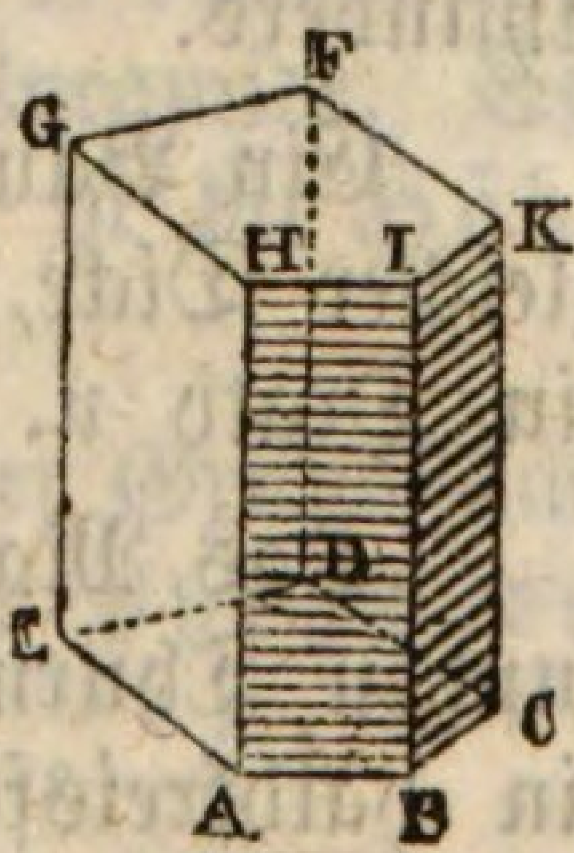


Ein Prisma heißt regelmäßig, wenn seine Grundflächen regelmäßige Vielecke sind.

Die senkrechte Entfernung EG, HL der beiden parallelen Grundflächen ist die Höhe des Prisma's.

Werden die Grundflächen eines Prisma's Parallelogramme, so wird das Prisma ein Parallelepipedum.

Steht eine der Seitenkanten AH auf der Grundfläche ABCDE senkrecht, so stehen alle Seitenkanten auf den Grundflächen senkrecht und das Prisma heißt ein senkrechtes.



Das senkrechte Prisma kommt im Bauwesen sehr häufig vor. Ein Damm, ein Graben, eine Mauer, welche vorn einen Anlauf hat, sind senkrechte Prismen, deren Querschnitte (Grundflächen) Trapeze sind. Das Giebeldach eines Hauses ist ein 3seitiges, ein 8seitiges Brunnenbassin ist ein 8seitiges senkrechtes Prisma.

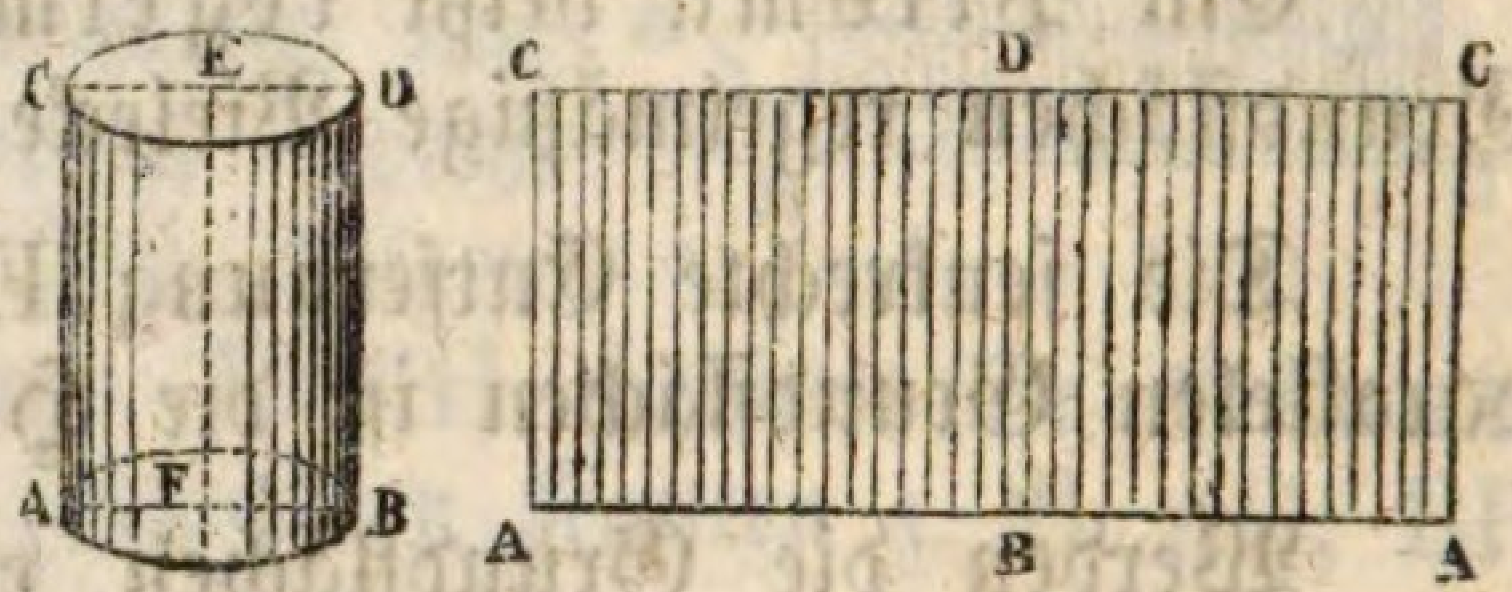
88. Zwei Prismen sind gleich, wenn sie gleiche Grundlinie und gleiche Höhe haben.

Die in Nro. 87 dargestellten zwei Prismen sind daher gleichen Inhalts, wenn die dreieckige Grundfläche ABC des einen, der fünfeckigen ABCDE des andern und die Höhen EG, HL beider gleich sind.

89. Vom Cylinder. Der Cylinder ist ein senkrechtes Prisma, dessen Grundfläche ein Kreis ist.

Die krumme Oberfläche nennt man die Mantelfläche des Cylinders (Cylinder-Mantel).

Diese Mantelfläche des Cylinders läßt sich in ein Rechteck ABACDC ausbreiten, dessen Grundlinie AA der



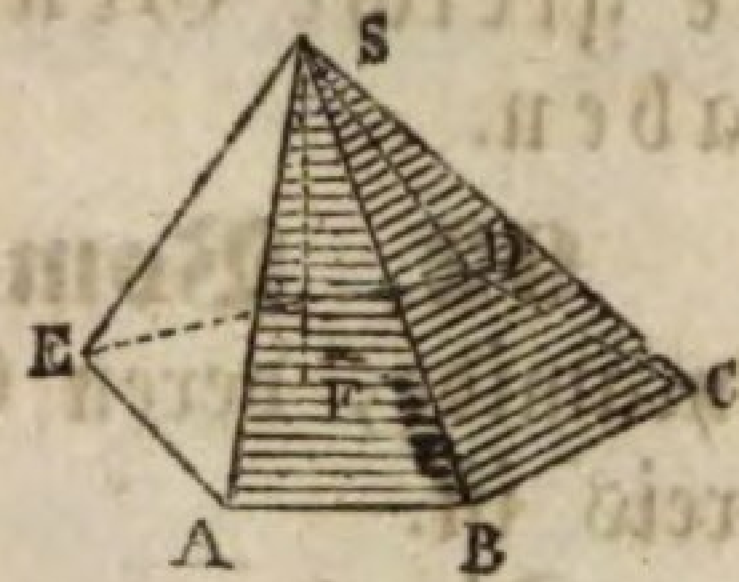
Umfang, und dessen Höhe AC die Höhe des Cylinders ist. Die Linie EF, welche die beiden Mittelpunkte der Grundflächen verbindet, heißt die Are des Cylinders.

Ein Baumstamm oder eine Säule von durchaus gleicher Dicke, eine runde Ofenplatte, eine Stehrinne, ein Drath u. s. w. sind cylinderförmige Körper.

Das Mauerwerk eines runden Brunnens, eines runden Thurmes u. s. w. ist ein hohler Cylinder; ein halbkreisförmiges Tonnengewölbe ist ein halber hohler Cylinder.

90. Von der Pyramide. Ein Körper, welcher von einer Grundfläche und lauter dreieckigen Seitenflächen eingeschlossen ist, heißt eine Pyramide.

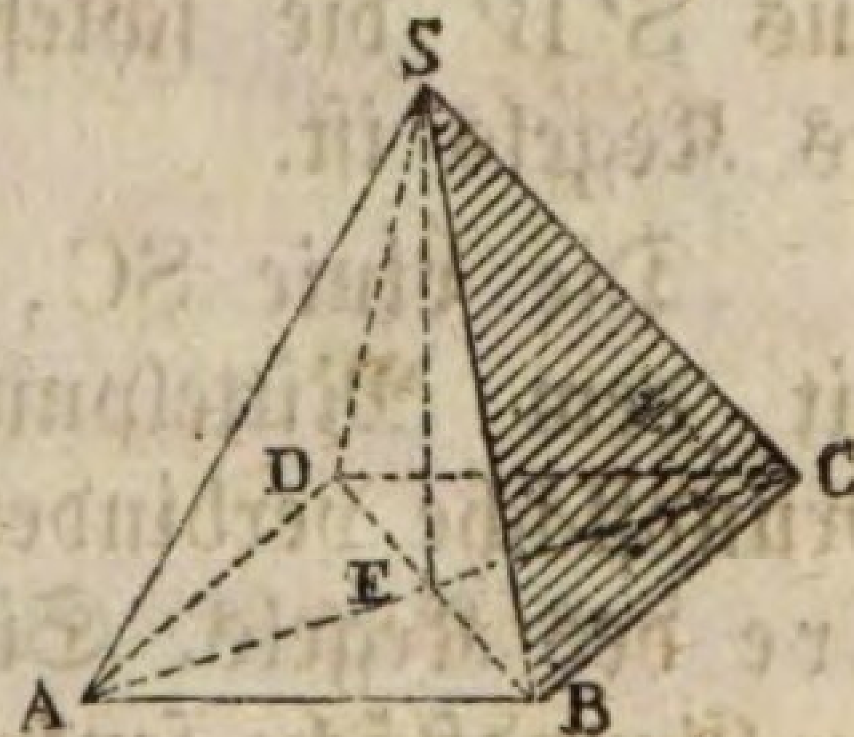
Der Punkt S, in welchem alle Seitenflächen ABS, BCS u. s. w. sich schneiden, heißt die Spitze der Pyramide.



Eine Senkrechte SF von der Spitze auf die Grundfläche ABCDE heißt die *Höhe* der Pyramide.

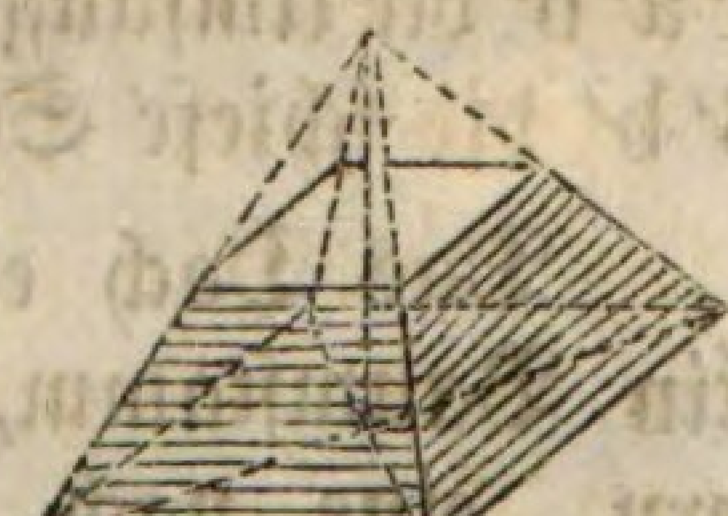
Eine Pyramide heißt 3, 4, 6, 8seitig, je nachdem die Grundfläche ein Dreieck, Viereck, Sechseck, Achteck ist.

Eine Pyramide heißt *regelmäßig*, wenn die Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist, und alle Seitenflächen einander gleich sind. ABCDS ist eine regelmäßige vierseitige Pyramide. Die Grundfläche ABCD ist ein Quadrat und die Seitenflächen ABS, BCS ꝛc. sind vier gleiche gleichschenklige Dreiecke.



Die Linie SE, welche die Spitze S einer regelmäßigen Pyramide mit dem Mittelpunkt E der Grundfläche verbindet, heißt die *Axe* der Pyramide. Sie steht auf der Grundfläche senkrecht, und ist die *Höhe* der Pyramide.

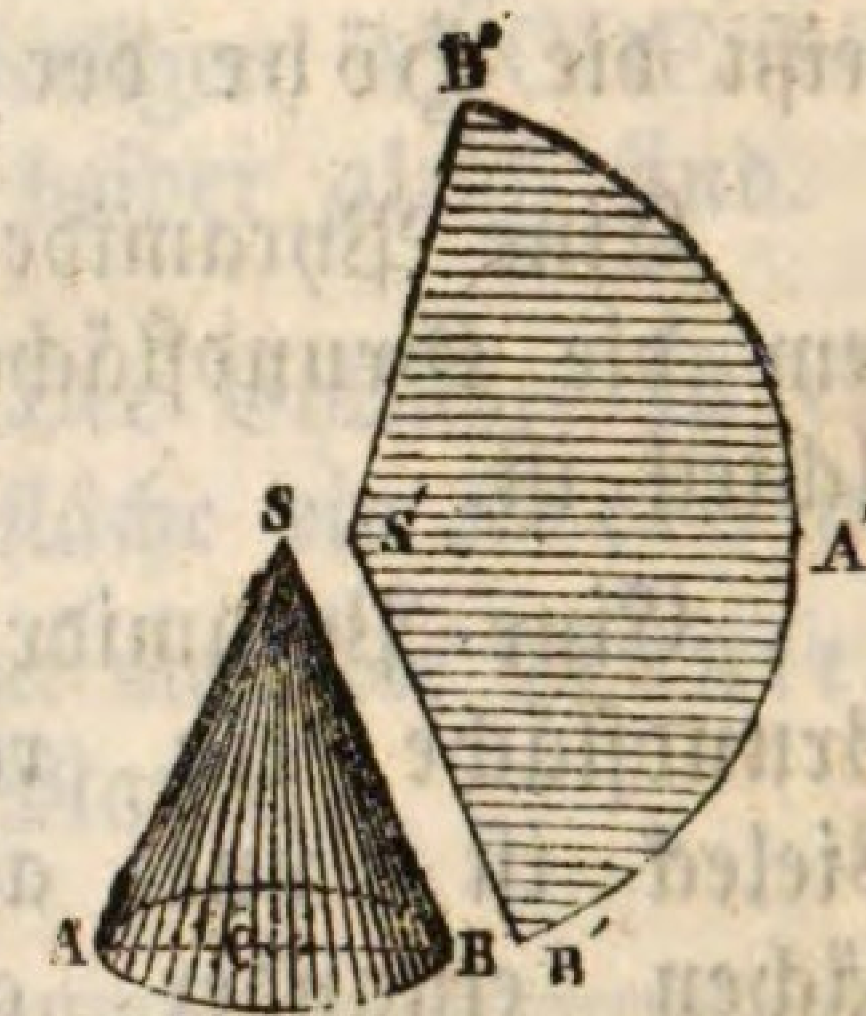
Wird eine Pyramide parallel mit der Grundfläche abgeschnitten, so entsteht eine *abgekürzte Pyramide*. Sie hat zwei ähnliche Grundflächen und die Seitenflächen sind Trapeze.



Das in eine Spitze auslaufende Dach eines 4seitigen Thurmes ist eine vierseitige Pyramide. Der Obelisk ist eine abgekürzte 4seitige Pyramide.

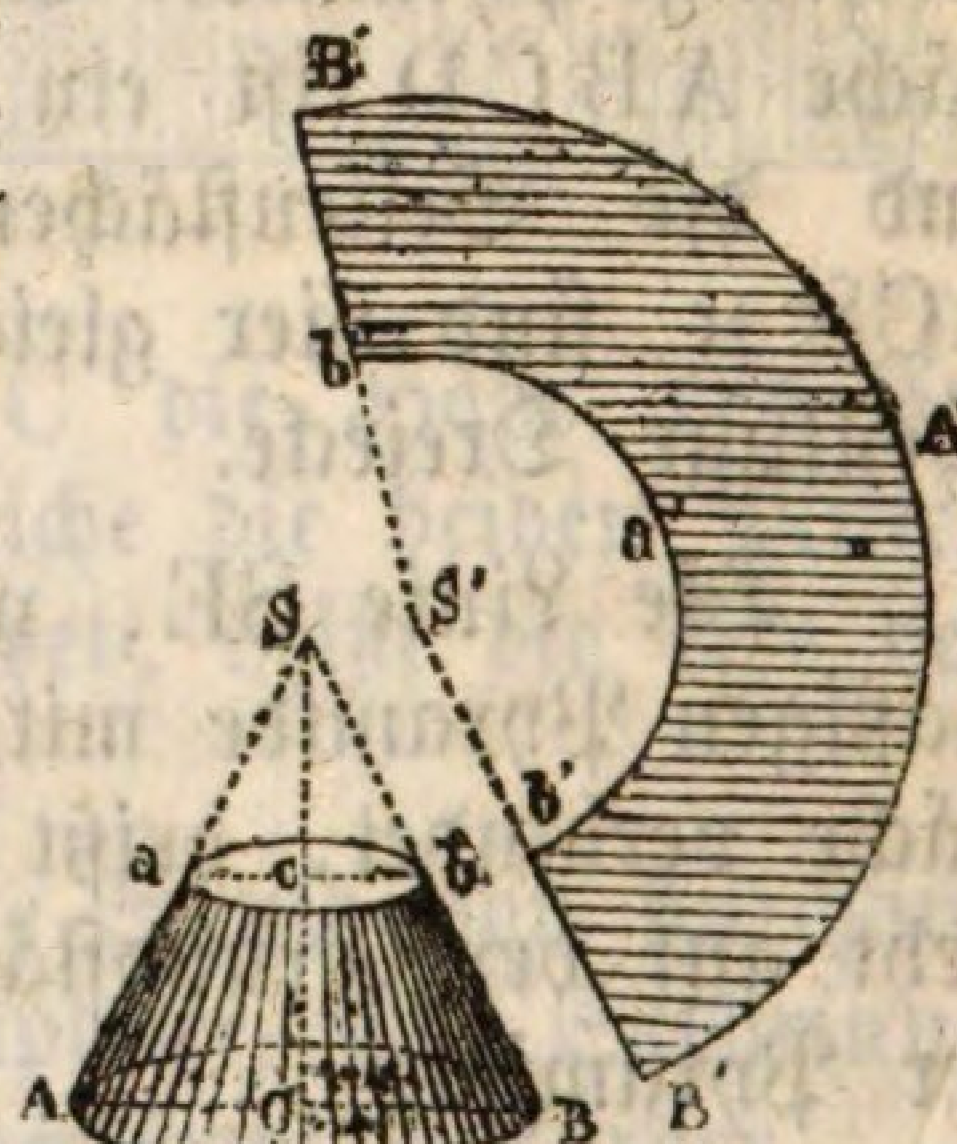
91. Zwei Pyramiden sind gleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben.

92. Vom Kegel. Der Kegel ist eine Pyramide, deren Grundfläche ein Kreis ist.



Die krumme Oberfläche des Kegels heißt Mantelfläche. Sie läßt sich in einen Kreisausschnitt B'A'B'S' ausbreiten, dessen Bogen B'A'B' der Umfang der Grundfläche AB, und dessen Radius S'B' die schiefe Seite SB des Kegels ist.

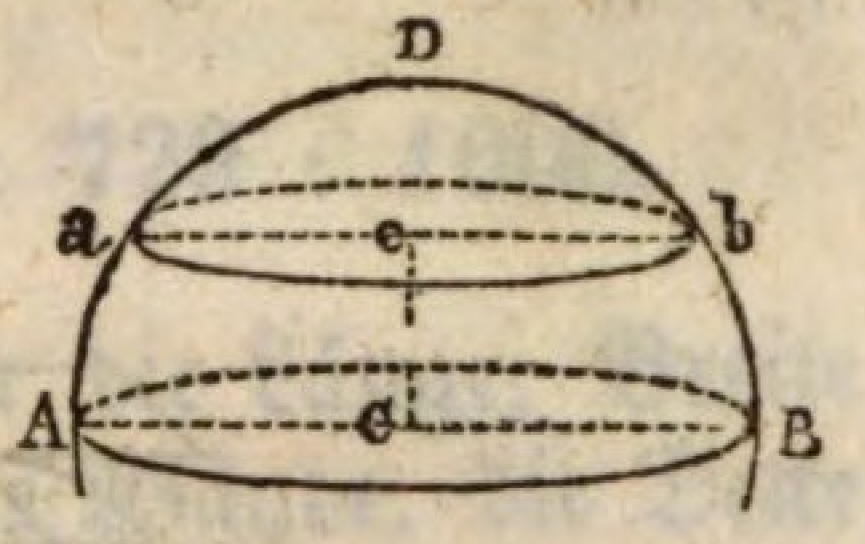
Die Linie SC, welche die Spitze S des Kegels mit dem Mittelpunkt C der Grundfläche verbindet, heißt die Axe des Kegels. Sie steht auf der Grundfläche senkrecht und ist die Höhe des Kegels.



Wird ein Kegel parallel zur Grundfläche geschnitten, so entsteht der abgestutzte Kegel ABba. Die Mantelfläche des abgestutzten Kegels erscheint, in eine Ebene ausgebreitet, als ein Theil einer Ringfläche, deren zwei Bögen B'A'B, b'a'b' die Umfänge beider Grundflächen und dessen Breite B'b' die schiefe Seite Bb des abgestutzten Kegels ist.

Das Dach eines runden Thurmes ist ein Kegel. Ein Baumstamm, am einen Ende dicker als am andern, eine nach oben sich verjüngende Säule, sind abgestutzte Kegel.

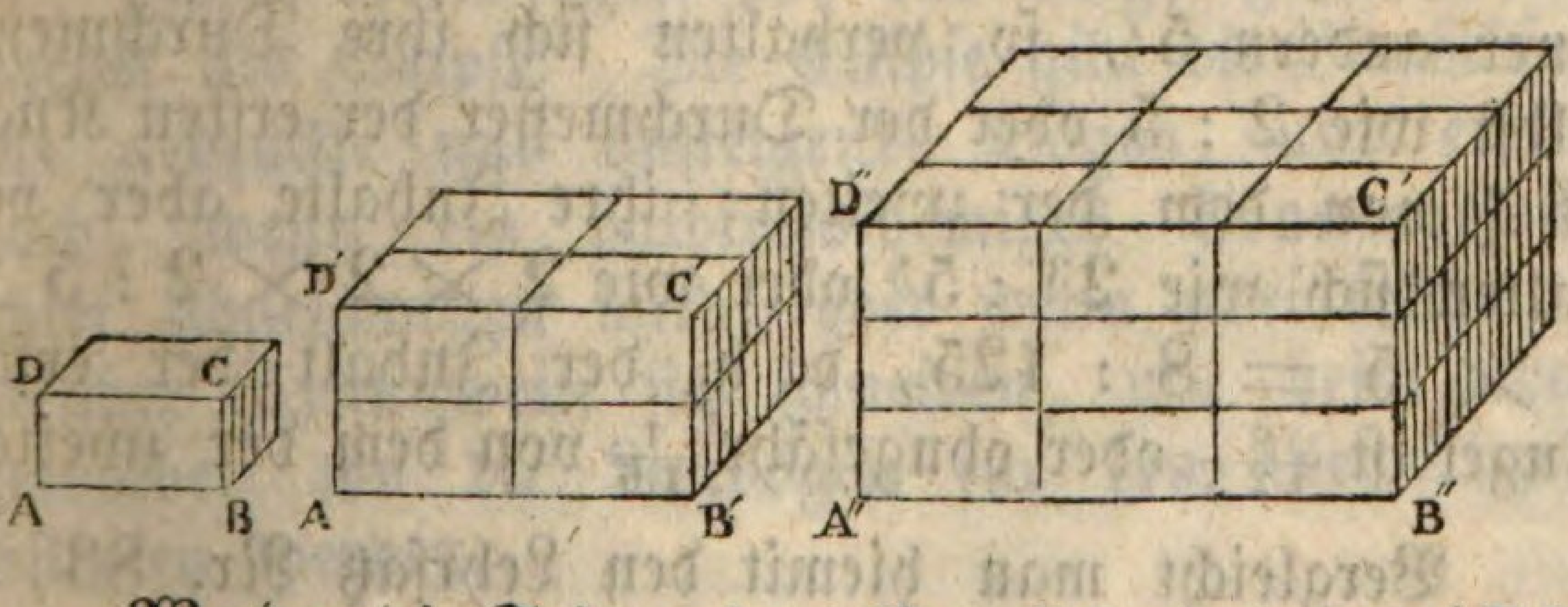
93. Von der Kugel. Ein Körper, dessen krumme Oberfläche die Eigenschaft hat, daß alle ihre Punkte von einem Punkte (dem Mittelpunkt) gleichweit entfernt sind, heißt Kugel.



Schneidet man von der Kugel durch eine Ebene ein Stück ab, so heißt das abgeschnittene Stück abD ein Kugelabschnitt (Käppchen). Die entstehende Schnittfläche ist ein Kreis, der um so größer wird, je näher der Schnitt am Mittelpunkt C geschieht. Wird eine Kugel mit einer Ebene durch den Mittelpunkt C geschnitten, so entstehen zwei gleiche Halbkugeln, und die entstehende Schnittfläche heißt ein größter Kreis. Wird die Kugel von zwei parallelen Ebenen AB, ab geschnitten, so heißt der zwischen beiden Ebenen enthaltene Kugelstreif Aa, Bb eine Kugelzone.

94. Verhältniß der Kubikinhalte ähnlicher Körper.

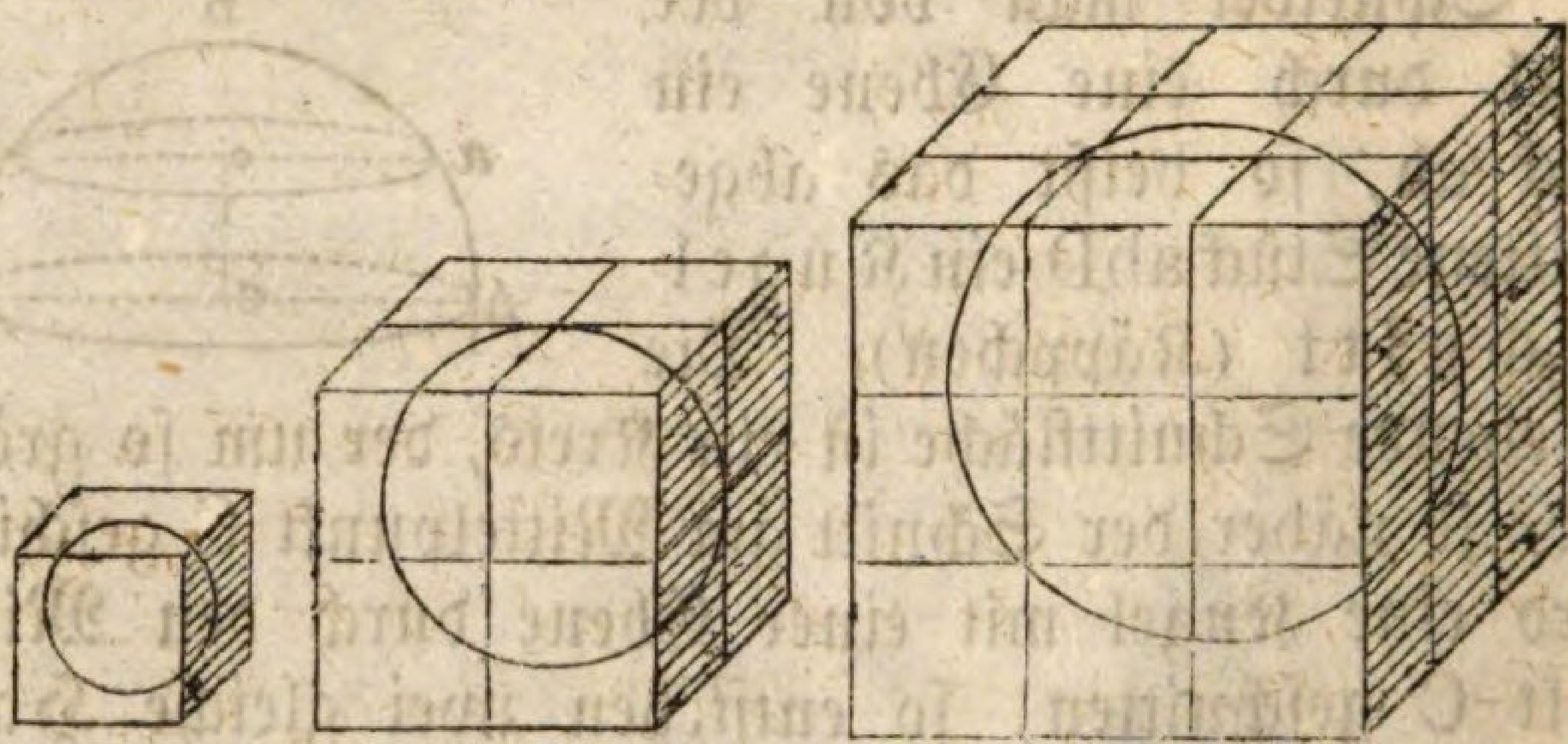
Wenn die Seiten eines Parallelepipedums ABCD noch einmal so groß werden, so entsteht ein Parallelepipedum A′B′C′D′, dessen Kubikinhalt $2 \times 2 \times 2$ oder 8mal so groß ist, als der des Parallelepipedums ABCD.



Werden die Seiten eines Parallelepipedums ABCD dreimal so groß, so entsteht ein Parallelepipedum

A″B″C″D″, dessen Kubikinhalt 3 × 3 × 3 oder 27mal so groß ist, als der des Parallelepipedums ABCD.

Ein Gleiches gilt vom Würfel und der eingeschlossenen Kugel.



Wird die Seite eines Würfels oder der Durchmesser einer Kugel doppelt so groß, so wird der Inhalt des Würfels oder der Kugel 2 × 2 × 2 oder 8mal so groß; wird die Seite eines Würfels oder der Durchmesser einer Kugel 3mal so groß, so wird der Inhalt des Würfels oder der Kugel 3 × 3 × 3 oder 27mal so groß. Daher der Lehrsatz:

Die Kubikinhalte ähnlicher Körper verhalten sich wie die Würfel der Seiten.

Ist z. B. der Durchmesser einer Kugel 2′, der einer andern 5′, so verhalten sich ihre Durchmesser selbst wie 2 : 5 oder der Durchmesser der ersten Kugel ist $\frac{2}{5}$ von dem der zweiten; ihre Inhalte aber verhalten sich wie $2^3 : 5^3$ oder wie $2 \times 2 \times 2 : 5 \times 5 \times 5 = 8 : 125$, d. h. der Inhalt der ersten Kugel ist $\frac{8}{125}$ oder ohngefähr $\frac{1}{16}$ von dem der zweiten.

Vergleicht man hiemit den Lehrsatz Nr. 83, so sieht man, daß, wenn bei ähnlichen Körpern die Seiten zunehmen im Verhältniß von:

1 : 2 : 3 : 4 . . . . . . : 9 : 10

ihre Oberflächen zunehmen wie

1 : 4 : 9 : 16 . . . . . . : 81 : 100

und ihre Kubikinhalte wie

1 : 8 : 27 : 64 . . . . . . : 729 : 1000.

Wird z. B. bei einem Zimmer die Länge, Breite und Höhe verdoppelt, so werden die Wände, die Decke und der Boden viermal so groß, der Rauminhalt des Zimmers aber wird achtmal so groß.

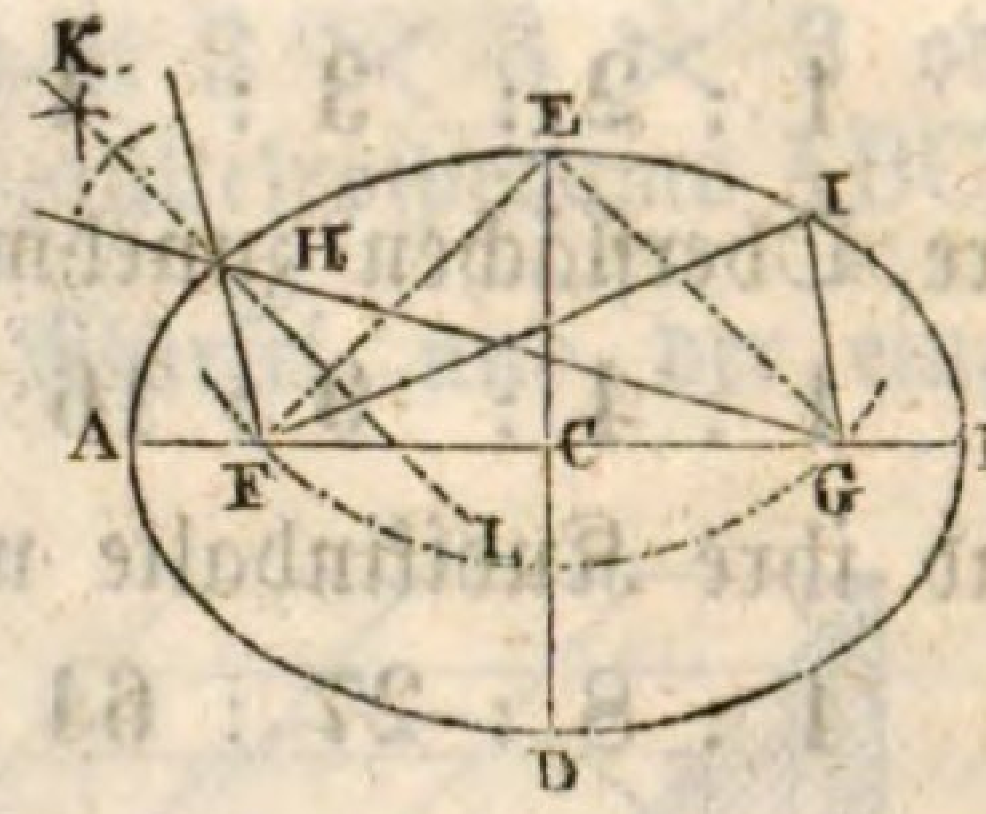
Sind von zweien Quaderstücken die drei Dimensionen: Länge, Breite und Höhe des ersten 3mal so groß, als die des zweiten, so sind die Oberflächen des ersten 9mal so groß als die des zweiten, der Kubikinhalt des ersten ist aber 27mal so groß, als der des zweiten, also auch das erste Quaderstück 27mal so schwer, als das zweite.

95. Von der Ellipse. Von krummen Linien kommt im Bauwesen außer dem Kreis noch die Ellipse vor.

Jeder Kreis schief vor das Auge gehalten, erscheint als Ellipse. Die Ellipse gibt die Gewölbform für gedrückte und ansteigende Bögen, und entsteht auch, wenn ein halbkreisförmiges Tonnengewölbe schief abgeschnitten wird, oder wenn zwei solche von gleicher Spannweite sich schneiden, wie beim Kreuzgewölbe, wo die Leerbögen für den Gewölbgrath Ellipsen werden.

Die Ellipse ist eine geschlossene krumme Linie AEBD, welche die Eigenschaft hat, daß die Summe

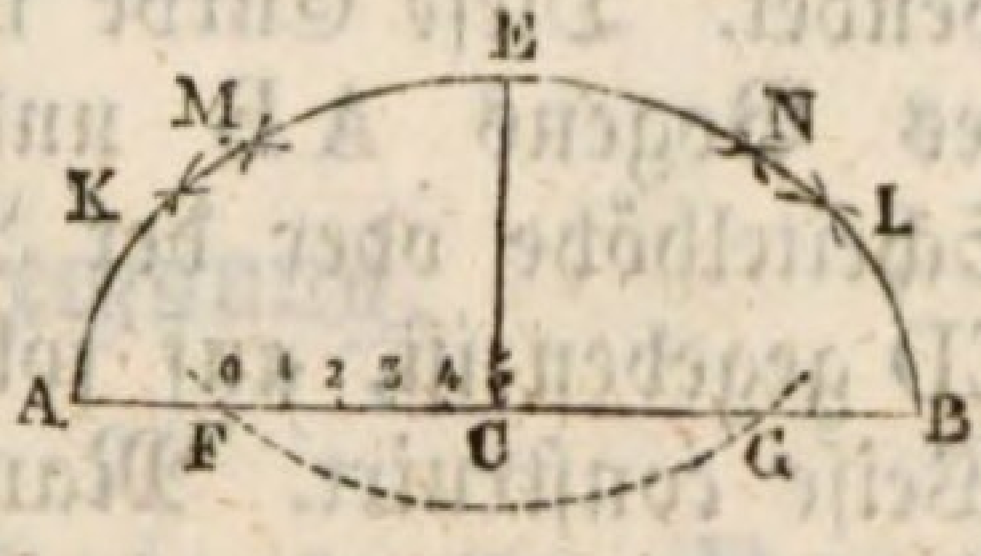
der Entfernungen IF und IG irgend eines Punktes I der Ellipse von zwei festen Punkten F und G (den Brennpunkten) immer der großen Axe AB gleich ist.



AB ist die große Axe, ED die kleine Axe der Ellipse, welche im Mittelpunkte C auf einander senkrecht stehen. F und G sind die beiden Brennpunkte. Diese Brennpunkte werden gefunden, wenn man die Hälfte der großen Axe AC mit dem Zirkel faßt, den einen Fuß desselben in E einsetzt und mit dem andern die große Axe in F und G durchschneidet. Eine Linie von E nach F oder G gezogen, ist daher der halben großen Axe gleich; auch ist die Summe zweier Linien von F und G nach irgend einem Punkte der Kurve gezogen, wie FH + GH oder FI + IG der der ganzen großen Axe AB gleich. Je zwei solcher Linien wie FH und GH oder FI und IG von einem Punkt der Ellipse nach den beiden Brennpunkten heißen Fahrstrahlen der Ellipse. Hieraus ergiebt sich ein Verfahren, die Ellipse zu zeichnen. Man bestimmt nämlich den Mittelpunkt, die Länge der großen und die Länge der kleinen Axe der zu zeichnenden Ellipse und läßt beide Axen sich im Mittelpunkt unter einem rechten Winkel schneiden. Die Hälfte der großen Axe faßt man hierauf mit dem Zirkel und bestimmt nach dem Vorhergehenden die beiden Brennpunkte. In diese Punkte schlägt man Stifte ein und befestigt an sie einen Faden so, daß er ausgespannt, entweder ein Dreieck FEG bildet, oder sich in zwei parallelen Strängen von F bis B und zurück bis G erstreckt, also genau

der großen Axe gleich ist. Führt man nun innerhalb des gespannten Fadens einen beschreibenden Stift herum, so zeichnet dieser die Ellipse.

96. Mit dem Zirkel wird eine Ellipse auf folgende Weise construirt. Es sey die große Axe AB und die halbe kleine Axe CE gegeben, so trage man AC aus E nach F und G, welches die beiden Brennpunkte gibt. Hierauf theile man FC in eine beliebige Anzahl gleicher Theile 1, 2, 3, 4, 5, und nehme B1 mit dem Zirkel ab, setze die eine Spitze in den Punkt G, und beschreibe mit der anderen einen kleinen Bogen bei K, und eben so mit derselben Zirkelöffnung aus F einen Bogen bei L, nehme dann 1A, setze den Zirkel in F und G, und durchschneide die vorigen kleinen Bögen in K und L, welches zwei Punkte der Ellipse sind. Nimmt man ferner B2 und verfährt wie mit B1, dann 2A und verfährt damit wie mit 1A u. s. w., so kann man so viele Punkte M, N der Ellipse bestimmen, als man für den Zweck nöthig findet. Diese Punkte werden dann aus freier Hand oder mittelst eines Curvenlineals zusammengezogen.



Die Fugenschnitte eines elliptischen Gewölbes können weder nach dem Mittelpunkt C noch nach den Brennpunkten F und G gezogen werden, in beiden Fällen würden die Fugen nicht senkrecht auf der Wölbungslinie stehen. Um für irgend einen Punkt H der Ellipse (siehe erste Figur) die Richtung der Fuge oder die Senkrechte zur Ellipse zu finden, zieht man die beiden Fahrstrahlen HF und HG, und halbirt den Winkel FHG den sie einschließen, durch die Linie KHL.

Diese ist die Senkrechte zur Ellipse und folglich die Richtung der Fuge für den Punkt H.

97. Die Korblinie ist eine aus mehreren Kreisbogen zusammengesetzte Ellipse, und wird vorzüglich bei weit gespannten steinernen Brücken angewendet. Diese Curve wird, wenn die Spannweite des Bogens AB und die Scheitelhöhe oder der Pfeil ED gegeben ist, auf folgende Weise construirt. Man verbindet die Punkte A D und B durch die Geraden AD und DB, und trägt von D nach G und von D nach H die Länge AE — ED, oder den Unterschied der beiden halben Axen, halbirt AG und BH, und errichtet in den Halbirungspunkten F und K die Perpendikel FC und KC, welche sich in C schneiden und den Mittelpunkt für den Bogen MDN bilden; die Bogen AM und BN werden aus den Mittelpunkten I und L mit den Radien IA = IM = LB = LN beschrieben. — Man macht die Korbbogen niemals flacher als zu $\frac{1}{4}$ der Spannweite, ist eine noch größere Verdrückung nöthig, so wählt man Kreisbogen.



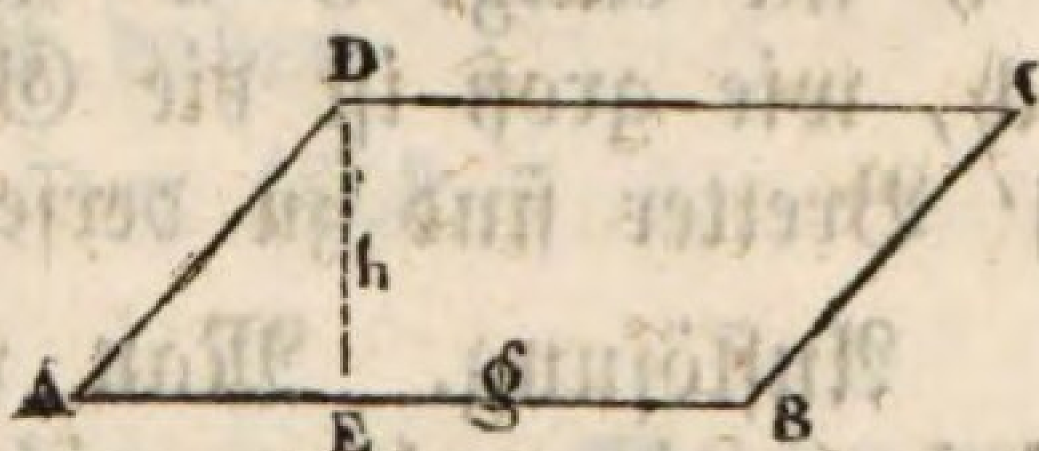
Viertes Kapitel.

Anwendung der Arithmetik auf Geometrie.

A. Flächenberechnung.

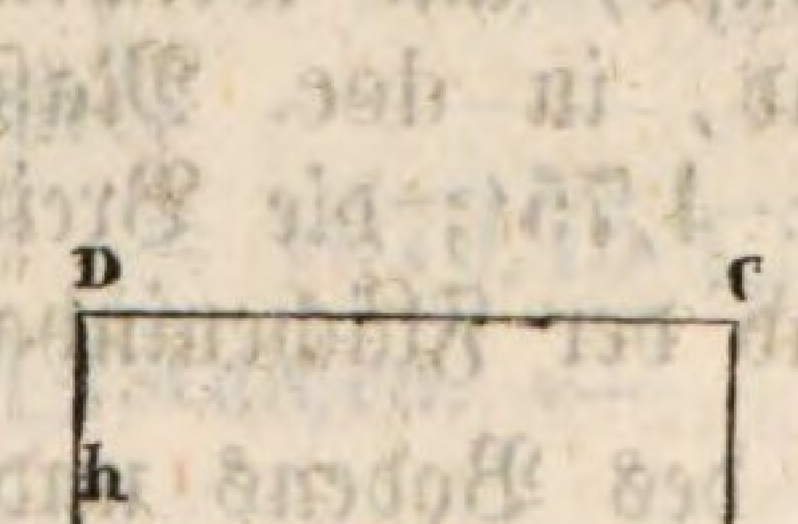
98. Der Flächeninhalt eines **Parallelogramms, Rechteckes,** wird gefunden, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplizirt.

Die Höhe eines Parallelogramms ist die senkrechte Entfernung der beiden Grundlinien, also nicht mit der schiefen Seite AD zu verwechseln. Ist ABCD das Parallelogramm, so ist DE die Höhe.



Bezeichnet g die Grundlinie, h die Höhe eines Parallelogramms oder Rechtecks ABCD, so ist der Flächeninhalt f desselben

$$f = g \times h.$$



Z. B. Wie viel □ Ruthen hat ein Bauplatz in Form eines Rechtecks von 304′ Länge und 160′ Breite? Antw.: 304 × 160 = 48640 □′ = 486,40 □ Ruthen, oder in Tagwerken ausgedrückt $= \frac{48640}{40000} = 1{,}216$ Tgw. = 1 Tgw. 21,6 Decim.

2. Beispiel. Ein Haus mit einem Giebeldach ist am First $55\frac{1}{2}$ Fuß lang, die Sparrenlänge ist $31\frac{3}{4}$ Fuß, wie groß ist die gesammte Dachfläche?

Antwort:

$2 \times 55{,}5 \times 31{,}75 = 3524{,}25 \ \square'$
$= 35{,}24 \ \square$ Ruthen.

3. Beispiel. Ein rechtwinkliger Garten von 159,7′ Länge 46,8′ Breite ist mit einem 5,8′ hohen Bretterzaun eingefaßt, wie viele □′ Bretter sind zu diesem nöthig?

Antwort:

$2 \times (159{,}7 + 46{,}8) \times 5{,}8 = 2395{,}4 \ \square'.$

4. Beispiel. Eine Bretterkiste hat am Boden 4′ 9″ dd Länge 3′ 3″ dd Breite und ist 2′ 10″ dd hoch, wie groß ist die Gesammtfläche, oder wie viele □′ Bretter sind zu derselben verwendet worden?

Auflösung. Man verwandle die gegebenen dd Maße, mit welchen nicht gut Flächen zu berechnen sind, in dec. Maße, so wird die Länge der Kiste = 4,75′; die Breite = 3,25′; die Höhe = 2,83′; und der Flächeninhalt

a) des Bodens und Deckels zusammen
$= 2 \times 4{,}75 \times 3{,}25 = 30{,}875 \ \square'$

b) der beiden langen Seitenwände zus.
$= 2 \times 4{,}75 \times 2{,}83 = 27{,}385$ „

c) der beiden schmalen Seitenwände zus.
$= 2 \times 3{,}25 \times 2{,}83 = 18{,}525$ „

Die Gesammtoberfläche ist daher = 76,785 □′ oder annähernd $76\frac{3}{4}$ □′.

5. Beispiel. Ein Zimmer hat 18,5′ Länge, 17,5′ Breite, 10,5′ Höhe; welches sind die Flächen a) des Fußbodens; b) der zu weißelnden Flächen, nämlich der Wände und Decke?

Auflösung. Die Fläche des Bodens und also auch der Decke ist

a) $= 18{,}5 \times 17{,}5 =$ . . . 323,75 □′

Die zu weißelnde Fläche wird gefunden, wenn man zu der eben berechneten Fläche der Decke noch die Flächen der 4 Wände addirt, wobei für Thüren und Fenster gewöhnlich Nichts in Abzug gebracht wird. Die Gesammtfläche der 4 Wände erhält man, wenn man den Umfang des Zimmers d. i. die doppelte Summe aus Länge und Breite mit der Höhe multiplizirt; der Flächeninhalt der 4 Wände ist daher

$= 2 \times (18{,}5 + 17{,}5) \times 10{,}5$

$= 2 \times 36 \times 10{,}5$

$= 72 \times 10{,}5 =$ . . . . . . 756,00 □′

Die zu weißelnde Fläche des Zimmers ist folglich b) $=$ 1079,75 □′

oder rund $= 1080$ □′ $= 10{,}8$ □Ruthen. —

6. Beispiel. Eine eiserne Schlauder hat einen rechtwinkligen Querschnitt von $1\frac{3}{4}$ Duodec.-Zoll Länge und $1\frac{1}{2}$ Duodec.-Zoll Breite, oder ist, wie man gewöhnlich sagt, $1\frac{3}{4}$ auf $1\frac{1}{2}$ Zoll dd stark, welches ist die Fläche ihres Querschnittes a) in □ dd Zoll, und b) in □dec.-Zoll?

Antwort:

a) $= 1{,}75 \times 1{,}5 = 2{,}625$ □Zoll dd.

Um den Querschnitt in Dec.-□Zollen zu erhalten, muß man die gegebenen dd Maße in Dec.-Maße verwandeln. Da ein dd Zoll (nach 57) = 0,8333... Dec.-Zoll, so sind 1,75 dd Zolle = 1,75 × 0,833.. = 1,45722..; und $1\frac{1}{2}$ dd Zolle = 1,5 × 0,833.. = 1,25 Dec.-Zolle; daher ist der Querschnitt,

b) = 1,4572 × 1,25 = 1,8215 □Zoll dec., oder 1 □Zoll 82 □Linien dec. = 0,0182 □′.

99. Ist der Inhalt eines Rechtecks und eine der beiden Seiten gegeben, so findet man die andere, wenn man den Inhalt mit der gegebenen Seite dividirt.

Z. B. Ein rechtwinkliger Garten soll 48 □Ruthen halten und 120′ lang werden, welches wird seine Breite?

Antwort:

48 □Ruthen = 48 × 100 □′ = 4800 □′

Daher die Breite $= \frac{4800}{120} = 40'$.

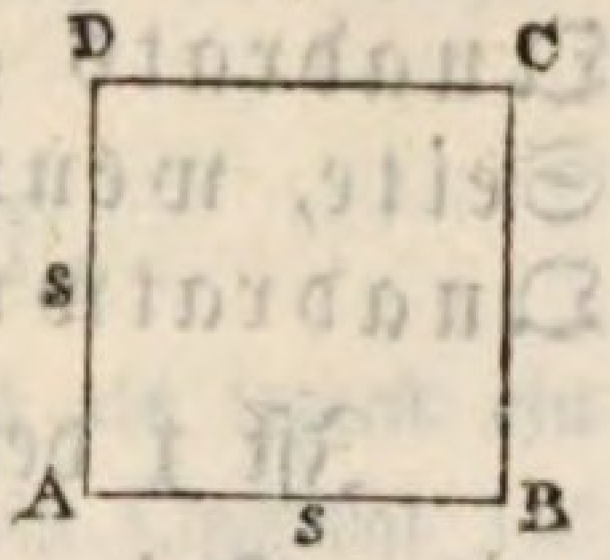
2. Beispiel. In einem rechtwinkligen Gebäude von 22,5′ innerer Breite soll ein bisher zu kleines Schulzimmer erweitert und für 125 Kinder Platz gewonnen werden, wie lang wird das neue Schulzimmer bei 22,5′ Breite werden müssen, wenn für 1 Kind 5 □′ Raum incl. Gängen ꝛc. gerechnet werden muß?

Antwort: Das Zimmer muß 125 × 5 = 625 □′ Fläche erhalten, daher ist seine Länge bei 22,5′ Breite

$$= \frac{625}{22,5} = 27,77'.$$

100. Der Flächeninhalt eines **Quadrats** wird gefunden, wenn man die Seite

desselben mit sich selber multiplizirt, oder in's Quadrat erhebt.



Ist s die Seite eines Quadrats ABCD, so ist sein Flächeninhalt

$$f = s \times s = s^2$$

Ist z. B. die Seite eines Quadrats 18′, so ist dessen Flächeninhalt

$$f = 18 \times 18 = 18^2 = 324 \, \square'.$$

2. Beispiel. Ein würfelförmiger Brunnentrog hat innen 2,5′ Länge, Breite und Tiefe; welches ist seine innere Fläche?

Antwort:

$$5 \times 2{,}5^2 = 5 \times 2{,}5 \times 2{,}5 = 31{,}25 \, \square'.$$

3. Beispiel. Eine eichene Säule ist $\frac{3}{4}$ Fuß im Quadrat stark, welches ist ihr Querschnitt?

Antwort: $0{,}75 \times 0{,}75 = 0{,}5625 \, \square'$ oder 56 □Zoll 25 □Linien dec.

4. Beispiel. Ein quadratischer Raum von 26,4′ Seite soll mit quadratischen Steinplatten von 1,1′ Seite gepflastert werden, wie viele Platten werden nöthig sein?

Antwort: Die zu pflasternde Fläche mißt

$$26{,}4 \times 26{,}4 = 696{,}96 \, \square'.$$

Die Fläche einer Steinplatte ist:

$$1{,}1 \times 1{,}1 = 1{,}21 \, \square'$$

Zur Pflasterung der 696,96 □′ großen Fläche sind daher nöthig:

$$\frac{696{,}96}{1{,}21} = 576 \text{ Stück.} \text{ —}$$

101. Wenn der Flächeninhalt eines Quadrats gegeben ist, so findet man dessen Seite, wenn man aus dem Flächeninhalt die Quadratwurzel auszieht.

Ist f der Flächeninhalt eines Quadrats, so ist dessen Seite $s = \sqrt{f}$.

Hat z. B. ein Quadrat 4 □Ruthen = 400 □′, so ist seine Seite

$$s = \sqrt{400} = 20'.$$

2. Beispiel. Ein Gebäude soll 34225 □′ Grundfläche erhalten und von quadratischer Form sein, wie groß wird dessen Seite sein müssen?

Antwort: $\sqrt{34225} = 185'$.

Hieher gehört auch die Lösung der Aufgabe: Wenn von einem Rechteck der Flächeninhalt und das Verhältniß der beiden Seiten gegeben ist, die Größe dieser beiden Seiten zu finden.

3. Beispiel. Ein Zimmer soll aus irgend einem Grunde doppelt so lang als breit werden, und 840,5 □′ Flächeninhalt erhalten, wie lang und breit wird dasselbe sein müssen?

Auflösung. Wenn ein Rechteck doppelt so lang als breit ist, so läßt sich dasselbe als aus zwei unmittelbar zusammengestoßenen Quadraten zusammengesetzt betrachten, oder umgekehrt: Das Rechteck gibt, der Quere nach halbirt, zwei Quadrate. Der halbe Flächeninhalt des 840,5 □′ großen Zimmers ist daher ein Quadrat von 420,25 □′; und dessen Seite

$$\sqrt{420{,}25} = 20{,}5'$$

ist die schmale Seite des Rechtecks, oder die gesuchte Breite des Zimmers, das Doppelte davon = 41,0′ die gesuchte Länge.

Probe: 41 × 20,5 = 840,5 □′.

Ein Quadrat hat einen größeren Inhalt als irgend ein Rechteck von gleichem Umfange. Hat z. B. ein Quadrat 12′ Seite, so ist sein Umfang = 4 × 12 = 48′; seine Fläche = 12 × 12 = 144 □′. Ein Rechteck aber von 18′ Länge und 6′ Breite, dessen Umfang = 2 × 18 + 2 × 6 = 36 + 12 = 48′, also eben so groß ist, als der des Quadrats, hat nur 18 × 6 = 108 □′ Flächeninhalt. Ein vierseitiger Raum erfordert also um so weniger Mauern zur Einschließung, je mehr er sich einem Quadrate nähert.

102. Ueber die Berechnung der Fläche eines Rechtecks oder Quadrats, dessen Seite kleiner als 1 Fuß ist, muß für den Anfänger noch Folgendes bemerkt werden.

Sind beide Seiten eines Rechtecks größer als 1 Fuß, so muß auch der Flächeninhalt größer als 1 □Fuß werden. Ist dagegen eine Seite 1 Fuß und die andere kleiner als 1 Fuß, oder sind beide Seiten kleiner als 1 Fuß, so kann auch die Fläche nur ein Bruchtheil eines □Fußes sein. Ist z. B. ein Backstein 1 Fuß lang, $\frac{1}{2}$ Fuß oder 0,5′ breit, und $\frac{1}{4}$′ oder 0,25′ dick, so ist seine breite Fläche = 1 × $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ □′ oder in Dec.-Maß 1,0 × 0,5 = 50 □″ = 50 □Zoll dec. Die Fläche der langen schmalen Seite ist 1 × $\frac{1}{4}$ = $\frac{1}{4}$ □′ oder in Dec.-Maß 1,0 × 0,25 = 0,25 □′ = 25 □Zoll dec. Die dritte kurze schmale Fläche ist endlich $\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{4}$ = $\frac{1}{8}$ □Fuß oder in Dec.-Maß = 0,5 × 0,25 = 0,125 □′, das ist 12,5 oder 12$\frac{1}{2}$ □Zoll dec. groß.

Die Oberfläche eines Brettes von 20′ Länge und $\frac{3}{4}′ = 0{,}75′$ Breite ist $20 \times \frac{3}{4} = 15$ □′ oder in Dec.-Zahlen $20 \times 0{,}75 = 15$ □′. Bei $\frac{1}{2}′ = 0{,}5′$ Breite ist dessen Fläche $= 20 \times \frac{1}{2} = 10$ □′ oder in Dec.-Zahlen $= 20 \times 0{,}5 = 10$ □′ u. s. w.

Die Oberfläche eines Blechstreifens von 2′ Länge und 2 Dec.-Zoll oder 0,2′ Breite ist $= 2 \times 0{,}2 = 4$ □′. Bei 10′ Länge und $\frac{1}{2}$ Zoll $= 0{,}05′$ Breite ist die Fläche des Streifes $= 10 \times 0{,}05 = 0{,}5$ □′ oder 50 □″ dec.

Beim Quadrat ist die Fläche allemal ein Bruchtheil eines Quadratfußes, wenn die Seite des Quadrats kein ganzer Fuß ist. Hat ein quadratisches Pflasterstückel 9 Dec.-Zoll Seite, so ist seine Fläche $= 0{,}9 \times 0{,}9 = 0{,}81$ □′, oder 81 □Dec.-Zoll. Ist die Seite eines quadratischen Pflasterstückels $= \frac{1}{2}′$, so ist dessen Fläche $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ □′ oder in Dec.-Zahlen $0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$ □′ $= 25$ □Dec.-Zoll $= \frac{1}{4}$ □′. Die Ziffer des Flächenmaßes wird hier kleiner als die Ziffer des Längenmaßes, weil das Produkt zweier ächten Brüche oder Decimalbrüche immer kleiner ist als jeder der beiden Faktoren. (Vergl. 9.)

Umgekehrt: Ist die Fläche eines Quadrates, welches kleiner als 1 □Fuß ist, in □Fußen gegeben, so muß die Ziffer des Längenmaßes für die Seite, in Fußen ausgedrückt, größer herauskommen. Soll z. B. ein Quadrat $\frac{1}{4}$ □′ halten, so ist dessen Seite $= \frac{1}{2}′$, da $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ wieder $\frac{1}{4}$ gibt, oder in Dec.-Zahlen: $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$. Soll ein Quadrat $\frac{3}{4}$ □′ oder 0,75 □′ halten, so wird die Seite $\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}866\,..$

Ist die Fläche eines Quadrates 0,81 □′, so ist dessen Seite $= \sqrt{0,81} = 0,9$, wie es sein muß, da 9 Dec.-Zoll Seite $9 \times 9 = 81$ □ Dec.-Zoll Fläche gibt. —

Zur Einübung von Aufgaben dieser Art, deren Lösung erfahrungsgemäß bei den Meisterprüfungen auch solchen Bauhandwerkern, welche nicht zu den Anfängern gezählt sein wollen, Schwierigkeiten zu verursachen pflegt, folgen hier einige Beispiele, an denen Jeder seine Kräfte prüfen mag.

103. Uebungsaufgaben.

1. Beispiel. Eine Küche von 21′ Länge 18′ Breite soll mit quadratischen Pflasterziegeln von $\frac{3}{4}$′ Seite gepflastert werden; wie viele Pflasterziegel werden (ohne Rücksicht auf Fugen und Abfall) nöthig sein?

Antwort: $\frac{21 \times 18}{(0,75)^2} = 672$ Stück.

2. Beispiel. Ein Hausfletz von 40′ Länge 5′ Breite soll mit quadratischen 10 dd Zoll großen Platten belegt werden, wie viele sind nöthig?

Antwort: 288 Stück.

Bemerkung. Ist es hier vortheilhafter, mit Decimalbrüchen oder mit gemeinen Brüchen zu rechnen?

3. Beispiel. Ein Kirchenschiff von 87,5′ Länge und 55′ Breite ist mit quadratischen Platten von 15″ dd Seite zu belegen, wie viele sind nöthig?

Antwort: 3080 Stück.

4. Beispiel. Ein Dachboden von 81′ Länge

$45\frac{1}{2}'$ Breite ist mit $18'$ langen $13''$ dd breiten Brettern zu belegen, wie viele sind nöthig?

Antwort: 189 Stück.

Bemerkung. Beisp. 3 u. 4 sind einmal mit Decimalzahlen, das andre Mal mit gemeinen Brüchen zu berechnen.

5. Beispiel. Wie viele Backsteine von $1'$ Länge $0{,}5'$ Breite $0{,}25'$ Dicke gehen

a) auf eine □Ruthe 1 Stein ($= 1{,}0'$) starke Backsteinmauer, wenn die Mörtelfugen nicht gerechnet werden? Antwort: 800 Stück.

b) Wie viele auf eine $\frac{1}{2}$ Stein ($= 0{,}5'$) starke Mauer? Antwort: 400 Stück.

6. Beispiel. Wie viele Backsteine von $1'$ Länge $0{,}5'$ Breite $0{,}25'$ Dicke gehen auf 1 □Ruthe Backsteinmauer, wenn die Mörtelfuge zu $\frac{1}{2}$ Dec.-Zoll angenommen wird,

a) bei einer 1 Stein ($= 1{,}0'$) starken Mauer?
Antwort: 776,5 Stück;

b) bei einer $\frac{1}{2}$ Stein ($= 0{,}5'$) starken Mauer?
Antwort: 373,4 Stück.

7. Beispiel. Wie viele Backsteine von $14''$ dd Länge $6\frac{3}{4}''$ dd Breite und $3\frac{1}{8}''$ dd Dicke gehen auf eine □Ruthe Backsteinmauerwerk,

a) wenn dieselbe 1 Stein stark,
b) " " $\frac{1}{2}$ " "
c) " " $\frac{1}{4}$ " " oder aus gestellten Steinen hergestellt wird, und wenn das Mörtelband zu $\frac{1}{2}''$ dd Stärke angenommen wird?

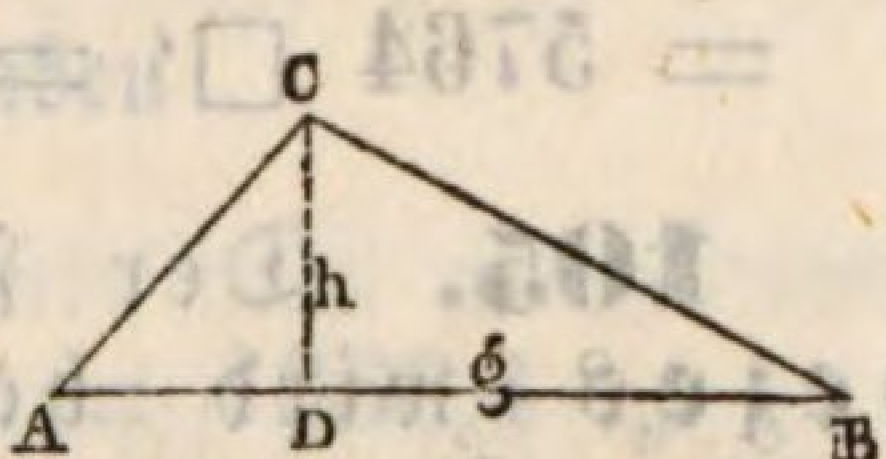
Antwort:

a) = 548; b) = 274; c) = 137 Steine.

Bemerkung. Backsteine dürfen, wenn ihre Länge gegeben ist, keineswegs eine beliebige Breite und Dicke erhalten, wenn sie einen richtigen Verband geben sollen. Dieser ergibt sich nur, wenn die Länge des Steins zwei Breiten plus der Mörtelfuge, und wenn die Breite des Steins zwei Dicken plus der Mörtelfuge gleich ist. Ist der Stein 14″ lang, die Mörtelfuge gleich $\frac{1}{2}$ Zoll, so ergibt sich die richtige Breite hienach zu $6\frac{3}{4}$, die Dicke zu $3\frac{1}{8}$ Zoll.

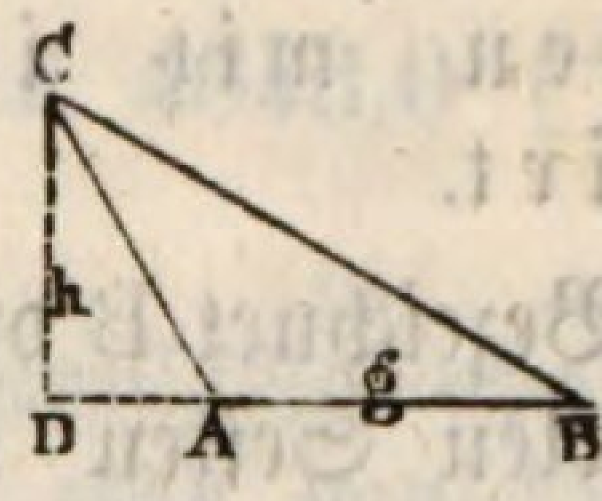
104. Der Flächeninhalt eines **Dreiecks** wird berechnet, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplizirt und das Produkt durch 2 dividirt.

Die Höhe eines Dreiecks ABC ist die senkrechte Entfernung CD der Spitze C von der Grundlinie AB, daher nicht mit den Seiten AC, BC des Dreiecks zu verwechseln.



Bezeichnet g die Grundlinie des Dreiecks, h dessen Höhe, so ist sein Flächeninhalt

$$f = \frac{g \times h}{2}.$$



Z. B. Die Walmfläche eines Daches hat an der Dachrinne 36′, zur Sparrenlänge 24′, welches ist der Inhalt der Walmfläche?

Antwort:

$$f = \frac{36 \times 24}{2} = 36 \times 12 = 432 \ \square'$$

$$= 4{,}32 \ \square\text{Ruthen}.$$

Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks wird gefunden, wenn man die beiden Katheten (die Seiten, welche den rechten Winkel einschließen) mit einander multiplizirt und das Produkt mit 2 dividirt.

Jedes Dreieck ist daher gerade halb so groß als das Rechteck, welches dieselbe Grundlinie und dieselbe Höhe hat.

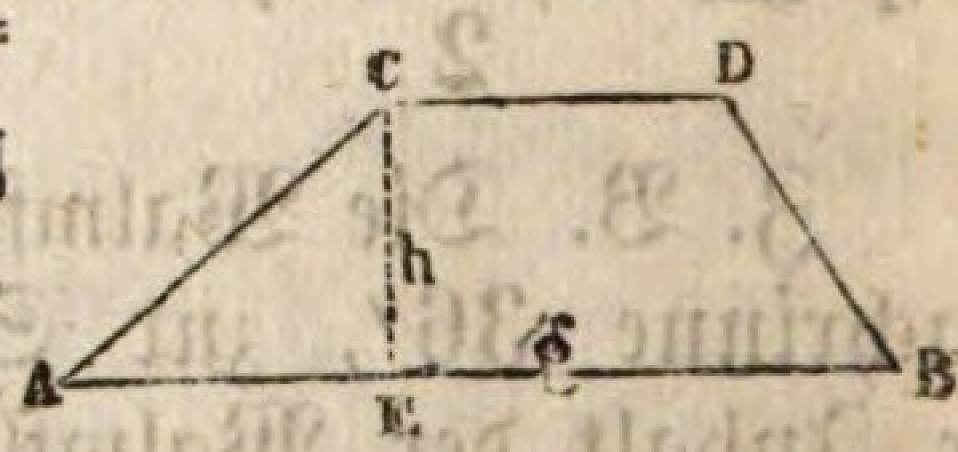
Aufgabe. Welches ist die äußere Verputzfläche eines Hauses von 65′ Länge 44′ Breite und 22′ Höhe bis zum Dachsims, wenn das Haus 2 Giebel und ein Winkeldach hat?

Antwort: Da die Höhe des Giebels gleich der halben Breite des Hauses ist, so ist die gesuchte Fläche incl. Thüren und Fenster

$$= 2 \times (65 + 44) \times 22 + 44 \times 22$$
$$= 5764 \ \square' = 57{,}64 \ \square \text{Ruthen.}$$

105. Der Flächeninhalt eines **Trapezes** wird berechnet, wenn man die halbe Summe der beiden parallelen Seiten mit ihrer Entfernung multiplizirt.

Bezeichnet B die größere, b die kleinere der beiden parallelen Seiten oder Grundlinien und h ihre Entfernung oder die Höhe des Trapezes, so ist der Inhalt f des Trapezes



$$f = \left(\frac{B + b}{2}\right) \times h.$$

1. Beispiel. Die Langseite eines Daches habe an der Dachrinne 65′, am First 35′, die Sparrenlänge sey 21′, welches ist die Dachfläche? Antwort:

$$f = \left(\frac{65 + 35}{2}\right) \times 21 = \frac{100}{2} \times 21 = 50 \times 21$$
$$= 1050 \ \square' = 10{,}50 \ \square \text{Ruthen.}$$

2. Beispiel. Ein rechtwinkliges Haus von 65′ Länge 44′ Breite habe ein Winkeldach mit 2 Walmen, wie groß ist seine gesammte Dachfläche?

Auflösung: Da beim Winkeldach die Walmen beiderseits um die halbe Breite des Hauses sich einwärts tragen, so ist die Firstlänge $= 65 - 2 \times 22 = 65 - 44 = 21'$; die Sparrenlänge ist $= 22 \times 1{,}414' .. = 31{,}1$; die beiden Langseiten (trapezförmigen Flächen) des Daches haben daher zusammen

$$2 \times \left(\frac{65 + 21}{2}\right) \times 31{,}1 = 2674{,}6 \;\square';$$

die beiden Walmen (Dreiecke) haben zusammen

$$2 \times \left(\frac{44 \times 31{,}1}{2}\right) \qquad = 1368{,}4 \;\text{„}$$

das ganze Dach sohin $= 4043{,}0 \;\square'$
$= 40{,}43 \;\square$ Ruthen.

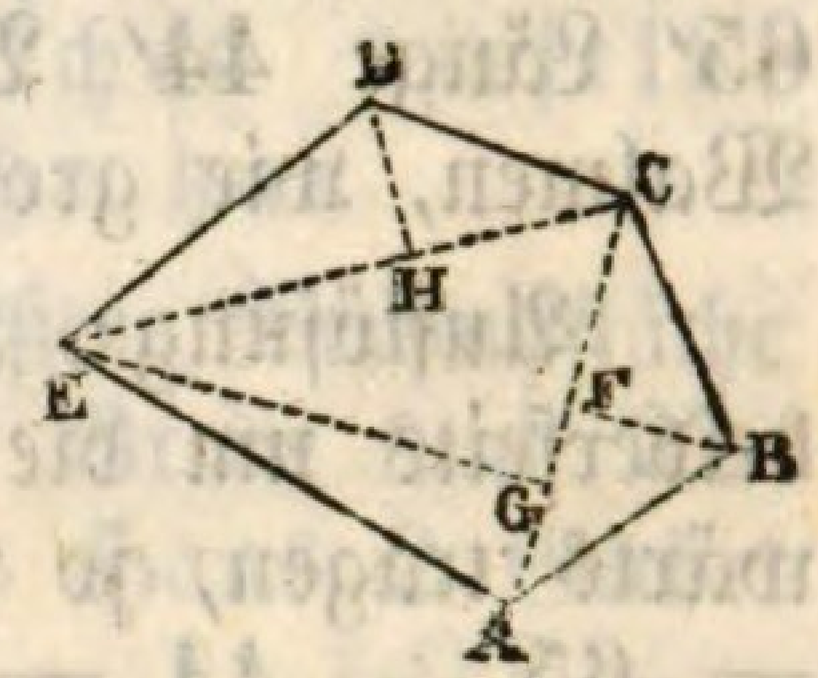
Kürzer erhält man den Gesammtflächeninhalt des Winkeldaches mit Walmen, wenn man dasselbe als ein Giebeldach berechnet. Alsdann erhält man für die beiden rechteckigen Giebeldachflächen zusammen

$2 \times (65 \times 31{,}1) = 4043 \;\square'$ wie vorhin.

Diese Abkürzung der Rechnung ist jedoch nur beim Winkeldach zulässig.

106. Den Inhalt eines **unregelmäßigen Vielecks** oder **Polygons** findet man, wenn man es durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt, den Inhalt eines jeden einzelnen Dreiecks berechnet, und diese Inhalte addirt.

Ist z. B. der Flächeninhalt des unregelmäßigen Fünfecks ABCDE zu berechnen, so zerlegt man es durch die Diagonalen AC, EC in die 3 Dreiecke ABC, ACE und CDE, fällt auf die Diagonalen AC, EC als Grundlinien die zugehörigen Höhen BF, EG und DH senkrecht, mißt die Linien AC, BF, EG, EC und DH, berechnet die 3 Dreiecke und addirt ihre Flächeninhalte. Hienach ist der Flächeninhalt des Fünfecks ABCDE



$$f = \tfrac{1}{2}\,(AC \times BF) + \tfrac{1}{2}\,(AC \times EG) + \tfrac{1}{2}\,(EC \times DH)$$

oder, wenn man die Division mit 2 zuletzt vornimmt,

$$f = \tfrac{1}{2}\,((AC \times BF) + (AC \times EG) + (EC \times DH)).$$

Es seyen die beiden Grundlinien AC = 150′, CE = 200′, die zugehörigen Höhen BF = 60′, EG = 100′, DH = 80′; so ist der Inhalt des Fünfecks

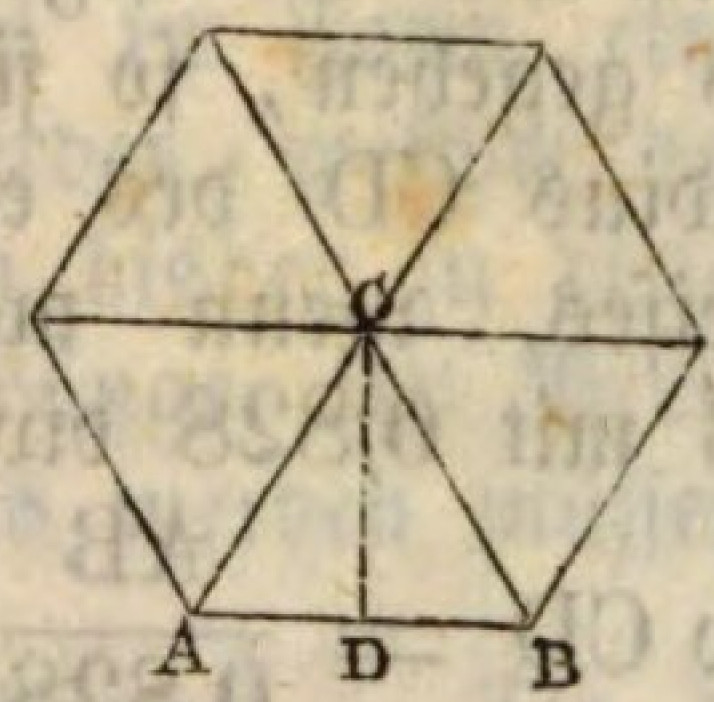
$$f = \tfrac{1}{2}\,((150 \times 60) + (150 \times 100) + (200 \times 80))$$
$$= \tfrac{1}{2} \times (9000 + 15000 + 16000)$$
$$= \tfrac{1}{2} \times 40000 = 20000 \,\square' = 200 \,\square \text{ Ruthen.}$$

107. Der Inhalt eines **regelmäßigen Vielecks** wird berechnet, wenn man dasselbe durch die Diagonalen in lauter gleiche gleichschenklige Dreiecke zerlegt, den Inhalt eines solchen gleichschenkligen Dreiecks berechnet, und mit der Anzahl der Seiten des Vielecks multiplizirt.

Außer dem regelmäßigen Dreieck und Viereck

kommen in der Praxis noch das regelmäßige Sechseck und Achteck vor.

Ist die Seite AB des regelmäßigen Sechseckes (welche den Seiten AC und BC oder dem Radius des umschriebenen Kreises gleich ist) gegeben, so findet man die Senkrechte CD vom Mittelpunkt auf diese Seite (oder den Radius des eingeschriebenen Kreises), wenn man die Seite AB mit $\sqrt{\frac{3}{4}}$ oder $\sqrt{0,75}$ d. i. mit 0,866 multiplizirt.



Der Inhalt des regelmäßigen Sechsecks ist daher

$$f = 6 \times \left(\frac{AB \times DC}{2}\right) = 6 \times \left(\frac{AB \times 0,866\,AB}{2}\right)$$
$$= 2,598 \times \overline{AB}^2.$$

Ist z. B. die Seite AB eines regelmäßigen Sechsecks 10′, so ist der Radius des eingeschriebenen Kreises CD = 0,866 × 10′ = 8,66′; der Flächeninhalt des Sechsecks daher

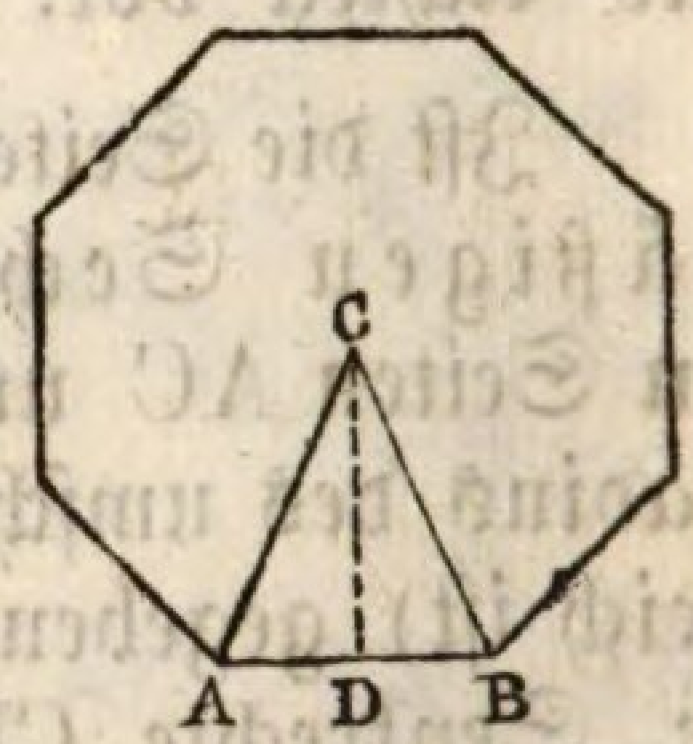
$$f = 6 \times \left(\frac{10 \times 8,66}{2}\right) = 6 \times 10 \times 4,33$$
$$= 259,8 \,\square'.$$

Oder kürzer:

$$f = 2,598 \times 10^2 = 2,598 \times 100 = 259,8 \,\square'.$$

108. Ist beim regelmäßigen Achteck der Radius CD des eingeschriebenen Kreises gegeben, so findet man die Seite AB desselben, wenn man den Radius CD des eingeschriebenen Kreises mit 0,828

multiplizirt. Es ist also AB = 0,828 × CD. Ist dagegen die Seite AB des regelmäßigen Achtecks gegeben, so findet man den Radius CD des eingeschriebenen Kreises, wenn man die Seite AB mit 0,828 dividirt. Es ist also $CD = \frac{AB}{0{,}828}$.



Der Flächeninhalt des regelmäßigen Achtecks ist daher

$$f = 8 \times \left(\frac{AB \times CD}{2}\right) = 8 \times \left(\frac{AB \times \frac{AB}{0{,}828}}{2}\right)$$

$$= 8 \times \left(\frac{\overline{AB}^2}{2 \times 0{,}828}\right) = 4{,}828 \times \overline{AB}^2.$$

Ist z. B. die Seite AB eines regelmäßigen Achtecks = 10′, so ist der Radius CD des eingeschriebenen Kreises

$$CD = \frac{10}{0{,}828} = 12{,}07'$$

und der Flächeninhalt des regelmäßigen Achtecks

$$f = 8 \times \left(\frac{10 \times 12{,}07}{2}\right) = 40 \times 12{,}07 = 482{,}8 \,\square'.$$

Oder kürzer:

$$f = 4{,}828 \times 10^2 = 4{,}828 \times 100 = 482{,}8 \,\square'.$$

Hieher gehört auch die Lösung der umgekehrten Aufgabe: Wenn die Fläche eines regelmäßi-

gen Achtecks gegeben ist, dessen Seite zu finden.

Z. B. Es soll ein Tanzsaal in Form eines achteckigen Pavillons entworfen werden, welcher denselben Flächenraum enthält, wie ein bisher zu diesem Zweck benützter Raum von 90′ Länge 40′ Breite, wie groß wird die Seite des Achtecks werden müssen?

Auflösung: 1) durch Probiren. Da die Flächeninhalte ähnlicher Figuren, also auch der regelmäßigen Achtecke, wachsen wie die Quadrate der Seiten, und bei 10′ Seite das regelmäßige Achteck 482,8 □′ hält, so wird dasselbe bei 20′ Seite $4 \times 482{,}8 = 1932{,}2$ □′; bei 30′ Seite $9 \times 482{,}8 = 4345{,}2$ □′ u. s. w. enthalten. Da nun das zu construirende Achteck $90 \times 40 = 3600$ □′ halten soll, so sieht man, daß dessen Seite nahezu 30′ groß werden muß. Probirt man nun 27 und 28′ Seite, so findet man nach der gegebenen Regel die Fläche des Achtecks

$$f = 4{,}828 \times 27^2 = 3519{,}6 \ \square'$$

$$f' = 4{,}828 \times 28^2 = 3786{,}7 \ ''$$

es wird also die gesuchte Achtecksseite zwischen 27 und 28 Fuß liegen, daher nahezu 27,5 Fuß sein, was man durch weiteres Probiren so genau als nothwendig finden kann.

2. Direkte Auflösung. Da nach der gegebenen Regel der Flächeninhalt des regelmäßigen Achtecks gleich dem 4,828fachen Quadrat der Achtecksseite ist, so wird umgekehrt die Achtecksseite aus dem Flächeninhalt gefunden, wenn man diesen mit 4,828 dividirt und aus dem Quotienten die Quadratwurzel

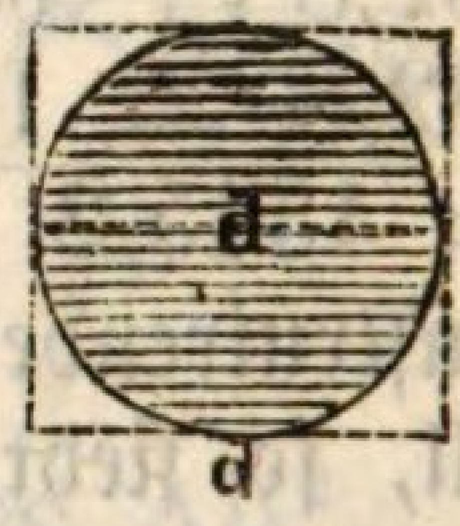
zieht. Nach der obigen Bezeichnung ist daher die Achtecksseite

$$AB = \sqrt{\frac{f}{4,828}} = \sqrt{\frac{3600}{4,828}} = \sqrt{745,8} = 27,3'.$$

109. Der Flächeninhalt eines **Kreises** wird gefunden, wenn man das Quadrat des Durchmessers mit 3,14 multiplizirt und mit 4 dividirt.

Bezeichnet d den Durchmesser des Kreises, so ist dessen Flächeninhalt

$$f = \frac{3,14 \times d^2}{4} = 0,785 \times d^2.$$



Weil d^2 der Flächeninhalt des um den Kreis beschriebenen Quadrats, und 0,785 etwas größer ist als 0,75 oder $\frac{3}{4}$, so kann man auch den Satz aussprechen:

Die Kreisfläche ist etwas größer als 3 Viertel der Fläche des umschriebenen Quadrats.

1. Beispiel. Welches ist die Oberfläche f eines Kreises von 1′ Durchmesser? Antwort:

$$f = \frac{3,14 \times 1^2}{4} = \frac{3,14}{4} = 0,785 \;\square'$$

$$= 78,5 \;\square'' \text{ dec.}$$

Während also das umschriebene Quadrat von 1′ Seite 1 □′ oder 100 □″ dec. Inhalt hat, hat der Kreis von 1′ Durchmesser nur 78,5 □″ dec. Flächeninhalt.

2. Beispiel: Welches ist der Querschnitt eines runden Baumstammes von 15 dec. Zoll oder 1,5′ Durchmesser?

Antwort:

$$f = \frac{3{,}14 \times 1{,}5^2}{4} = \frac{3{,}14 \times 2{,}25}{4} = 1{,}766 \,\square'.$$

3. Beispiel. Der Durchmesser einer rund geschmiedeten Eisenschlauder ist 3″ dd, welches ist ihr Querschnitt in □ Fußen?

Antwort: 3″ dd sind = 0,25′; der Flächeninhalt f des Kreises von 0,25′ Durchmesser ist daher

$$f = \frac{3{,}14 \times 0{,}25^2}{4} = 0{,}0490 \,\square'$$

oder 4,9 □″ dec.

Will man sehr genau rechnen, so nimmt man 3,1416 statt 3,14 in Rechnung.

110. Die Fläche eines **Kreisausschnittes** (Sektors) ACBD wird gefunden, wenn man den Bogen ADB mit dem halben Radius CB multiplizirt.



Der Inhalt eines **Kreisabschnittes** (Segments) ADB wird berechnet, wenn man vom Inhalte des Ausschnittes ACBD das Dreieck ABC abzieht.

111. Ist der Flächeninhalt eines Kreises gegeben, so findet man daraus den Durchmesser, wenn man den Flächeninhalt

mit 4 multiplizirt, alsdann mit 3,14 dividirt, und aus dem Quotienten die Quadratwurzel auszieht.

Bezeichnet f den Flächeninhalt eines Kreises, so ist dessen Durchmesser d

$$d = \sqrt{\frac{4 \times f}{3,14}} = \sqrt{\frac{f}{0,785}}$$

1. Beispiel. Eine rund geschmiedete Eisenschlauder soll 3 □″ dec. Querschnitt erhalten, welches wird ihr Durchmesser seyn müssen? Antwort:

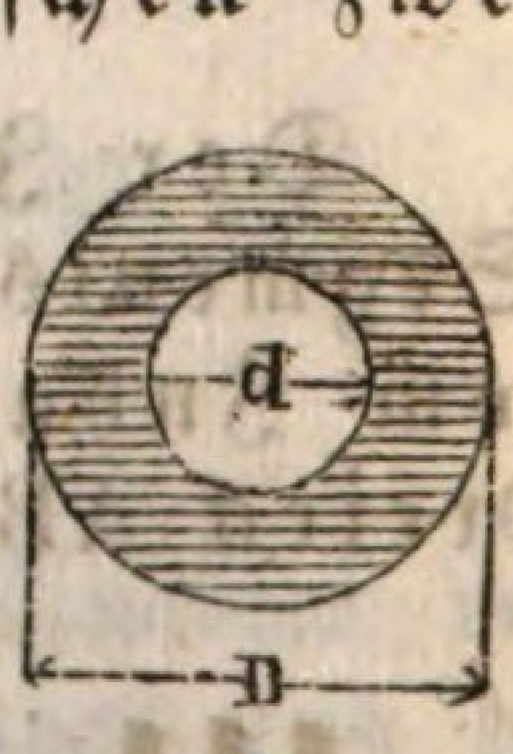
$$d = \sqrt{\frac{4 \times 3}{3,14}} = \sqrt{\frac{3}{0,785}} = \sqrt{3,82}$$

$$= 1,9'' \text{ dec.}$$

2. Beispiel. Ein Kreis soll 1 □Ruthe oder 100 □′ Fläche enthalten, wie groß ist sein Durchmesser? Antwort:

$$d = \sqrt{\frac{4 \times 100}{3,14}} = \sqrt{127,39} = 11,26'.$$

112. Der Flächeninhalt zwischen zwei concentrischen Kreisen, oder der Inhalt einer **Ringfläche** wird gefunden, wenn man die kleinere Kreisfläche von der größeren abzieht; oder: wenn man vom Quadrat des größeren Durchmessers das Quadrat des kleinern Durchmessers abzieht, den Rest mit 3,14 multiplizirt und mit 4 dividirt.



Die Ringfläche ist daher, wenn D und d die beiden Durchmesser bezeichnen,

$$f = \frac{3,14 \times (D^2 - d^2)}{4}.$$

1. Beispiel. Welches ist der Querschnitt des Mauerwerks eines runden Brunnens von 8′ äußerem und 6′ innerem Durchmesser?

Antwort: Der gesuchte Querschnitt f ist

$$f = \frac{3,14 \times (8^2 - 6^2)}{4} = \frac{3,14 \times (64 - 36)}{4}$$

$$= \frac{3,14 \times 28}{4} = 3,14 \times 7 = 21,98 \ \square'.$$

2. Beispiel. Ein hölzernes Brunnenrohr hat 13″ dd äußeren Durchmesser und ist 3″ dd weit gebohrt, welches ist die Fläche seines Querschnitts?

Antwort: 13″ dd ist = 1,0833′
3″ „ „ = 0,25′ daher

der gesuchte Querschnitt f

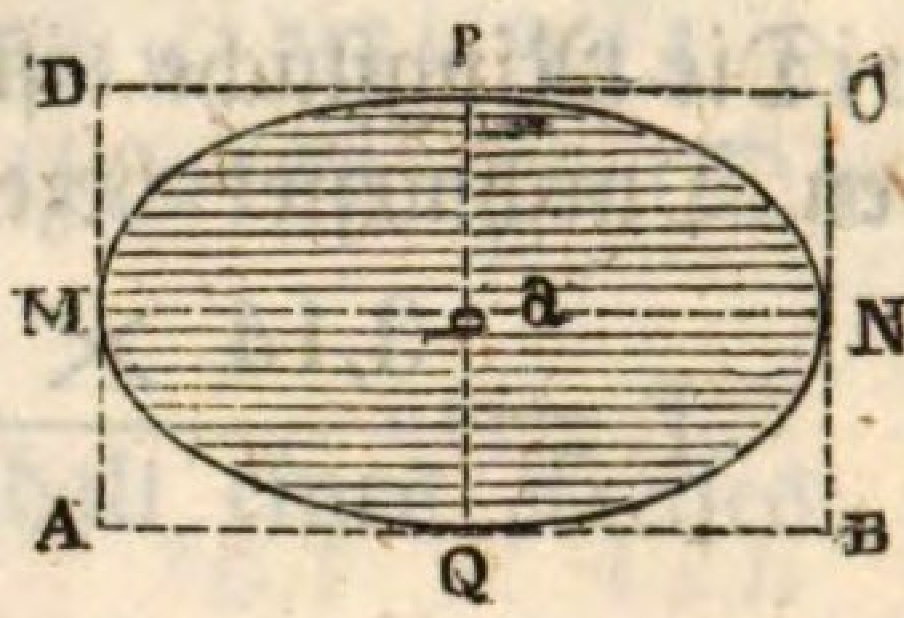
$$f = \frac{3,14 \times (1,0833^2 - 0,25^2)}{4} = \frac{3,14 \times 1,111}{4}$$

$$= 0,8721 \ \square'. -$$

113. Der Flächeninhalt einer **Ellipse** wird gefunden, wenn man das Produkt aus beiden Axen mit 3,14 multiplizirt und mit 4 dividirt.

Bezeichnet man die große Axe MN mit a, die

kleine Axe PQ mit b, so ist die Fläche der Ellipse



$$f = \frac{3,14 \times (a \times b)}{4}$$

$$= \frac{3,14}{4} \times \text{Rechteck } ABCD.$$

Die Ellipse ist für das umschriebene Rechteck das, was der Kreis für das umschriebene Quadrat ist.

Die Fläche der Ellipse ist daher etwas größer als 3 Viertel der Fläche des umschriebenen Rechtecks.

Der Umfang einer Ellipse kann nur durch Ausmessen mit dem Zirkel gefunden werden.

114. Den Inhalt der Seitenflächen eines **senkrechten Prisma's** findet man, wenn man den Umfang der Grundfläche mit der Höhe des Prisma's multiplizirt.

1. Beispiel. Ein Brunnenbassin in der Form eines regelmäßigen Achtecks hat 6′ Seite, 3′ Höhe; welches ist die äußere Wandfläche?

Antwort:

$$f = 8 \times 6 \times 3 = 144 \,\square'.$$

2. Beispiel. Ein eisernes Thurmkreuz hat einen vertikalen rechtwinkligen Stab von 3′ Länge, einen Querstab von 2′ Länge, die Stärke des Eisens ist 2 auf 3″ dd; welches ist die zu vergoldende sichtbare Oberfläche?

Antwort: Die Oberfläche des vertikalen Stabes (die beiden kleinen Endflächen des Querstabes einge-

rechnet) ist bei 10″ dd Umfang des Stabes und 3 × 12 = 36″ Länge

36 × 10 = . . 360 □″dd

hiezu die kleine Fläche am oberen Ende des Stabes mit 3 × 2 = . . . 6 ″ ″

Die Oberfläche des Querstabes ist bei 2 × 12 — 3 = 21″ Länge

21 × 10 = . . 210 ″ ″

Gesammtoberfläche . . . . . = 576 □″dd

oder $\frac{576}{144}$ = 4 □Fuß. —

115. Die krumme Oberfläche (Mantelfläche) eines **Cylinders** wird gefunden, wenn man den Umfang der Grundfläche mit der Höhe multiplizirt.

Ist d der Durchmesser, h die Höhe des Cylinders, so ist der Umfang der Grundfläche



$$u = 3{,}14 \times d;$$

die Mantelfläche daher

$$f = u \times h = 3{,}14 \times d \times h.$$

Z. B. Eine runde Säule von 3′ 9″ dd Durchmesser hat 24′ Höhe, welches ist ihre krumme Oberfläche?

Antwort: Es ist 3′ 9″ = $3\frac{3}{4}$ = 3,75′; daher die Mantelfläche

$$f = 3{,}14 \times 3{,}75 \times 24 = 282{,}60 \; □′.$$

Die gleiche Regel gilt auch für den hohlen Cylinder.

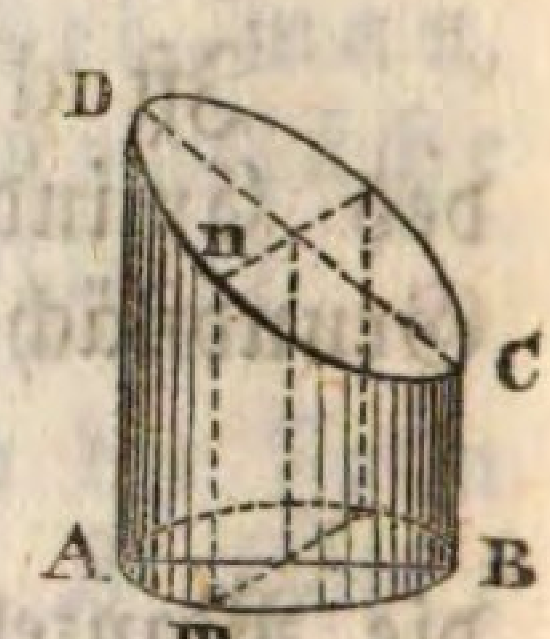
Z. B. Ein runder Thurm hat innen 18′ Durchmesser, 2′ Wandstärke und 35′ Höhe, welches ist die innere und äußere Verputzfläche?

Antwort: Der äußere Durchmesser ist $18 + 2 \times 2 = 22'$; der dazu gehörige Umfang ist $= 3,14 \times 22 = 69,08'$; der innere Umfang ist $= 3,14 \times 18 = 56,52$; die gesammte innere und äußere Mantelfläche des Cylinders ist daher

$$f = (69,08 + 56,52) \times 35 = 4396 \square'$$

oder $= 43,96$ □Ruthen. —

116. Die Mantelfläche eines **schief abgeschnittenen Cylinders** wird gefunden, wenn man den Umfang der Grundfläche (oder des senkrechten Querschnittes) mit der mittleren Länge des schief abgeschnittenen Cylinders multiplizirt.



Die Mantelfläche des schief abgeschnittenen Cylinders ABCD wird gefunden, wenn man den Umfang AmBA der Grundfläche mit dem arithmetischen Mittel aus der längsten und kürzesten Kante AD und BC, oder mit der mittleren Länge $mn = \frac{1}{2}(AD + BC)$ multiplizirt.

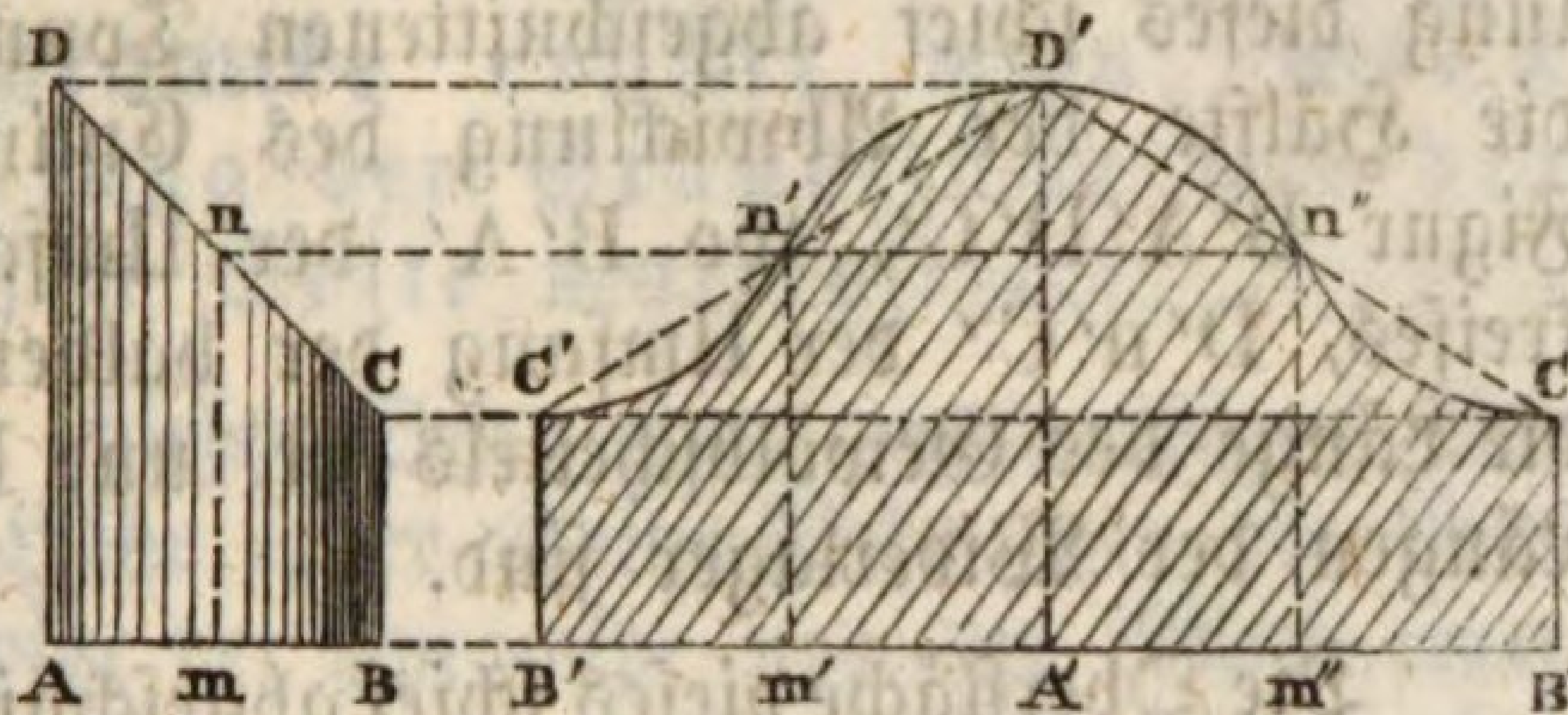
Z. B. Der Durchmesser AB sei 6′, AD = 20′ BC = 16′, so ist die mittlere Länge

$$mn = \frac{20 + 16}{2} = 18$$

und die Mantelfläche f des Cylinders

$$f = 3,14 \times 6 \times \left(\frac{20 + 16}{2}\right)$$
$$= 3,14 \times 6 \times 18 = 339,12 \square'.$$

Die Mantelfläche des schief abgeschnittenen Cylinders ABCD gibt abgewickelt die nebenstehende Figur $B'A'B''C''D'C'$, welche erhalten wird, wenn man den



Umfang der Grundfläche (den senkrechten Querschnitt des Cylinders) in beliebig viele gleiche Theile theilt, diese Theile und den ganzen Umfang in eine gerade Linie aufträgt, in den Theilpunkten Senkrechte errichtet, diese so lang macht, als die entsprechenden Seitenlinien (Kanten) des Cylinders und die Endpunkte durch eine krumme Linie verbindet. Macht man z. B. $B'm' = m'A' = A'm'' = m''B'' = \frac{1}{4}$ des Umfangs des Cylinders, und die Senkrechten $B'C' = B''C'' = BC$, $m'n' = m''n'' = mn$, $A'D' = AD$, und verbindet man $C'n'D'n''C''$ durch eine stetig gekrümmte Linie, wozu die Hilfslinien $C'D'$, $D'C''$, DD', $C'C''$ Anhaltspunkte geben, so ist die Figur $B'B''C''D'C'$ die Abwicklung des schiefen Cylinders.

Der Spängler wendet diese Construktion an, um die Schnittform des Bleches für das sog. Kniestück eines Ofenrohrs zu erhalten.

Dem Maurer und Steinhauer kommt diese Abwicklung beim schief abgeschnittenen Tonnengewölbe vor. Der halbe Cylinder AmBCnD (siehe erste Figur) bildet ein schief abgeschnittenes Halbkreis-Tonnengewölbe, dessen senkrechter Querschnitt der Halbkreis AmB, dessen schiefer Schnitt die halbe Ellipse CnD ist, dessen Widerlager die Kanten BC, AD sind und dessen

Gewölb-Scheitel-Linie die Linie mn ist. Die Abwicklung dieses schief abgeschnittenen Tonnengewölbes ist die Hälfte der Abwicklung des Cylinders oder die Figur B′A′D′C′, wo B′A′ der Umfang des Halbkreises, D′n′C′ der Umfang der halben Ellipse, m′n′ die Länge des Gewölbscheitels ist, und B′C′, A′D′ die Längen der Widerlager sind.

Die Oberfläche dieses schief abgeschnittenen Tonnengewölbes wird nun erhalten, wenn man den Umfang B′m′A′ des Halbkreises AmB mit der mittleren Länge m′n′ (oder mit der Länge des Gewölbscheitels mn) multiplizirt.

Z. B. Ein schief abgeschnittenes Halbkreis-Tonnengewölbe habe 12′ inneren Durchmesser, 1,5′ Gewölbstärke und sei an einem Widerlager 24′, am andern 32′ lang, welches ist seine innere und äußere Gewölbfläche?

Antwort: Die mittlere Länge (die Scheitellänge) ist $= \frac{24 + 32}{2} = 28'$; der innere Umfang ist $= 12 \times 3{,}14 = 37{,}68$; der äußere Umfang ist $= (12 + 2 \times 1{,}5) \times 3{,}14 = 47{,}10$; die innere Gewölbfläche f ist daher

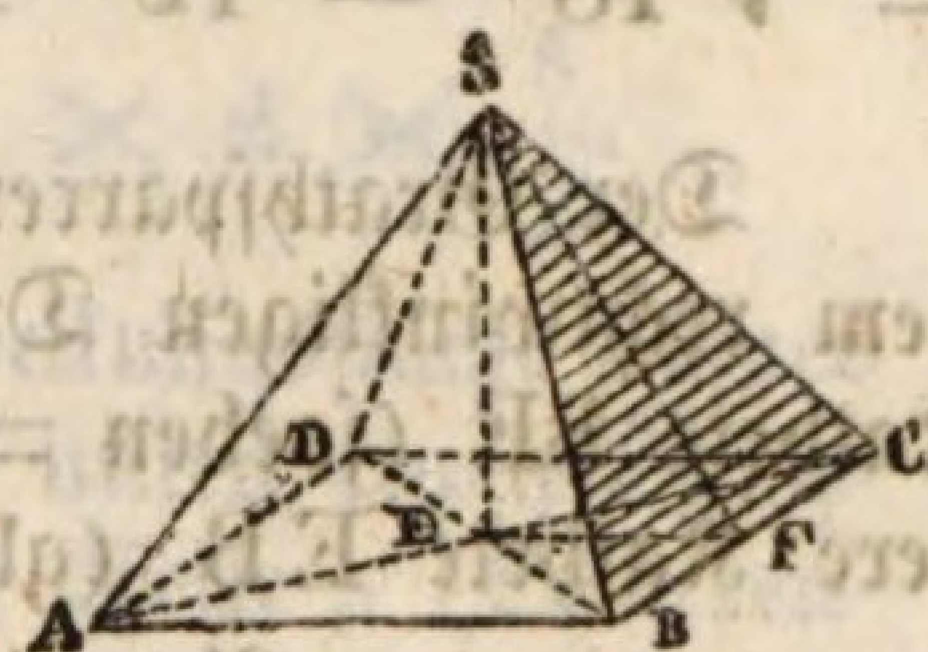
$$f = 12 \times 3{,}14 \times \left(\frac{24 + 32}{2}\right)$$
$$= 37{,}68 \times 28 = 1055{,}04 \;\square'$$

und die äußere Gewölbfläche f′ ist

$$f' = (12 + 2 \times 1{,}5) \times 3{,}14 \times \left(\frac{24 + 32}{2}\right)$$
$$= 47{,}10 \times 28 = 1318{,}8 \;\square'.$$

117. Die Mantelfläche einer regelmäßigen **Pyramide** erhält man, wenn man den Umfang der Grundfläche mit der halben schiefen Seite multiplizirt.

Unter der schiefen Seite einer regelmäßigen Pyramide ist die Höhe einer Seitenfläche oder die Entfernung der Spitze der Pyramide von der Mitte einer Seite der Grundfläche zu verstehen, und daher nicht mit der von der Spitze ausgehenden Kante zu verwechseln.



Ist ABCDS eine regelmäßige 4seitige Pyramide, so ist SE die Höhe, SB die Seitenkante (der Grathsparren *) und SF die schiefe Seite (der Sparren).

Beispiel. Ein 4seitiger quadratischer Thurm hat 24′ Seite (BC), die Länge des Sparrens SF (von der Spitze des Thurmdaches zur Mitte einer Thurmseite) beträgt 18′, welches ist die Fläche des 4seitigen Thurmdaches?

Antwort:

$$f = 4 \times 24 \times \frac{18}{2} = 864 \,\square' = 8{,}64 \,\square\text{Ruthen.}$$

Aufgabe. Wie wird aus der Quadratseite BC = 24′ und aus der Sparrenlänge SF = 18′ a) die Höhe ES des gegebenen Thurmdaches und

*) Man schreibt Grath- oder Gratsparren, aber nicht Gradsparren, da der Grathsparren seinen Namen nicht von der geraden Linie, sondern von dem Dachgrath, von der Dachkante hat, und man auch Rückgrath, Felsengrath &c. schreibt.

b) die Länge des Grathsparrens SB durch Rechnung gefunden?

Auflösung. Aus dem rechtwinkligen Dreieck EFS, in welchem die Hypothenuse SF = 18′ und die eine Kathete EF = der halben Quadratseite $= \frac{24}{2} = 12'$ gegeben ist, findet man: $ES = \sqrt{\overline{SF}^2 - \overline{EF}^2}$ $= \sqrt{18^2 - 12^2} = \sqrt{180} = 13{,}41'$.

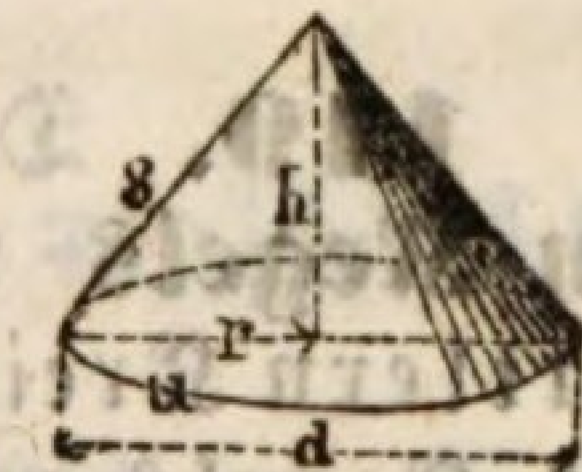
Der Grathsparren SB bildet die Hypothenuse in dem rechtwinkligen Dreieck SEB, in welchem die eine Kathete SE (soeben = 13,41 gefunden) und die andere Kathete EB (gleich der halben Diagonale des Quadrats) $= \frac{24 \times 1{,}414}{2} = 16{,}97$ ebenfalls bekannt ist, und berechnet sich gleichfalls nach dem pythagoräischen Lehrsatz:

$$SB = \sqrt{\overline{ES}^2 + \overline{EB}^2} = \sqrt{13{,}41^2 + 16{,}97^2}$$
$$= \sqrt{180 + 288} = \sqrt{468} = 21{,}63'. —$$

Noch kürzer läßt sich die Länge des Grathsparrens aus dem rechtwinkligen Dreieck SFB berechnen, in welchem die eine Kathete von dem Sparren SF = 18′, die andere Kathete von der halben Quadratseite BF = 12′ und die Hypothenuse von dem zu suchenden Grathsparren SB gebildet wird. Hienach berechnet sich dieser

$$SB = \sqrt{\overline{SF}^2 + \overline{FB}^2} = \sqrt{18^2 + 12^2}$$
$$= \sqrt{468} = 21{,}63' \text{ wie oben. —}$$

118. Die krumme Oberfläche (Mantelfläche) eines **Kegels** wird gefunden, wenn man den Umfang der Grundfläche mit der halben schiefen Seite des Kegels multiplizirt.



Bezeichnet d den Durchmesser der Grundfläche, h die Höhe, s die schiefe Seite, und u den Umfang der Grundfläche, so ist die Mantelfläche

$$f = u \times \frac{s}{2} = 3{,}14 \times d \times \frac{s}{2}.$$

Z. B. Wie groß ist die Eindeckungsfläche f eines kegelförmigen Thurmdachs, welches unten einen Durchmesser d von 16′ und eine schiefe Seite s (Sparrenlänge) von 40′ hat?

Antwort:

$$f = 16 \times 3{,}14 \times \frac{40}{2} = 1004{,}8 \,\square'$$

$$= 10{,}048 \,\square\text{Ruthen}.$$

Ist statt der schiefen Seite die Höhe h des Kegels gegeben, so findet man die schiefe Seite s nach dem pythagoräischen Lehrsatz. Es ist nämlich, wenn r den Radius der Grundfläche bedeutet, in dem rechtwinkligen Dreieck, welches die Höhe des Daches h, der Radius der Grundfläche r als Katheten und der Sparren s als Hypothenuse bilden,

$$s = \sqrt{h^2 + r^2}.$$

Ist z. B. die Höhe des runden Thurmdaches 12′, der Radius der Grundfläche 9′, so ist die schiefe Seite oder Sparrenlänge

$$s = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{225} = 15',$$

Die Dachfläche f also, weil der Durchmesser $= 2 \times 9 = 18'$ ist,

$$f = 3,14 \times 18 \times \frac{15}{2} = 423,9 \,\square' = 4,239 \,\square \text{Ruth.}$$

119. Die Mantelfläche des **abgestutzten Kegels** wird gefunden, wenn man den mittlern Kreisumfang mit der schiefen Seite des Kegels multiplizirt.

Der mittlere Kreisumfang wird gefunden, wenn man den mittleren Durchmesser mit 3,14 multiplizirt.



Bezeichnet D den Durchmesser der großen Grundfläche, d den Durchmesser der kleinen Grundfläche, s die schiefe Seite, u den mittleren Kreisumfang, und f die gesuchte Mantelfläche, so ist

$$u = \left(\frac{D + d}{2}\right) \times 3,14 \text{ und}$$

$$f = u \times s = 3,14 \times \left(\frac{D + d}{2}\right) \times s.$$

1. Beispiel. Es soll ein kupfernes Gefäß in Form eines abgestutzten Kegels verfertigt werden, dessen unterer Durchmesser 6,6′ dessen oberer 5,8′ und dessen Seitenlänge 4,5′ ist, wie viel Quadratfuß Kupferblech braucht man hierzu?

Antwort:

Der mittlere Kreisumfang ist:

$$u = 3,14 \times \left(\frac{D + d}{2}\right) = 3,14 \times \left(\frac{6,6 + 5,8}{2}\right)$$

$$= 3,14 \times 6,2 = 19,468'.$$

Folglich die Mantelfläche $= u \times s = 19{,}468 \times 4{,}5 = 87{,}606$ □′.

Die Bodenfläche ist ein Kreis, dessen Durchmesser 6′,6 ist, sohin seine Fläche

$$f = \frac{3{,}14 \times 6{,}6^2}{4} = \frac{3{,}14 \times 43{,}56}{4} = 34{,}194 \,\square'.$$

Daher der Bedarf an Kupferblech $= 87{,}606 + 34{,}194 = 121{,}800$ □′. —

2. Beispiel. Ein blecherner Kaminhut hat 3,5′ Höhe, oben 0,8′, unten 1,0′ Durchmesser, welches ist seine Oberfläche?

Antwort: Da die beiden Durchmesser nahezu gleich sind, so wird die schiefe Seite des Kaminhutes gleich der Höhe desselben sein, daher ist die gesuchte Oberfläche

$$f = 3{,}14 \times \left(\frac{0{,}8 + 1{,}0}{2}\right) \times 3{,}5 = 9{,}89 \,\square'.$$

3. Beispiel. Ein kegelförmiges Thurmdach hat unten 30,5′, an der darauf sitzenden Laterne 10,5′ Durchmesser und 20′ senkrechte Höhe; wie groß ist die schiefe Seite (Sparrenlänge) dieses einen abgestutzten Kegel bildenden Daches?

Auflösung. Zieht man den oberen Durchmesser von dem untern ab, und halbirt man den Rest, so erhält man $30{,}5 - 10{,}5 = 20 : 2 = 10'$ als die horizontale Kathete des rechtwinkligen Dreiecks, wozu die Höhe 20′ die andere Kathete und die schiefe

Seite des Daches (die Sparrenlänge) die Hypothenuse bildet; diese s ist daher

$$s = \sqrt{20^2 + 10^2} = \sqrt{500} = 22{,}36'$$

und die gesuchte Oberfläche f des Daches ist

$$f = 3{,}14 \times \left(\frac{30{,}5 + 10{,}5}{2}\right) \times 22{,}36$$

$$= 1439{,}3 \;\square' = 14{,}4 \;\square \text{Ruthen.} —$$

120. Die Oberfläche der **Kugel** wird gefunden, wenn man das Quadrat des Durchmessers mit 3,14 multiplizirt.

Ist d der Durchmesser der Kugel, f ihre Oberfläche, so ist diese

$$f = 3{,}14 \times d^2.$$

Denkt man sich die Kugel mit einer Ebene durch ihren Mittelpunkt geschnitten, oder in 2 Halbkugeln gespalten, so entsteht als Schnittfläche ein Kreis vom Durchmesser d der Kugel, welcher Centralschnitt heißt.

Ein solcher Kreis vom Durchmesser d hat als Flächeninhalt $f = \frac{3{,}14 \times d^2}{4}$ den vierten Theil der eben gefundenen Kugeloberfläche; folglich ist die Kugeloberfläche gleich 4 Kreisflächen von gleichem Durchmesser oder gleich 4 Centralschnitten der Kugel.

Die Oberfläche f der Halbkugel ist halb so groß oder

$$f = \frac{3{,}14 \times d^2}{2}$$

Die Oberfläche der Halbkugel ist daher auch gleich 2 größten Kreisen von gleichem Durchmesser, oder gleich 2 Centralschnitten der Kugel.

1. Beispiel. Der Durchmesser einer halbkugelförmigen Kuppel sey 36′, welches ist ihre Oberfläche? Antwort:

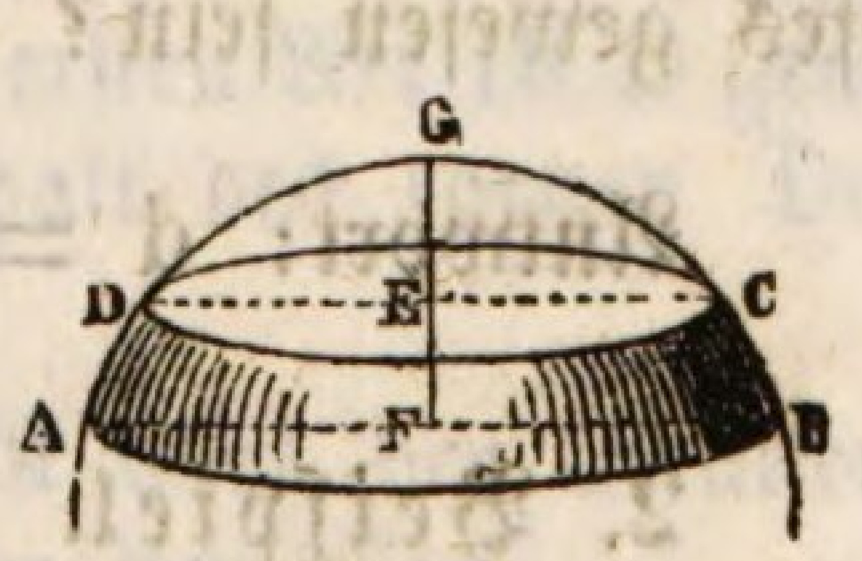
$$f = \frac{3{,}14 \times 36^2}{2} = \frac{3{,}14 \times 1296}{2} = 2034{,}72 \square'$$
$$= 20{,}3472 \square \text{Ruthen.}$$

2. Beispiel. Ein kupferner Thurmknopf von kugelförmiger Gestalt hat 2′ 7″ Durchmesser; welches ist die zu vergoldende Oberfläche?

Antwort: 2′ 7″ dd ist = 2,5833 . . . daher ist die Oberfläche des Knopfes

$$f = 3{,}14 \times 2{,}5833^2 = 20{,}9545 \square'.$$

121. Die krumme Oberfläche eines **Kugelbandes** (Kugelzone) ABCD wird gefunden, wenn man den größten Kreisumfang der Kugel mit der Höhe der Zone EF multiplizirt.



Z. B. Welches ist die Oberfläche einer Kugelzone, welche zu einer Kugel von 18′ Durchmesser gehört, und 6′ Höhe hat? Antwort:

$$f = 3{,}14 \times 18 \times 6 = 339{,}12 \square'.$$

Die krumme Oberfläche eines **Kugelabschnitts** (Käppchens) DCG wird ebenso

gefunden, wenn man den größten Kreisumfang der Kugel mit der Höhe EG des Käppchens multiplizirt.

Z. B. Welches ist die Oberfläche eines kugelförmigen Gewölbes von 9′ Radius und 6′ Höhe?

Antwort: Der Durchmesser ist 18′, also

$$f = 3,14 \times 18 \times 6 = 339,12 \square'.$$

122. Ist die Kugeloberfläche gegeben, und man soll daraus den Durchmesser suchen, so dividirt man die Fläche mit 3,14 und zieht aus dem Quotienten die Quadratwurzel.

Ist f die Kugeloberfläche, so ist der Durchmesser hiezu

$$d = \sqrt{\frac{f}{3,14}}$$

1. Beispiel. Zur Oberfläche eines kugelförmigen Thurmknopfes wurden 10 □′ Kupferblech verwendet, wie groß muß der Durchmesser des Knopfes gewesen sein?

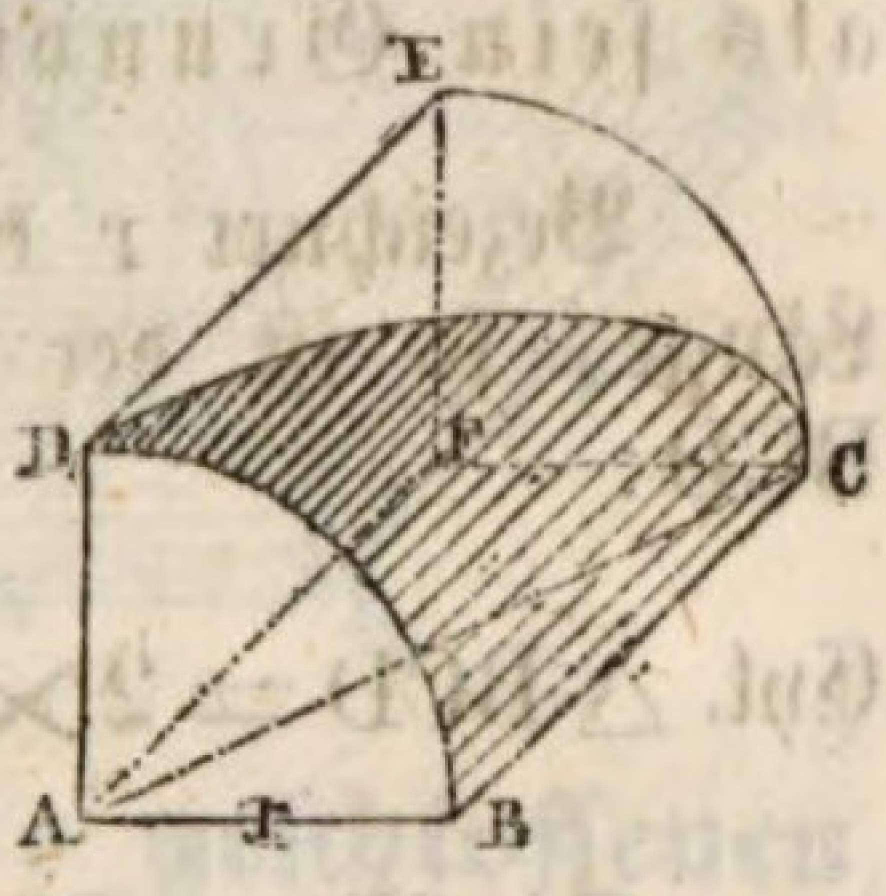
Antwort: $d = \sqrt{\frac{10}{3,14}} = 1,78'.$

2. Beispiel. Eine halb kugelförmige Kuppel hat 40 □ Ruthen Oberfläche, welches ist ihr Durchmesser?

Antwort: Die ganze Kugel, wovon die Kuppel die Hälfte ist, hält 80 □ Ruthen = 8000 □′; hieraus ergibt sich der Durchmesser

$$d = \sqrt{\frac{8000}{3,14}} = 50,4'. —$$

123. Von den Cylinderdreiecken. Wird ein Viertels-Cylinder ABCDEF durch eine Ebene ACD so geschnitten, daß der Schnitt durch die Diagonale AC des Rechtecks ABCF und die Kante AD geht, so entstehen auf der krummen Oberfläche des Cylinders 2 Dreiecke BCD und DEC, deren jedes von einer geraden Seite BC und DE, dann von einem Viertelskreis BD und EC und einer Viertels-Ellipse DC begränzt ist, und welche Cylinderdreiecke heißen.



Das Dreieck BCD heiße ein Cylinderdreieck der ersten Art, das andere Dreieck DEC heiße ein Cylinderdreieck der zweiten Art. Das erste hat seine Grundlinie BC unten, die Spitze D oben, das zweite hat seine Grundlinie DE oben, seine Spitze C unten.

Es läßt sich nun beweisen,*) daß der Flächeninhalt des Cylinderdreieckes der ersten Art BCD genau doppelt so groß ist, als der Inhalt des ebenen Dreiecks ABC.

Das ebene Dreieck ABC ist aber der Grundriß des Cylinderdreiecks BCD; daher der Satz:

---

*) Der streng mathematische Beweis dieses merkwürdigen Satzes wird ganz ähnlich jenem in der Geometrie über die Gleichheit der Kugeloberfläche mit der umschließenden Cylinder-Mantelfläche geführt, indem man durch 2 ganz nahe gelegene Ebenen parallel zur Grundfläche ein schmales Streifchen des Cylinder-Dreieckes ausschneidet und von dessen Flächeninhalt auf das ganze Dreieck schließt. Vergl. Mitterers Geometrie.

Der Flächeninhalt eines Cylinderdreiecks der ersten Art BCD ist doppelt so groß als sein Grundriß ABC.

Bezeichnet r den Radius des Cylinders, l seine Länge, so ist der Flächeninhalt des Cylinderdreiecks BCD:

$$\text{Cyl.} \triangle BCD = 2 \times \triangle ABC = 2 \times \left(\frac{r \times l}{2}\right) = r \times l.$$

Die Mantelfläche des Viertelscylinders BCDE ist aber gleich dem Viertelskreis BD multiplizirt mit BC

$$\text{oder Cylinderfläche} = \frac{3{,}14 \times 2r}{4} \times l$$

$$= 3{,}14 \times \left(\frac{r \times l}{2}\right)$$

also der Flächeninhalt des Cylinderdreiecks der zweiten Art DEC:

$$\text{Cyl.} \triangle DEC = BCDE - \text{Cyl.} \triangle BCD$$

$$= 3{,}14 \times \left(\frac{r \times l}{2}\right) - r \times l$$

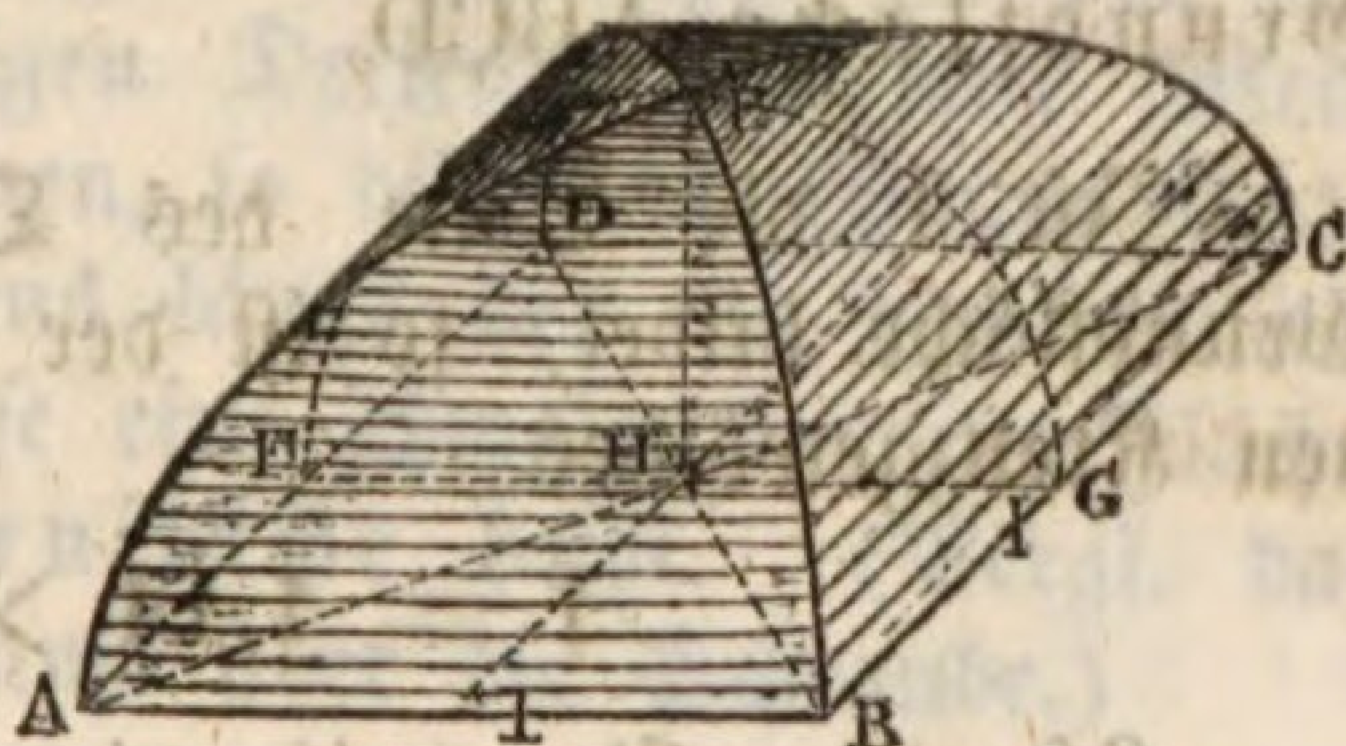
$$= (3{,}14 - 2) \times \left(\frac{r \times l}{2}\right)$$

$$= 1{,}14 \times \left(\frac{r \times l}{2}\right) = 1{,}14 \times \triangle AFC.$$

Der Flächeninhalt des Cylinderdreiecks der zweiten Art DEC ist also nur 1,14mal so groß als sein Grundriß AFC.

124. Kreuzgewölbe. Ein geschlossenes

quadratisches Kreuzgewölbe ABCDE, dessen Querschnitt FEG ein Halbkreis ist, besteht aus acht Cylinderdreiecken der ersten Art, wie BGE, GCE u. s. w.

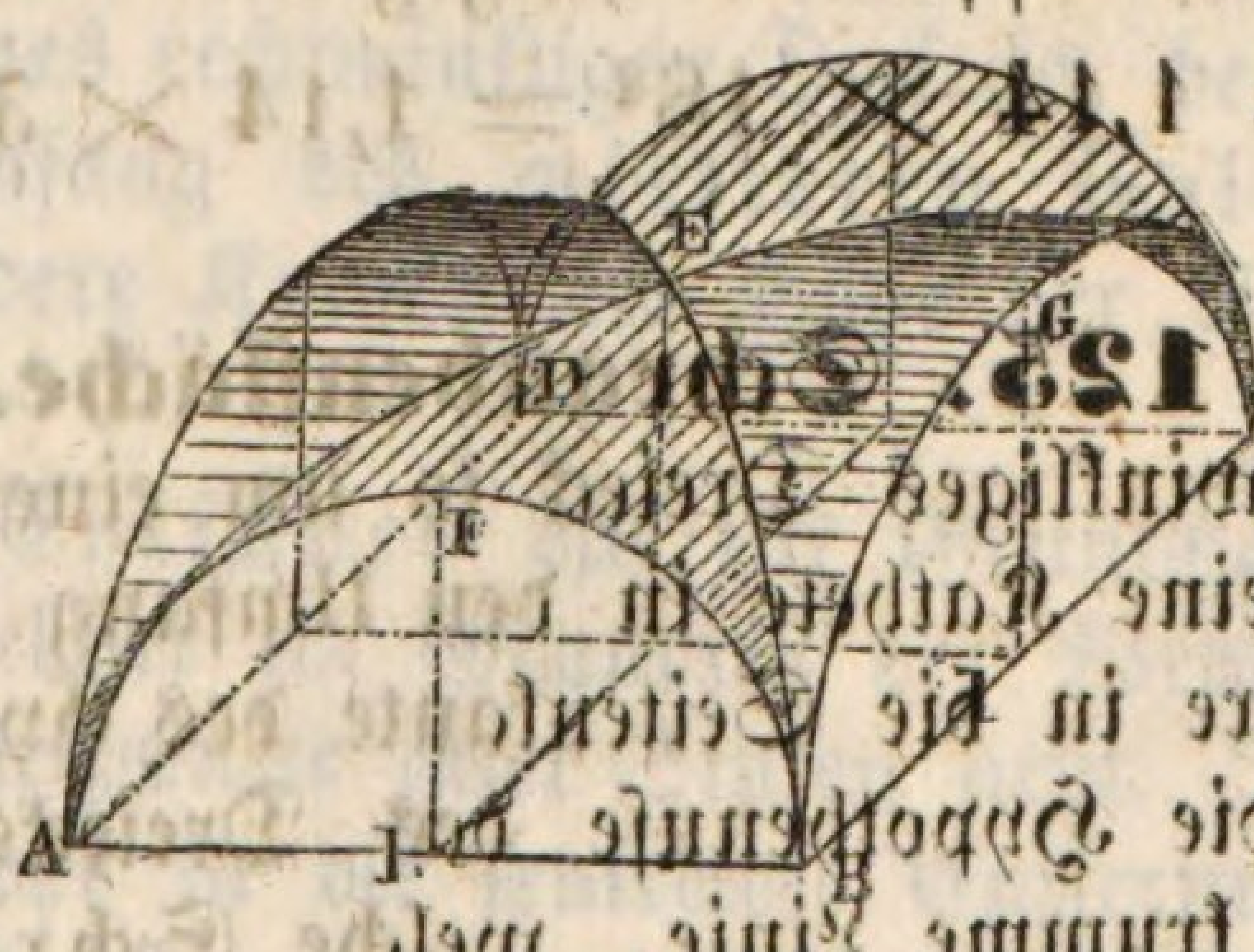


Der Flächeninhalt eines **geschlossenen Kreuzgewölbes** ABCDE ist daher doppelt so groß als dessen Grundfläche ABCD. Ist l die Länge und Breite der Grundfläche, so ist der Flächeninhalt f des geschlossenen Kreuzgewölbes

$$f = 2 \times l^2.$$

Ist der Grundriß eines geschlossenen Kreuzgewölbes ein anderes regelmäßiges Vieleck, so besteht dasselbe immer aus doppelt so vielen Cylinderdreiecken der ersten Art als das Vieleck Seiten hat, und seine Oberfläche ist immer doppelt so groß als seine Grundfläche, wenn nur der Querschnitt durch den Scheitel des Gewölbes senkrecht zu zwei parallelen Seiten des Vielecks ein Halbkreis ist.

Ein offenes quadratisches Kreuzgewölbe dagegen besteht aus 8 Cylinderdreiecken der zweiten Art, wie EFB, EGB u. s. w.



Der Flächeninhalt des offenen quadratischen Kreuzge-

wölbes ist daher 1,14mal so groß, als seine Grundfläche ABCD.

Ist l die Seite des Quadrats, welches die Grundfläche bildet, so ist der Flächeninhalt des offenen Kreuzgewölbes

$$f = 1,14 \times l^2.$$

Ist der Grundriß ein anderes regelmäßiges Vieleck, so besteht das offene Kreuzgewölbe, welches dann Sterngewölbe heißt, immer aus doppelt so vielen Cylinderdreiecken der zweiten Art, als die Grundfläche Seiten hat, und seine Oberfläche ist immer 1,14 mal so groß als die Grundfläche, wenn nur die Wölbungslinien über den Seiten des Vielecks Halbkreise sind.

Z. B. Welches ist die Oberfläche eines geschlossenen und eines offenen Kreuzgewölbes über einem Quadrat von 18′, wenn die Wölbungen Halbkreise sind?

Antwort: Die Oberfläche des geschlossenen Kreuzgewölbes ist:

$$f = 2 \times 18^2 = 2 \times 324 = 648 \, \square';$$

die des offenen hingegen:

$$f = 1,14 \times 18^2 = 1,14 \times 324 = 369,36 \, \square'.$$

125. Schraubenfläche. Wickelt man ein rechtwinkliges Dreieck so um einen Kreiscylinder, daß die eine Kathete in den Umfang der Grundfläche, die andere in die Seitenkante des Cylinders fällt, so bildet die Hypothenuse des Dreiecks um den Cylinder eine krumme Linie, welche Schraubenlinie heißt.

Denkt man sich ein biegsames Brettchen in der Gestalt eines rechtwinkligen Dreiecks auf diese Weise um den Cylinder gebogen, so bildet die schmale Fläche (die Dicke) des Brettchens längs der um den Cylinder gewickelten Hypothenuse eine schmale krumme Fläche, welche die Schraubenfläche heißt. (Vergl. das Kapitel aus der Mechanik über die Schraube.)

Die untere oder obere Fläche eines Wangenstückes bei einer kreisrunden hölzernen Wendeltreppe, die untere Fläche einer solchen Treppe, wenn sie verschalt ist, die Brettchen einer archimedischen Wasserschnecke ꝛc. bilden Schraubenflächen. Werden die Stufen einer steinernen kreisrunden Wendeltreppe an ihrer untern Seite in eine Fläche zusammengearbeitet, oder denkt man sich die untere Fläche einer Wendeltreppe verputzt, so bildet diese Fläche gleichfalls eine Schraubenfläche.

Der Flächeninhalt einer solchen Schraubenfläche läßt sich berechnen, indem man die Schraubenfläche als ein Rechteck betrachtet, dessen Länge die mittlere Schraubenlinie, und dessen Breite die Breite der Schraubenfläche (die Länge der Stufen) ist.

Die mittlere Schraubenlinie (die Schraubenlinie, welche die Mitten aller Stufen verbindet) ist die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete der Umfang des mittleren Cylinders und dessen andere Kathete die Höhe der Steigung ist.

Der mittlere Cylinder hat zur Grundfläche denjenigen Kreis, welcher im Grundriß der Wendeltreppe durch die Mittelpunkte aller Stufen geht. Die Steigung der Treppe ist die senkrechte Entfernung zweier genau senkrecht über einander befindlichen Stu-

fen, oder die Höhe einer vollständigen Windung der Treppe. Daher die Regel:

Der Flächen-Inhalt einer Schraubenfläche wird gefunden, wenn man die Länge der mittleren Schraubenlinie mit der Breite der Fläche multiplizirt.

Beispiel. Eine steinerne Wendeltreppe hat eine steinerne Spindel (Mönch) von 3 Fuß Durchmesser und 4′ lange Stufen, sohin der Treppenthurm im Lichten 11 Fuß Durchmesser, die Stufen sind 0,7 Fuß hoch und es gehen 22 solcher Stufen auf eine Windung (Steigung). Welches ist der Flächeninhalt der unten schief zusammengearbeiteten Stufen (bei einer hölzernen Treppe der Verschalung zwischen den Wangen)?

Antwort: Der Radius des Kreises, welcher durch das Treppenmittel geht, ist $\frac{3+4}{2} = 3{,}5$ der entsprechende Durchmesser 7′; der Umfang $= 3{,}14 \times 7 = 21{,}98$ oder 22 Fuß; da 22 Stufen auf den Umfang gehen, so ist eine Stufe in der Mitte 1 Fuß breit oder die Stufe hat 1 Fuß **Antritt**; die Höhe der Steigung ist, da eine Stufe 0,7′ Höhe oder 0,7′ **Auftritt** hat, $= 22 \times 0{,}7 = 15{,}4$ Fuß. Die Länge der mittleren Schraubenlinie ist daher

$$= \sqrt{15{,}4^2 + 22^2} = 26{,}93'$$

und da die Stufen 4′ lang sind, oder die Schraubenfläche 4′ Breite hat, so ist der Inhalt der Schraubenfläche für **eine** Windung

$$= 26{,}93 \times 4 = 107{,}72 \;\square'.$$

Hat die Wendeltreppe 77 Stufen, so ist der

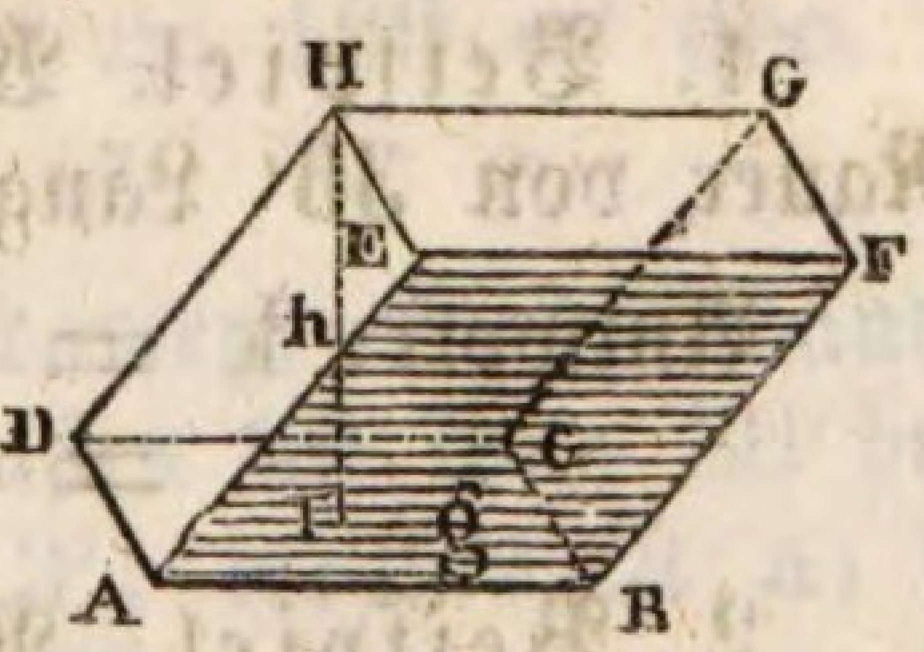
Inhalt der Schraubenfläche für die ganze Treppe, welche $\frac{77}{22} = 3\frac{1}{2}$ Windungen hat,

$$= \tfrac{7}{2} \times 107{,}72 = 377{,}02 \,\square'.$$

B. Körperberechnung.

126. Der Kubikinhalt eines **Parallelepipedums** wird erhalten, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplizirt.

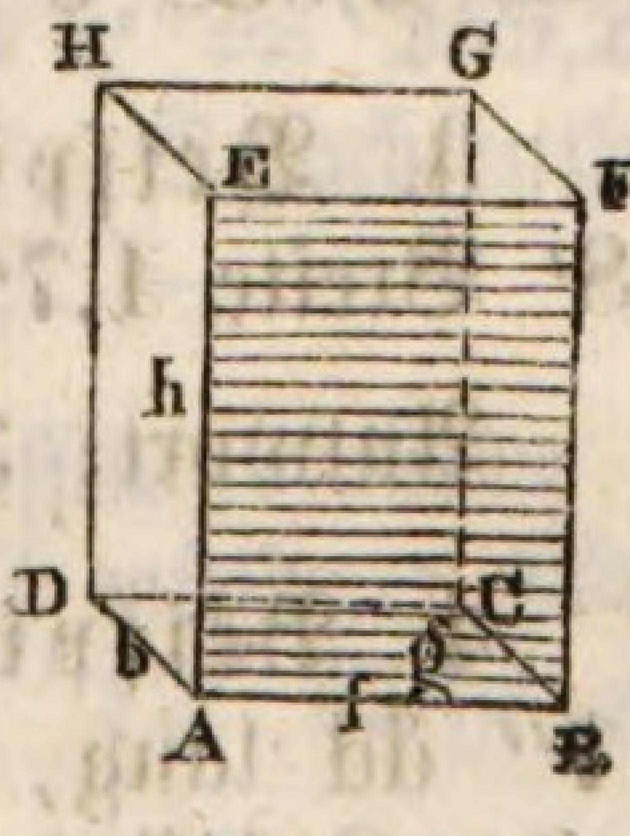
Ist ABCDEFGH ein schiefes Parallelepipedum, so sind ABCD, EFGH dessen Grundflächen und die senkrechte Entfernung HI beider Grundflächen seine Höhe.



Bezeichnet g den Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD, und h die Höhe HI, so ist der Kubikinhalt des Parallelepipedums

$$k = g \times h.$$

Ist das Parallelepipedum ein rechtwinkliges, d. h. sind alle Seitenflächen Rechtecke, und ist die Länge der Grundfläche l, die Breite b, die Höhe des Körpers h, so ist der Flächeninhalt g der Grundfläche



$$g = l \times b$$

und der Kubikinhalt

$$k = g \times h = \text{Grundfläche} \times \text{Höhe} = l \times b \times h.$$

Man findet also den Kubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums, wenn man die 3 Dimensionen desselben, Länge, Breite und Höhe (oder die drei an einem Eck zusammenstoßenden Kanten) mit einander multiplizirt.

Da die meisten der im Bauwesen vorkommenden Körper die Gestalt eines Parallelepipedums haben, so sollen die am häufigsten vorkommenden Fälle der Berechnung eines solchen an einer Reihe von Beispielen aus der Praxis erläutert werden.

127. Uebungsaufgaben.

1. Beispiel. Welches ist der Kubikinhalt einer Mauer von 36′ Länge, 12′ Höhe und 1,5′ Stärke?

Antwort: $k = 36 \times 12 \times 1{,}5 = 648$ c′ $= 6{,}48$ Schachtruthen.

2. Beispiel. Welches ist der Kubikinhalt eines laufenden Schuhes Fenstergitter von 1″ dd Stärke im Quadrat?

Antwort: Es ist 1″ dd = 0,833″ dec. (Seite 99.) und 1′ = 10″ dec. also der Kubikinhalt

$k = 0{,}833 \times 0{,}833 \times 10 = 0{,}693889 \times 10$ $= 6{,}938$ c″ dec.

3. Beispiel. Ein Quader hat 3,5′ Länge 2,8′ Breite 1,7′ Höhe, welches ist sein Kubikinhalt?

Antwort: $3{,}5 \times 2{,}8 \times 1{,}7 = 16{,}66$ c′.

4. Beispiel. Eine gußeiserne Herdplatte ist 3′ 7″ dd lang, 2′ 8″ dd breit, $\frac{1}{4}$″ dd dick, welches ist ihr Kubikinhalt?

Antwort: 3′ 7″ dd sind = 3,5833′
2′ 8″ „ „ = 2,6666′
$\frac{1}{4}$″ „ „ = 0,0208′, daher
der Kubikinhalt in Decimalmaß
= 3,5833 × 2,6666 × 0,0208 = 0,199 c′
= 199 dec. c″.

In Duodecimalmaß gerechnet, in welchem Fall die Länge = 3′ 7″ = 43″; die Breite = 2′ 8″ = 32″; die Dicke = $\frac{1}{4}$ Zoll = 0,25″ dd ist, erhält man den Kubikinhalt kürzer und genauer
= 43 × 32 × 0,25 = 344 c″ dd
= $\frac{344}{1728}$ c′ = 0,19908 c′ = 199 c″ dec.

5. Beispiel. Das Fundament eines Gebäudes von rechtwinkliger Form ist außen 60′ lang 30′ breit 12′ tief, die Mauerstärke ist 3′; welches ist a) der Kubikinhalt der auszuhebenden Baugrube, wenn der ganze Raum ausgehoben und auf die Erdböschung keine Rücksicht genommen wird, und b) welches ist der Kubikinhalt des Fundamentes der Hauptumfassungsmauern?

Antwort: a) der Kubikinhalt der Baugrube ist
= 60 × 36 × 12 = 25920 c′ = 259,2 Schachtruthen,
oder 1037 Fuhren Erde zu 25 c′. —

b) Der Kubikinhalt der Umfassungswände im Fundament ist bei 60 — 3 = 57′ mittlerer Länge 36 — 3 = 33′ mittlerer Breite, 12′ Tiefe und 3′ Stärke:

$= 2 \times (57 + 33) \times 12 \times 3 = 6480$ c′
$= 64{,}8$ Schachtruthen Mauerwerk.

6. Beispiel. Eine Freitreppe hat 5 Stufen von 5′ Länge, 0,6′ Höhe und 1,2′ Breite, welche zwischen 2 Wangenstücken von 6′ Länge, 3′ Höhe, 1,5′ Stärke liegen. Welches ist der Kubikinhalt der Stufen und Wangenstücke, und der Untermauerung der Stufen, soweit dieselbe zwischen den Wangen liegt?

Antwort: Der Kubikinhalt ist

der 2 Wangenstücke	$= 2 \times 6 \times 3 \times 1{,}5 =$	54 c′
„ 5 Stufen	$= 5 \times 5 \times 1{,}2 \times 0{,}6 =$	18 c′
	zusammen =	72 c′

Die Untermauerung der Stufen mißt bei 6′ Länge 5′ Breite und 3′ Höhe, da sie einen dreieckigen Querschnitt hat, $\frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times 3 = 45$ c′; hievon ab der halbe Inhalt der Stufen, da diese zur Hälfte hineinreichen, mit 9 c′, bleiben $45 - 9 = 36$ c′ Untermauerung. —

7. Beispiel. Welchen Kubikinhalt hat ein 4kantig gehauener Durchzug von 38′ Länge, $\frac{10}{11}$″ (d. i. 10 auf 11 Zoll dd) Stärke?

Antwort: $38 \times 0{,}8333 \times 0{,}9166 = 29{,}02$ c′.

8. Beispiel. Ein Backstein von 14 dd Zoll Länge soll zum Zweck eines richtigen Verbandes bei einer Mörtelfuge von $\frac{1}{2}$ Zoll dd, $6\frac{3}{4}$″ dd Breite und $3\frac{1}{8}$″ dd Dicke haben; wie viele solche Steine gehen auf 1 Schachtruthe mehrere Steine starkes Backsteinmauerwerk, wenn die Mörtelfuge zu $\frac{1}{2}$″ dd gerechnet wird?

Antwort: Rechnet man zu jeder der drei Dimensionen des Steines $\frac{1}{2}$ Zoll Mörtelfuge hinzu, so erhält man den Kubikinhalt des Steines mit dem auf jeden Stein treffenden Mörtel

$$= 14\tfrac{1}{2} \times 7\tfrac{1}{4} \times 3\tfrac{5}{8} = 14{,}5 \times 7{,}25 \times 3{,}625$$
$$= 381{,}08 \text{ c}'' \text{ dd}$$

und da ein c′ = 1728 c″ dd hat, so gehen auf 100 c′ oder 172800 c″ dd

$$= \frac{172800}{381{,}08} = 453{,}4 \text{ Steine.}$$

Rechnet man mit gemeinen Brüchen, so erhält man für die Zahl der Steine

$$= \frac{1728 \times 100}{14\frac{1}{2} \times 7\frac{1}{4} \times 3\frac{5}{8}} = \frac{172800 \times 8 \times 8 \times 8}{116 \times 58 \times 29}$$
$$= \frac{88473600}{195112} = 453{,}4 \text{ Steine, wie oben. —}$$

(Vergl. Nro. 103, Beisp. 6 und 7.)

9. Beispiel. Ein Wasser-Reservoir ist 12,5′ lang, 10,5′ breit, 5,8′ tief, wie viele Eimer Wasser hält dasselbe, wenn es voll ist?

Antwort: 12,5 × 10,5 × 5,8 = 761,25 c′

oder (da 1 Eimer 2,58 c′) $= \frac{761{,}25}{2{,}58} = 295{,}06$ Eimer.

10. Beispiel. Welches ist der Kubikinhalt eines aus Stein gehauenen Wassertroges, welcher außen 4,5′ lang, 3,5′ breit und 2,4′ hoch ist, wenn Wände und Boden $\frac{1}{2}$′ stark sind?

Antwort: Der ganze Stein mißt

$4{,}5 \times 3{,}5 \times 2{,}4 =$	36,8 c′
Hievon ist der innere hohle Raum abzuziehen mit $3{,}5 \times 2{,}5 \times 1{,}9 =$	16,625 c′
Bleibt Kubikinhalt des Steines $=$	20,175 c′

Der Trog selbst faßt 16,625 c′

oder $\frac{16{,}625}{2{,}58} = 6{,}44$ Eimer Wasser. —

11. Beispiel. Ein Straßen-Durchlaß von 36′ Länge hat eine lichte Oeffnung von 1′ im □; jedes der beiden Widerlager ist 1′ hoch, 1,5′ stark; das unter beiden Widerlagern und unter der lichten Oeffnung durchgehende Fundament ist 0,75 hoch, 4′ breit; die Deckplatten des Durchlasses sind 0,8′ hoch und 3,0′ breit, so daß sie rechts und links 1′ auf dem Widerlager aufliegen; welches ist der Kubikinhalt des Mauerwerkes dieses Durchlasses?

Antwort: Man rechne zuerst den ganzen Querschnitt in □′ aus, dieser ist:

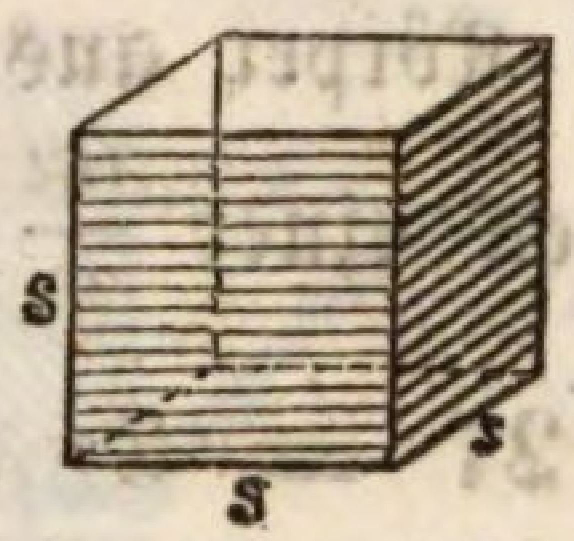
Deckplatte	$= 3 \times 0{,}8 =$	2,4 □′
2 Widerlager	$= 2 \times 1{,}5 \times 1 =$	3,0 „
Fundament	$= 4 \times 0{,}75 =$	3,0 „
	Zusammen $=$	8,4 □′

Hieraus ergiebt sich der Gesammt-Kubus zu

$8{,}4 \times 36 = 302{,}4$ c′ Mauerwerk.

Da der hohle Raum des Durchlasses $36 \times 1 \times 1 = 36$ c′ mißt, so ergiebt sich die von dem Durchlaß verdrängte und zu beseitigende Erdmasse zu $302{,}4 + 36 = 338{,}4$ c′ $= 3{,}4$ Schachtruthen.

128. Der Kubikinhalt eines Würfels wird gefunden, wenn man die Seite desselben 3mal mit sich selbst multiplizirt, oder zum Kubus erhebt.



Bezeichnet s die Seite des Würfels, so ist sein Kubikinhalt

$$k = s \times s \times s = s^3.$$

Z. B. Ein Würfel von 1,5′ Seite, hat

$$1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 = 3{,}375 \text{ c}' \text{ Inhalt.}$$

Umgekehrt: Ist der Kubikinhalt eines Würfels gegeben, so findet man dessen Seite, wenn man aus dem Kubikinhalt die Kubikwurzel auszieht.

Bedeutet k den Kubikinhalt, s die dazu gehörige Seite des Würfels, so ist

$$s = \sqrt[3]{k}.$$

1. Beispiel. Ein würfelförmiges Gefäß soll genau einen Eimer oder 2,58 c′ halten, wie groß muß die Seite des Würfels sein?

Antwort:

$$s = \sqrt[3]{2{,}58} = 1{,}37'. \text{ —}$$

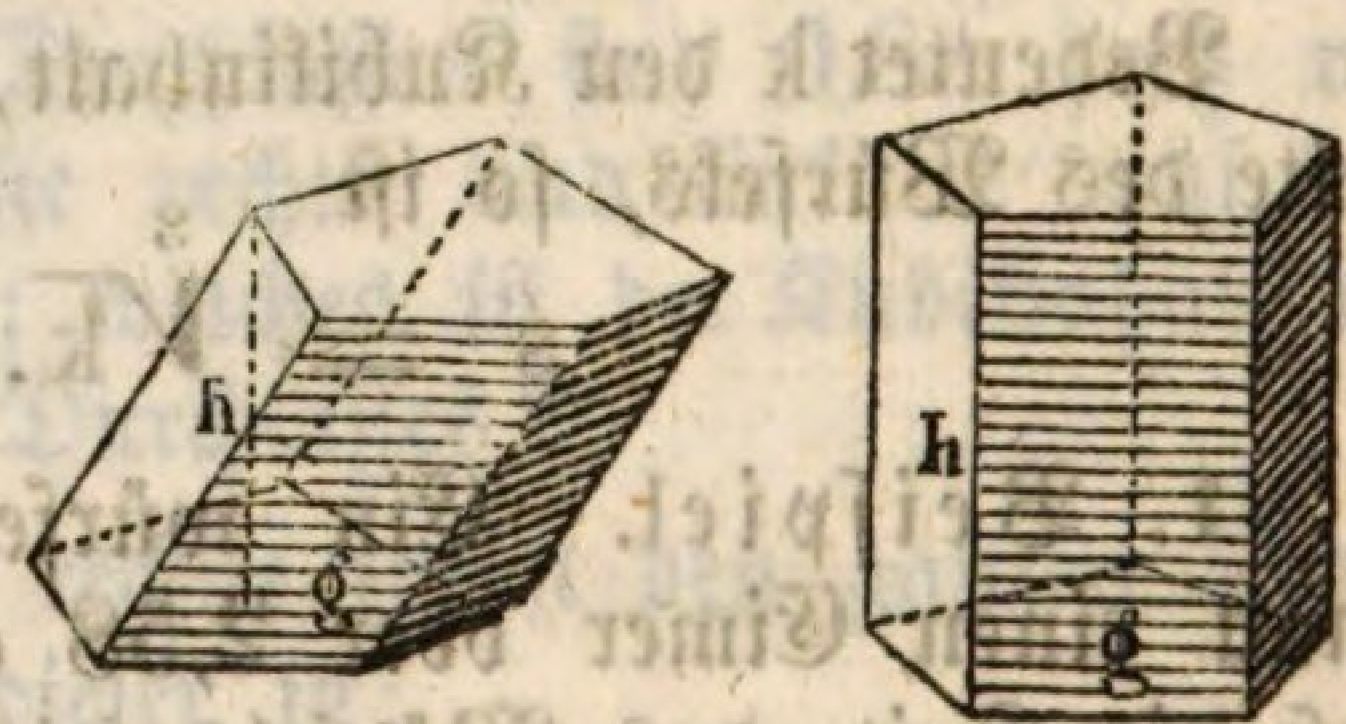
Hieher gehört auch die Lösung der Aufgabe: Wenn der Kubikinhalt eines Körpers gegeben ist, und das Verhältniß seiner Dimensionen, diese zu finden.

Es soll z. B. ein rechtwinkliges Bassin hergestellt werden, welches doppelt so breit als hoch, und 3mal so lang als hoch ist und 162 c′ hält, wie groß sind seine Dimensionen?

Antwort: Da die Breite das Doppelte der Höhe, die Länge das Dreifache der Höhe sein soll, so besteht der Körper aus 6 neben einander gelegten Würfeln, deren einer $\frac{162}{6} = 27$ c′ hält, dessen Seite daher $\sqrt[3]{27} = 3'$ ist. Die Höhe des Bassins ist daher 3′, seine Breite 6′, seine Länge 9′ und der Inhalt ist $3 \times 6 \times 9 = 162$ c′. —

129. Der Kubikinhalt eines **senkrechten** oder **schiefen Prisma's** wird erhalten, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplizirt.

Beim schiefen Prisma ist die Höhe die senkrechte Entfernung beider Grundflächen, beim senkrechten ist die Länge einer Seitenkante die Höhe.



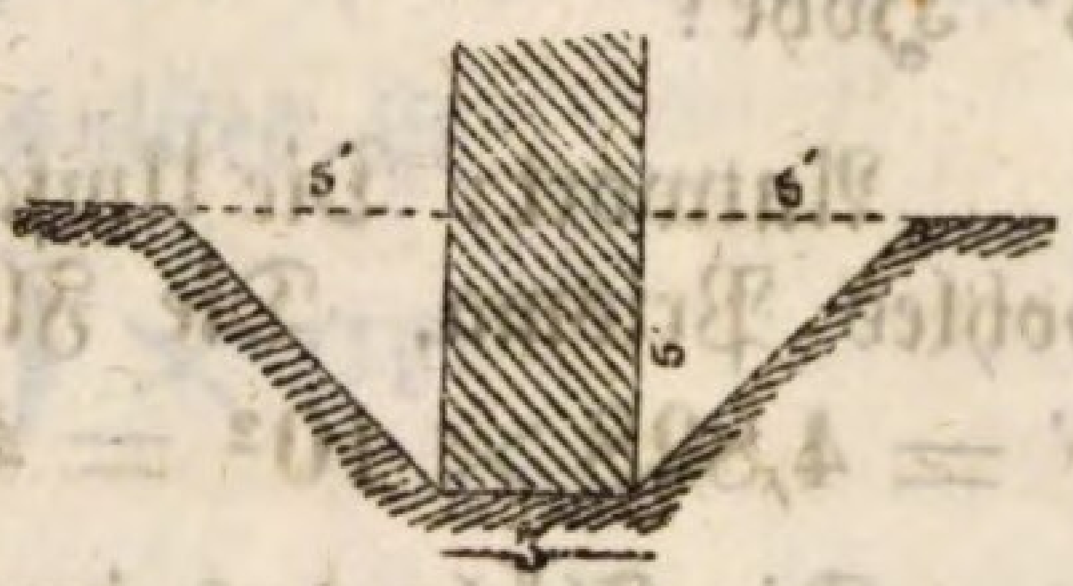
Bezeichnet g den Flächeninhalt der Grundfläche, h die Höhe des Prisma's, k seinen Kubikinhalt, so ist dieser

$$k = g \times h.$$

130. Uebungsaufgaben.

1. Beispiel. Welches ist der Baugrubenaushub einer Mauer von 200′ Länge, 5′ Fundamenttiefe und 3′ Fundamentstärke an der Sohle, wenn das Erdreich mit 1maliger Böschung stehen bleibt?

Antwort: Die Baugrube ist ein senkrechtes Prisma, dessen Querschnitt (Grundfläche) ein Trapez ist. Einmalige Böschung gibt eine Breite der Baugrube oben von $3' + 2 \times 5 = 13'$. Der Querschnitt ist daher

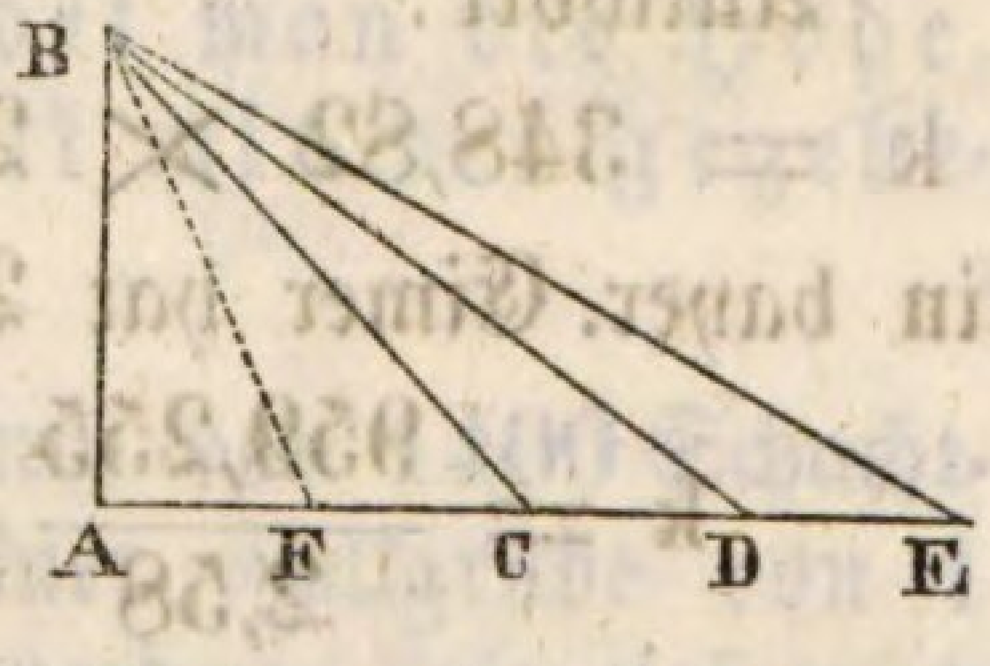


$$g = \left(\frac{13+3}{2}\right) \times 5 = \left(\frac{16}{2}\right) \times 5 = 8 \times 5 = 40 \square'$$

und der Kubikinhalt der Baugrube

$$k = 40 \times 200 = 8000 \text{ c}' = 80 \text{ Schachtruthen.}$$

Bemerkung. Man nennt eine Böschung 1, 2, 3malig, wenn die horizontale Ausladung derselben 1, 2, 3mal so groß ist, als die senkrechte Höhe, oder wenn in dem rechtwinkligen Dreieck ABC, wo die Hypothenuse BC die Böschung bildet, die horizontale Kathete AC 1, 2, 3mal so groß ist als die vertikale AB. So ist BC eine 1malige (einfüßige) Böschung, weil AC = AB; BD ist eine $1\frac{1}{2}$malige Böschung, weil AD = $1\frac{1}{2}$mal so groß als AB;



BE ist eine 2malige Böschung, weil AE = 2mal AB ist u. s. w. Die Neigung einer Erdböschung hängt von der Natur des Bodens ab. Nur fester Lehm bleibt in der 1maligen Böschung BC (oder unter 45°) stehen; feste Erde in einer $1\frac{1}{2}$maligen BD, lockere Ackererde in einer 2maligen BE, Sand in einer 3maligen Böschung.

In gleicher Weise sagt man, eine Mauer habe $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ rc. Anlauf, wenn die untere Breite derselben um $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ rc. der Höhe der Mauer stärker ist als die obere Breite.

In der Figur ist BF = $\frac{1}{2}$ Anlauf oder $\frac{1}{2}$malige Böschung, weil AF = $\frac{1}{2}$ AB. Ist AF = $\frac{1}{10}$ AB, so ist BF die Böschung einer Mauer mit $\frac{1}{10}$ Anlauf u. s. w.

2. Beispiel. Welches ist der Kubikinhalt der Umfassungswand eines 8seitigen Brunnenbassins von

10′ äußerer und 8′,5 innerer Seite des Achtecks und 3′ Höhe?

Antwort: Die Umfassungswand ist ein 8seitiges hohles Prisma. Die Fläche des äußeren Achtecks ist

$$F = 4{,}828 \times 10^2 = 4{,}828 \times 100 = 482{,}80 \,\square'$$

Die Fläche des innern Achtecks

$$f = 4{,}828 \times 8{,}5^2 = 4{,}828 \times 72{,}25 = 348{,}82 \,\square'$$

bleibt Grundfläche der Wand . . . $= 133{,}98 \,\square'$

und folglich der Kubikinhalt der 8seitigen Umfassungswand $k = 133{,}98 \times 3 = 401{,}94$ c′.

3. Beispiel. Wie viele bayerische Eimer Wasser faßt das Bassin, wenn es $2\frac{3}{4}$ hoch gefüllt ist?

Antwort:

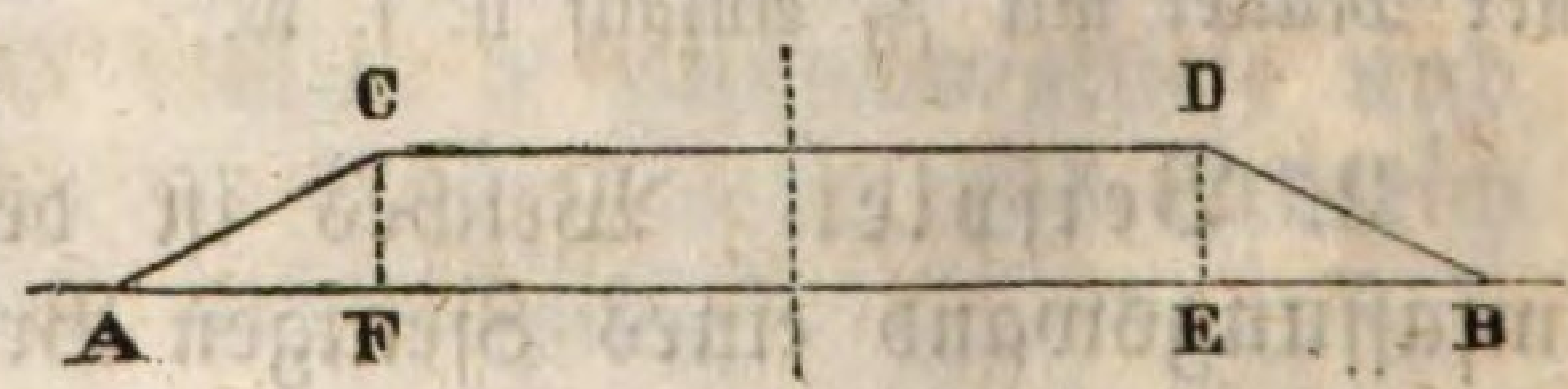
$$k = 348{,}82 \times 2{,}75 = 959{,}255 \text{ c}'.$$

Ein bayer. Eimer hat 2,58 c′, sohin hält das Bassin

$$k = \frac{959{,}255}{2{,}58} = 371{,}80 \text{ Eimer.}$$

4. Beispiel. Auf einer horizontalen Unterlage soll eine neue Straße mit 20′ Kronbreite, 2maligen Böschungen durchschnittlich 3′ hoch auf eine Länge von 2500′ aufgeschüttet werden. Wie viele Fuhren Erde zu 25 c′ sind beizufahren?

Antwort: Der Querschnitt der Straße bildet ein Trapez ABDC, in welchem CD die Kronbreite der Straße = 20′, CF = DE die Auftraghöhe = 3′, AF = EB



wegen der 2maligen Böschung $= 2 \times CF = 2 \times 3 = 6'$, daher $AB = 6 + 20 + 6 = 32$ ist.

Die Fläche dieses Querschnittes ist

$$= \left(\frac{CD + AB}{2}\right) \times CF$$

$$= \left(\frac{20 + 32}{2}\right) \times 3 = 78 \,\square'$$

und der gesuchte Kubikinhalt

$$= 2500 \times 78 = 195000 \text{ c}' = 1950 \text{ Schacht-R.}$$

oder $\frac{195000}{25} = 7800$ Fuhren Erde zu 25 c'.

131. Ist der Kubikinhalt eines Parallelepipedums oder Prisma's gegeben und seine Grundfläche, so findet man die Höhe, wenn man den Kubikinhalt mit der gegebenen Grundfläche dividirt.

1. Beispiel. Ein Erddamm von 1400 Schachtruthen Kubikinhalt soll aus einer Füllgrube von 1 Tagwerk Oberfläche hergestellt werden, wie tief wird man die Erde ausheben müssen?

Antwort:

1 Tagwerk $= 40000 \,\square'$, 1400 Schachtruthen $= 1400 \times 100 \text{ c}' = 140000 \text{ c}'$, folglich

$$\text{Tiefe} = \frac{140000}{4000} = 3{,}5'.$$

2. Beispiel. Es soll eine neue Holzlege für 25 Klafter Holz (à $6 \times 6 \times 3{,}5 = 126$ c') in einem 30' langen 10' hohen Raum erbaut werden,

welche Breite wird die Holzlege erhalten, wenn $\frac{1}{3}$ des Raumes für Gänge ꝛc. gerechnet werden muß?

Antwort: 25 Klafter Holz nehmen einen Rauminhalt ein von $25 \times 126 = 3150$ c′; $\frac{1}{3}$ hinzu, gibt 4200 c′. Die Länge des Raumes 30′ mit seiner Höhe 10′ multiplizirt, gibt 300 □′ Wandfläche. Dividirt man mit dieser Fläche in den Rauminhalt, so erhält man die gesuchte Breite der Holzlege

$$= \frac{4200}{300} = 14 \text{ Fuß.} —$$

3. Beispiel. Ein Brunnenbassin soll 500 bayer. Eimer halten, wenn das Wasser 3′ hoch darin steht, welche innere Grundfläche muß das Bassin erhalten?

Antwort:

500 Eimer $= 500 \times 2{,}58$ c′ (vergl. 54.) $= 1290$ c′, also die Fläche des Bassins

$$f = \frac{1290}{3} = 430 \ \square'.$$

4. Beispiel. Ein Getreidboden soll 500 Schäffel Getreide (à 8,944 c′) fassen, wie groß muß die Fläche desselben sein, wenn das Getreide 2′ hoch aufgeschüttet wird?

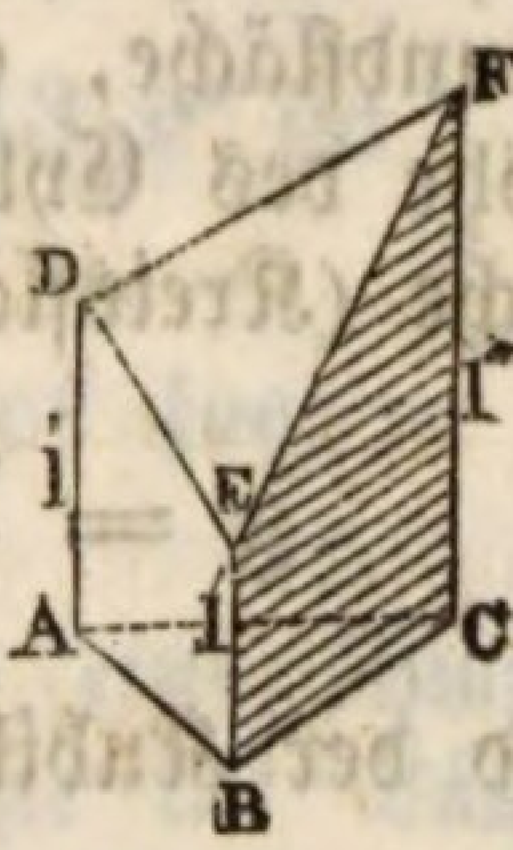
Antwort: 500 Schäffel erfordern $500 \times 8{,}944 = 4472$ c′ Rauminhalt; und da das Getreide 2′ hoch liegt, so gehört hiezu eine Grundfläche von

$$\frac{4472}{2} = 2236 \ \square'.$$

Der Getreideboden muß also bei 30′ Breite eine Länge

$$\text{von } \frac{2236}{30} = 75' \text{ Fuß haben.} —$$

132. Den Kubikinhalt eines schief abgeschnittenen senkrechten Prisma's ABCDEF erhält man, wenn man die Grundfläche ABCD mit dem arithmetischen Mittel aus der Länge der Kanten multiplizirt.



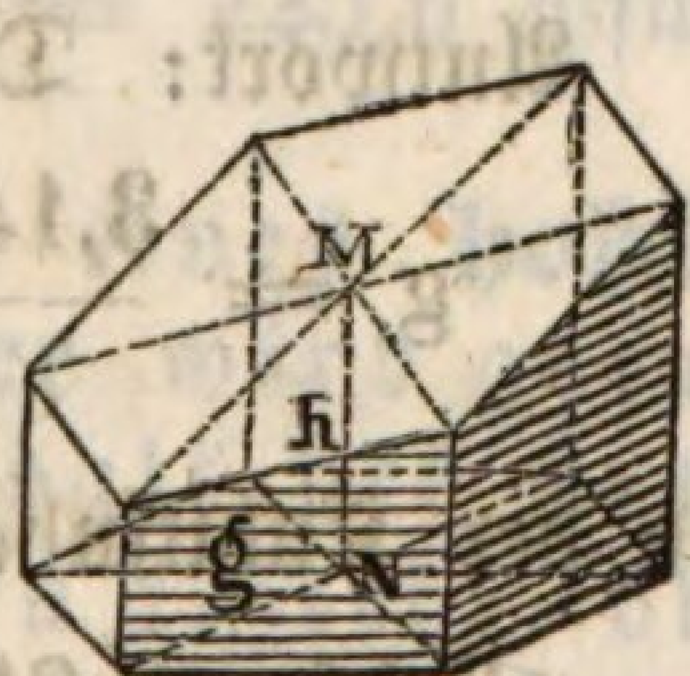
Bezeichnet g die Grundfläche, l_1, l_2, l_3 die Länge der drei Kanten eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prisma's, so ist der Kubikinhalt

$$k = g \times \left(\frac{l_1 + l_2 + l_3}{3}\right)$$

Bei einem vierseitigen schief abgeschnittenen Prisma ist

$$h = g \times \left(\frac{l_1 + l_2 + l_3 + l_4}{4}\right) \text{ u. s. w.}$$

Ist die Grundfläche eines schief abgeschnittenen senkrechten Prisma's ein regelmäßiges Vieleck, so erhält man den Inhalt, wenn man die Grundfläche mit der Länge der Axe MN multiplizirt.

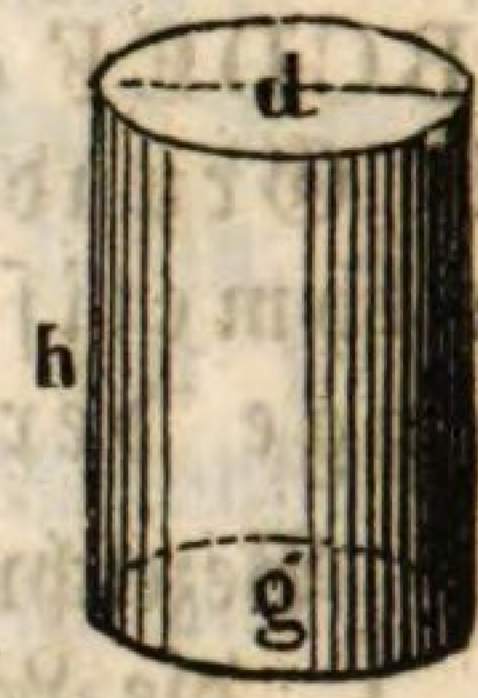


Ist g die Grundfläche, h die Länge der Axe, so ist der Kubikinhalt des Prisma's

$$k = g \times h.$$

133. Der Kubikinhalt eines **Cylinders** wird gefunden, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplizirt.

Die Grundfläche eines Cylinders ist eine Kreisfläche. Bezeichnet g den Flächeninhalt der Grundfläche, d den Durchmesser, h die Höhe des Cylinders, so ist die Grundfläche (Kreisfläche)



$$g = \frac{3{,}14 \times d^2}{4}$$

und der Kubikinhalt des Cylinders

$$k = g \times h = \left(\frac{3{,}14 \times d^2}{4}\right) \times h.$$

Die Berechnung des Cylinders, oder einzelner Theile eines Cylinders kommt im Bauwesen häufig vor, weßhalb hier einige solche Aufgaben aus der Praxis folgen.

1. Beispiel. Welchen Kubikinhalt hat eine Säule von 2,8′ Durchmesser und 25′ Länge?

Antwort: Die Grundfläche ist

$$g = \frac{3{,}14 \times 2{,}8^2}{4} = 6{,}1544 \;\square'$$

und der Kubikinhalt des Cylinders

$$k = \left(\frac{3{,}14 \times 2{,}8^2}{4}\right) \times 25 = 6{,}1544 \times 25 = 153{,}86 \; c'.$$

2. Beispiel. Eine runde Marmorplatte hat 30″ dd Durchmesser, 2″ dd Höhe, welches ist ihr Kubikinhalt?

Antwort: Hier rechnet am besten mit dd Maß, und verwandelt erst zuletzt den Kubikinhalt, wenn nöthig, in Dec.-Maß.

Der Kubikinhalt ist

$$= \left(\frac{30^2 \times 3{,}14}{4}\right) \times 2 = 1413 \text{ c}'' \text{ dd}$$

$$= \frac{1413}{1728} = 0{,}818 \text{ c}' \text{ oder } 818 \text{ c}'' \text{ dec.}$$

3. Beispiel. Wie schwer wird eine schmiedeiserne runde Schlauder sein, wenn sie 30′ Länge, 2″ dd Stärke hat, und der c′ Schmiedeisen 345 Pfund wiegt?

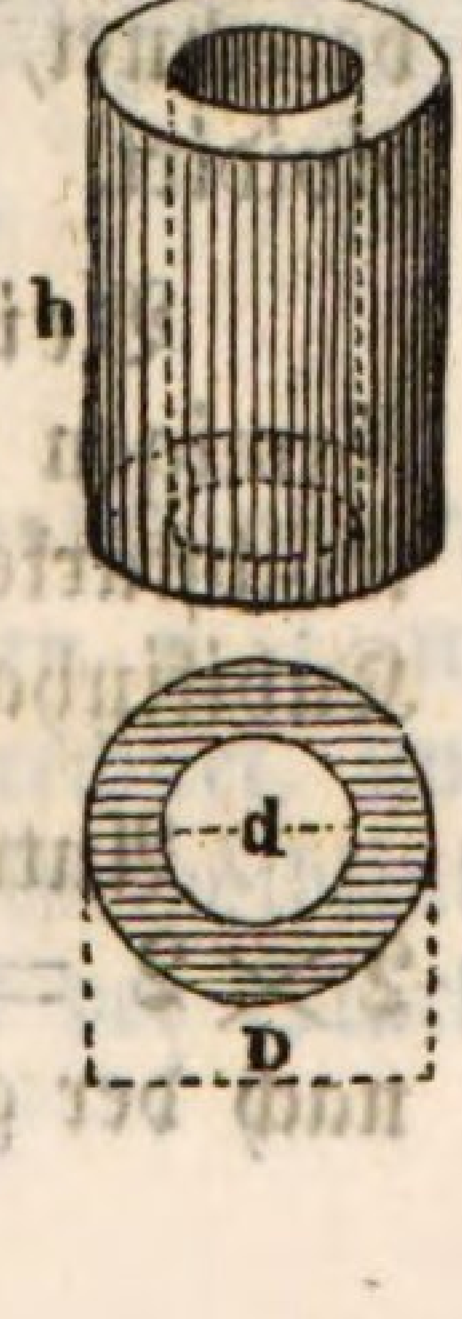
Antwort: Der Kubikinhalt ist, da 30′ Länge = 30 × 12 = 360″ dd geben,

$$= \left(\frac{2^2 \times 3{,}14}{4}\right) \times 360 = 1130{,}4 \text{ c}'' \text{ dd}$$

$$= \frac{1130{,}4}{1728} = 0{,}654 \text{ c}'.$$

Sie wiegt daher 0,654 × 345 = 225,6 Pfund.

134. Der Kubikinhalt eines **hohlen Cylinders** oder einer **Röhre** wird gefunden, wenn man vom Kubikinhalt des äußeren Cylinders den des inneren abzieht, oder kürzer, wenn man den Flächeninhalt der Grundfläche (Ringfläche) mit der Höhe multiplizirt.



Bezeichnet D den äußeren, d den inneren Durchmesser des Cylinders, h seine Höhe, so ist der Flächeninhalt g der Grundfläche (Ringfläche)

$$g = \frac{3{,}14 \times (D^2 - d^2)}{4}$$

und der Kubikinhalt des hohlen Cylinders

$$k = \left(\frac{3{,}14 \times (D^2 - d^2)}{4}\right) \times h.$$

Beispiel. Wie viele Schachtruthen Bruchsteinmauerwerk erfordert ein runder Brunnen von 50′ Tiefe, 6′ Durchmesser im Innern und 1,5′ Mauerstärke?

Antwort: Der äußere Durchmesser ist

$$= 6 + 2 \times 1{,}5 = 9'.$$

Daher die Grundfläche (Ringfläche)

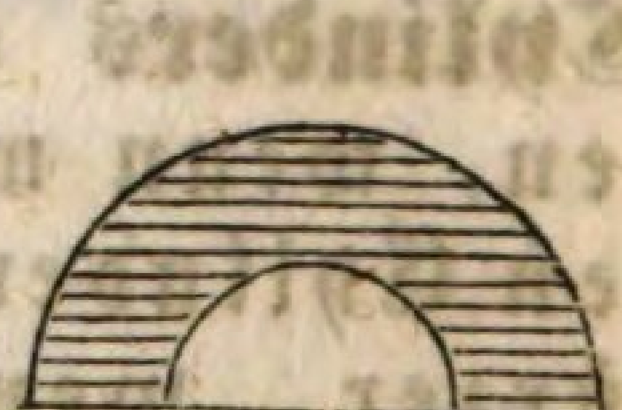
$$g = \frac{3{,}14 \times (9^2 - 6^2)}{4} = 35{,}325 \;\square'$$

und der Kubikinhalt des Mauerwerkes

$$k = \left(\frac{3{,}14 \times (9^2 - 6^2)}{4}\right) \times 50 = 35{,}325 \times 50$$

$$= 1766{,}250 \; c' = 17{,}66 \text{ Schachtruthen.}$$

135. Ein halbkreisförmiges **Tonnengewölbe** ist ein halber hohler Cylinder, wird daher ebenso berechnet, und das Resultat mit 2 dividirt.



Beispiel. Ein Bach ist mit einem halbkreisförmigen Tonnengewölbe von 12′ Lichtweite 2′ Gewölbstärke auf 100′ Länge überwölbt; welches ist der Kubikinhalt des Gewölbes?

Antwort: Der äußere Durchmesser ist 12 + 2 × 2 = 16′; daher der Querschnitt des Gewölbes nach der gegebenen Regel, als eine halbe Ringfläche

$$= \frac{3,14 \times (16^2 - 12^2)}{2 \times 4} = 43,96 \; \square'$$

und der Kubikinhalt auf 100′ Länge

$$= 100 \times 43,96 = 4396 \; c'. \;—$$

Man erhält aber auch den Querschnitt eines halbkreisförmigen Tonnengewölbes ebenso genau, wenn man denselben als ein gekrümmtes Rechteck ansieht, dessen Länge gleich der mittleren Gewölblinie und dessen Breite gleich der Stärke des Gewölbes ist, wenn man also die Länge der mittleren Gewölblinie mit der Dicke des Gewölbes multiplizirt.

Rechnet man das vorige Beispiel nach dieser Regel, so findet man den mittleren Durchmesser des Gewölbes $= 12 + 2 = 14'$, den dazu gehörigen Halbkreis oder die mittlere Gewölblinie $= \frac{14 \times 3,14}{2} = 21,98'$ und den Querschnitt des Gewölbes $= 21,98 \times 2 = 43,96 \; \square'$ wie oben.

Ist bei einem Tonnengewölbe die Wölbungslinie kein ganzer Halbkreis, sondern nur ein Kreisbogen, so erhält man den Querschnitt des Gewölbes, wenn man den mittleren Kreisbogen acb mit der Stärke de des Gewölbes multiplizirt.



Bei allen Gewölben, welche keine vollständigen Halbkreise, oder nach Korbbögen, Ellipsen u. s. w. gekrümmt sind, muß nach dieser Regel gerechnet, und zu diesem Zweck die Länge der mittleren Gewölblinie acb aus dem Plan gemessen, und mit der Stärke

de des Gewölbes multiplizirt werden, um die Querschnittsfläche des Gewölbes zu erhalten.

Ist die Stärke des Gewölbes am Schlußstein de und am Kämpfer (Gewölbstein am Widerlager) fg verschieden, so erhält man annäherungsweise den Querschnitt des Gewölbes, wenn man den mittleren Kreisbogen acb mit dem arithmetischen Mittel aus beiden Gewölbstärken de und fg multiplizirt.



Dieser Querschnitt mit der Länge des Gewölbes multiplizirt, gibt dann wieder den Kubikinhalt.

Beispiel. Ein halbkreisförmiges Tonnengewölbe von 20′ Spannweite und 30′ Länge habe am Schlußstein 1′ 6″ dd und am Kämpfer 2′ 8″ dd Gewölbstärke, welches ist sein Kubikinhalt?

Antwort: 1′6″ dd = 1,5′ und 2′ 8″ dd = 2,66′.

Die mittlere Gewölbstärke ist

$$\frac{1,5 + 2,66}{2} = 2,08';$$

der innere Durchmesser ist 20′, folglich der äußere 20 + 2 × 2,08 = 24,16, und der mittlere Durchmesser

$$d = \frac{20 + 24,16}{2} = 22,08'.$$

Der mittlere Halbkreis ist also

$$= \frac{3,14 \times 22,08}{2} = 34,66;$$

dieser mit der mittleren Gewölbstärke 2,08 multiplizirt, gibt den Querschnitt

$$g = \left(\frac{3{,}14 \times 22{,}08}{2}\right) \times 2{,}08 = 34{,}66 \times 2{,}08$$

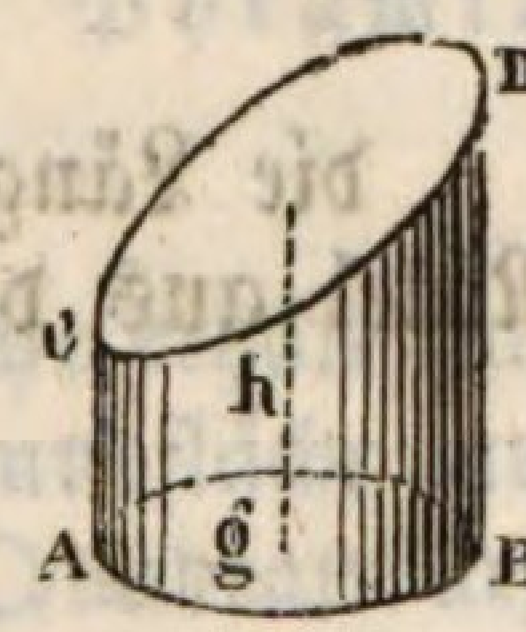
$$= 72{,}09 \;\square'$$

und es ist folglich der Kubikinhalt

$$k = \left(\frac{3{,}14 \times 22{,}08}{2}\right) \times 2{,}08 \times 30 = 72{,}09 \times 30$$

$$= 2162{,}7 \; c' = 21{,}63 \text{ Schachtruthen.}$$

136. Der Kubikinhalt eines schief abgeschnittenen Cylinders ABCD wird gefunden, wenn man die Grundfläche AB oder den senkrechten Querschnitt des Cylinders mit der Länge der Axe h multiplizirt.



Die Länge der Axe ist das arithmetische Mittel zwischen der längsten und kürzesten Kante des Cylinders, oder es ist

$$\text{Axe} = h = \frac{AC + BD}{2}$$

Bezeichnet g den senkrechten Querschnitt des schief abgeschnittenen Cylinders und h die Länge der Axe, so ist der Inhalt des schief abgeschnittenen Cylinders

$$k = g \times h.$$

Ein schief abgeschnittenes Tonnengewölbe ist die Hälfte eines schief abgeschnittenen Cylinders.

Der Kubikinhalt eines schief abgeschnittenen Tonnengewölbes wird daher gefunden, wenn man den Flächeninhalt des senkrechten Querschnitts des Gewölbes mit der Länge der Axe, oder mit dem arithmetischen Mittel aus beiden Widerlagerlängen multiplizirt.

Z. B. Ein Halbkreis-Tonnengewölbe von 20′ Lichtweite 2,5′ Gewölbstärke sei an dem einen Widerlager 50′, am andern 70′ lang, welches ist sein Kubikinhalt?

Antwort: Der senkrechte Querschnitt des Gewölbes (mittlere Gewölblinie × Gewölbstärke) ist

$$= \frac{22,5 \times 3,14}{2} \times 2,5 = 88,31 \;\square';$$

die Länge der Gewölbaxe oder das arithmetische Mittel aus den beiden Widerlagerlängen ist

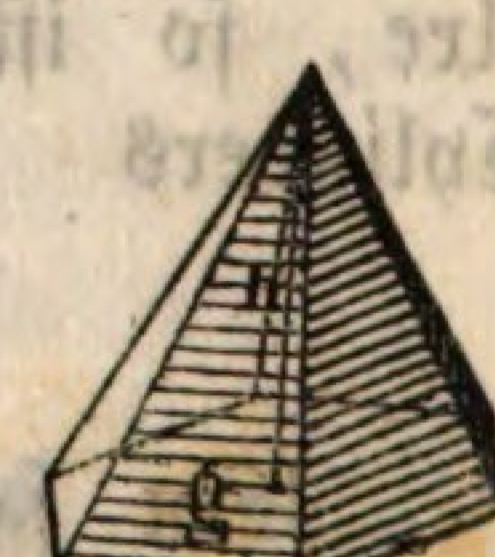
$$= \frac{50 + 70}{2} = 60';$$

daher der Kubikinhalt des Gewölbes

$$= 88,31 \times 60 = 5298,6 \text{ c}'. —$$

137. Der Kubikinhalt einer **Pyramide** wird gefunden, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplizirt und mit 3 dividirt.

Die Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma's von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.



Bezeichnet g die Grundfläche, h die Höhe einer Pyramide, so ist deren Kubikinhalt

$$k = \frac{g \times h}{3}.$$

Z. B. Welches ist der Kubikinhalt einer vierseitigen Pyramide von 12′ Seite und 18′ Höhe?

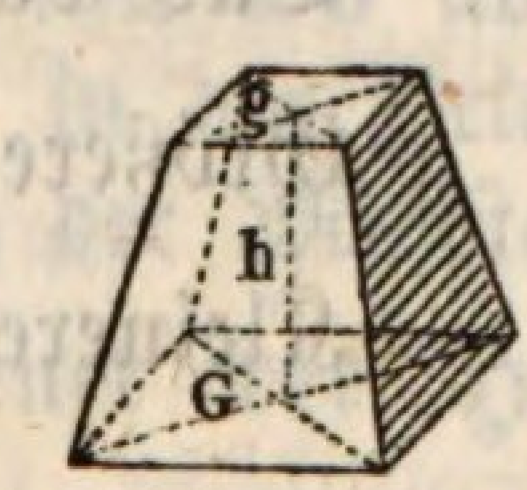
Antwort: $g = 12^2 = 12 \times 12 = 144$ □′ und

$$k = \frac{12^2 \times 18}{3} = 144 \times 6 = 864 \text{ c}'.$$

138. Der Kubikinhalt einer **abgestutzten Pyramide** wird gefunden, wenn man 1) die größere Grundfläche, 2) die kleinere Grundfläche, 3) die mittlere Proportionalfläche zu beiden Grundflächen berechnet, alle drei Flächen addirt, mit 3 dividirt und mit der Höhe der abgestutzten Pyramide multiplizirt.

Die mittlere Proportionalfläche erhält man, wenn man die größere und kleinere Grundfläche multiplizirt, und aus dem Produkte die Quadratwurzel auszieht.

Bezeichnet G die große, g die kleine Grundfläche, so ist die mittlere Proportionalfläche $= \sqrt{G \times g}$ und der Kubikinhalt der abgekürzten Pyramide



$$k = \left(\frac{G + g + \sqrt{G \times g}}{3}\right) \times h.$$

Z. B. Welchen Kubikinhalt hat eine vierseitige abgestutzte Pyramide, welche unten 6′, oben 4′ Seite und 8′ Höhe hat? Antwort:

Die größere Grundfl. ist $= 6^2 = 6 \times 6 = 36 \square'$,
„ kleinere „ „ $= 4^2 = 4 \times 4 = 16 \square'$,
„ mittlere Proportional-Fläche
$$= \sqrt{36 \times 16} = \sqrt{576} = 24 \square'.$$

Also der Kubikinhalt

$$k = \left(\frac{36 + 16 + 24}{3}\right) \times 8 = \frac{76}{3} \times 8 = 202{,}66 \text{ c}'.$$

139. Annäherungsweise findet man den Inhalt einer abgestutzten Pyramide, wenn man das arithmetische Mittel aus beiden Grundflächen mit der Höhe der abgestutzten Pyramide multiplizirt.

Bezeichnet wieder G die große, g die kleine Grundfläche, h die Höhe und k den Kubikinhalt, so ist dieser nach der eben gegebenen Regel annähernd

$$k = \left(\frac{G + g}{2}\right) \times h.$$

Das vorige Beispiel hiernach berechnet, gibt:

Größere Grundfläche $= 36 \square'$.
Kleinere „ $= 16 \square'$.
Mittlere „ $= \frac{52}{2} = 26 \square'$.

Also der Kubikinhalt
$$k = 26 \times 8 = 208 \text{ c}',$$

folglich um $208 - 202{,}66 = 5{,}34$ c' zu viel.

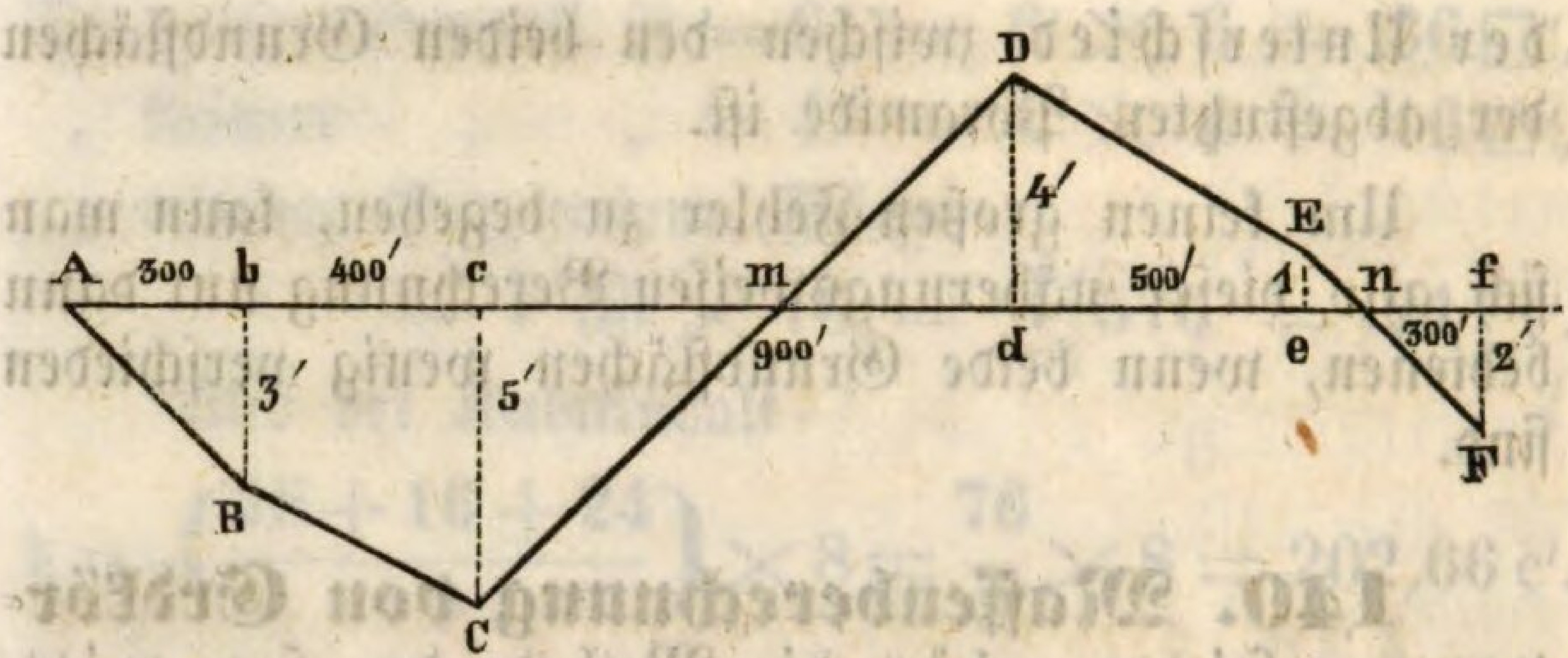
Diese Näherungsmethode gibt allemal zu viel, und zwar ist der Fehler um so größer, je größer

der Unterschied zwischen den beiden Grundflächen der abgestutzten Pyramide ist.

Um keinen großen Fehler zu begehen, kann man sich also dieser näherungsweisen Berechnung nur dann bedienen, wenn beide Grundflächen wenig verschieden sind.

140. Massenberechnung von Erdkörpern. Hieher gehört die Methode der sog. mittleren Profilrechnung, nach welcher die Erdkörper bei einer aufzufüllenden oder abzutragenden Straße, bei Planirung eines Platzes 2c. berechnet werden, und wovon ein Beispiel gegeben werden soll.

Es sei ABCDEF das Längenprofil eines unebenen Terrains, welches durch Nivellement (Abwägung mit der Setzwage, Canalwage) ermittelt und aufgetragen wurde, wobei der Maßstab der Längen, um die Höhenunterschiede des Bodens anschaulicher zu machen, 100 mal kleiner als jener der Höhen, angenommen ist. (Im Holzschnitt stellt zum Beispiel Ab = 300′ Länge, die gleich große Linie Bb aber nur 3′ Höhe dar; da nun Ab = Bb in der Zeichnung = 3 dec. Linien bayr. ist, so ist der Maßstab der Längen = $\frac{0,03}{300}$ oder $\frac{1}{10000}$, jener der Höhen = $\frac{0,03}{3}$ oder $\frac{1}{100}$ der natürlichen Größe, also der Maßstab der Höhen 100 mal größer als jener der Längen.) Ueber dieses Terrain soll eine horizontale Straße in der Höhenlage des Punktes A angelegt werden, deren Krone (Oberfläche) im Längenprofil alsdann in der horizontalen Linie Af erscheint. Um diese Straße zu planiren, muß nach dem Plan bei B 3′, bei C 5′, bei F 2′ aufgefüllt, bei D aber

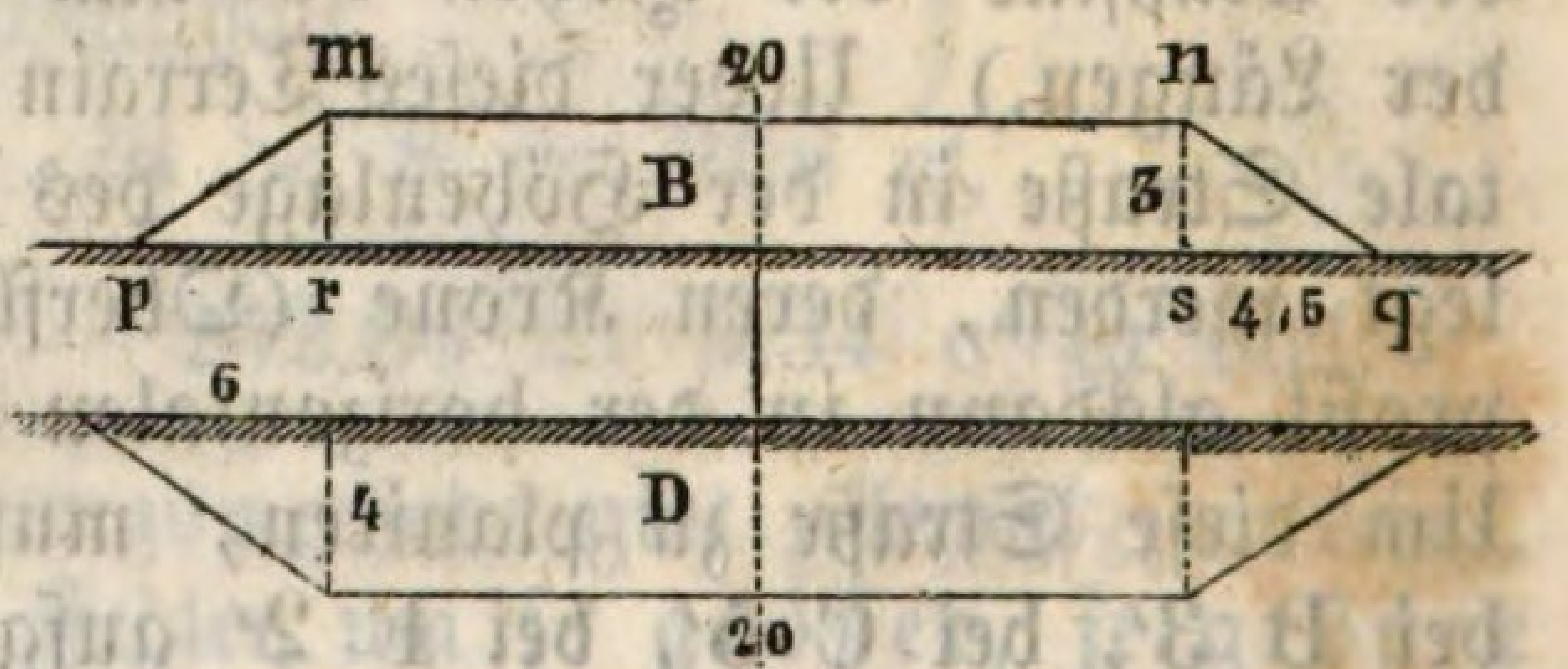


4′, bei E 1′ abgehoben werden. Die Längen sind: Ab = 300′, bc = 400′, cd = 900′, de = 500′; ef = 300′; in Summa 2400′.

Es fragt sich, wie groß ist die aufzufüllende und abzutragende Erdmasse, wenn die Straße 20′ Kronbreite und $1\frac{1}{2}$ malige Böschungen erhält, und der Boden in der Richtung senkrecht auf die Straße als horizontal angenommen werden kann?

Auflösung: Man construirt zuerst die Querprofile der Straße für die Puukte B, C, D, E, F und berechnet die Flächeninhalte der Querprofile des Straßenkörpers.

So findet man nach den gegebenen Maßen für die 3′ hohe Aufdämmung (Auftrag) bei B als Querprofilfläche (Auftragsfläche) das Trapez mnpq, in welchem mn = 20′, die Auftraghöhe mr = ns = 3′ und hieraus wegen der $1\frac{1}{2}$ maligen Böschung pr = sq = $1\frac{1}{2} \times 3$ = 4,5′, sohin pq = 4,5 + 20



+ 4,5 = 29′ ist. Der Flächeninhalt des Querprofils bei B ist hienach

$$= \left(\frac{20 + 29}{2}\right) \times 3 = 73{,}50 \,\square'.$$

Ebenso findet man die Fläche des Querprofils bei D im Einschnitt (Abtrag), wo pq = 6 + 20 + 6 = 32′ wird

$$= \left(\frac{20 + 32}{2}\right) \times 4 = 104{,}00 \,\square'.$$

Ebenso wird bei allen andern Querprofilen die Fläche ermittelt. Diese Flächeninhalte stellt man nun der Reihenfolge nach zusammen, wie folgt:

Auftragfläche bei A = $= 0{,}00 \,\square'$

" " B $= \left(\frac{20+29}{2}\right) \times 3 = 73{,}50$ "

" " C $= \left(\frac{20+35}{2}\right) \times 5 = 137{,}50$ "

Abtragfläche " D $= \left(\frac{20+32}{2}\right) \times 4 = 104{,}00$ "

" " E $= \left(\frac{20+23}{2}\right) \times 1 = 21{,}50$ "

Auftragfläche " F $= \left(\frac{20+26}{2}\right) \times 2 = 46{,}00$ "

Aus diesen Flächen der Querprofile wird nun mit Hilfe der Längen der Kubikinhalt des Auftrags und Abtrages berechnet. Man betrchtet nehmlich den zwischen 2 auf einander folgenden Querprofilen enthaltenen Erdkörper als eine abgekürzte Pyramide, und findet daher annähernd den Kubikinhalt desselben, indem man die halbe Summe beider Querprofilflächen

mit der entsprechenden Länge multiplizirt, oder was dasselbe, aber bequemer ist, indem man die Summe beider Querprofilflächen mit der halben Länge multiplizirt. Dieß gilt jedoch nur, so lange beide Querprofile Auftrag, oder beide Abtrag enthalten, wie zwischen B und C, oder D und E. Geht aber zwischen 2 Querprofilen der Auftrag in Abtrag über, wie zwischen C und D oder E und F, so bilden die Erdkörper keine abgestutzten Pyramiden, sondern keilförmige Körper, welche ihre Grundflächen in den entsprechenden Querprofilen haben und sich an ihren Schneiden berühren. So bilden der Auftragkörper Ccm und der Abtragkörper Ddm 2 Keile, deren Grundflächen die entsprechenden Querprofile bei Cc und Dd sind, und deren Schneiden in m zusammenstoßen. Ein solcher Keil Ccm wird berechnet, indem man die Querprofilfläche bei Cc mit der halben Länge cm, welche die reduzirte Länge heißt, multiplizirt. Die reduzirten Längen cm und dm findet man, indem man die ganze Länge cd den Höhen Cc und Dd entsprechend (proportional) theilt. Da $Cc = 5'$, $Dd = 4'$ und $cd = 900'$ ist, so wird der Schnittpunkt m die Linie cd in 2 Theile theilen, die sich verhalten wie 5 zu 4. Man wird daher cd in $5 + 4$ oder in 9 Theile zu theilen haben, und es wird $cm = \frac{5}{9}$ und $dm = \frac{4}{9}$ von cd, oder $cm = \frac{5}{9} \times 900 = 500'$ und $cm = \frac{4}{9} \times 900 = 400'$ sein. Dasselbe Verfahren ist zwischen E und F zu beobachten. Da $ef = 300'$, $Ee = 1'$ und $Ff = 2'$ ist, so wird die reduzirte Länge $fn = \frac{2}{3}$ von $300 = 200'$, und $en = \frac{1}{3}$ von $300 = 100'$ sein.

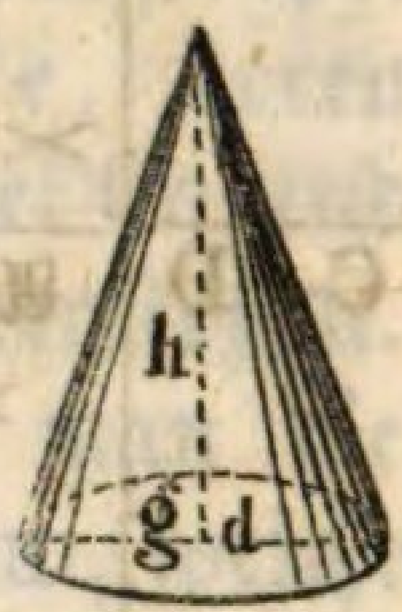
Hienach ergibt sich für die Berechnung des Kubikinhaltes der Erdkörper von A bis F in Schachtruthen folgendes Rechnungsschema:

Zwischen den Profilen	Berechnung.	Querprofilfläche in □'	Kubikinhalt: Auftrag in Schachtrth.	Kubikinhalt: Abtrag in Schachtrth.
A—B	Auftragfläche bei A	0,00		
	" " B	73,50		
	zusammen	73,50	110,25	—
	× halbe Länge = $\frac{300}{2}$	150,00		
B—C	Auftragfläche bei B	73,50		
	" " C	137,50		
	zusammen	211,00	422,00	—
	× halbe Länge = $\frac{400}{2}$	200,00		
C—D	Auftragfläche bei C	137,50	343,75	—
	× halbe reduzirte Länge = $\frac{500}{2}$	250,00		
	Abtragfläche bei D	104,00	—	208,00
	× halbe reduzirte Länge = $\frac{400}{2}$	200,00		
D—E	Abtragfläche bei D	104,00		
	" " E	21,50		
	zusammen	125,50	—	313,75
	× halbe Länge = $\frac{500}{2}$	250,00		
E—F	Abtragfläche bei E	21,50	—	10,75
	× halbe reduzirte Länge = $\frac{100}{2}$	50,00		
	Auftragfläche bei F	46,00	46,00	—
	× halbe reduzirte Länge = $\frac{200}{2}$	100,00		
	Gesammt-Auftrag	=	922,00	
	Gesammt-Abtrag	=	. . . .	532,50
	Bleibt Auftrag mehr	=	390,50 Schtrthn.	

Diese 532,50 Schachtruthen sind in dem Einschnitt bei D zu graben, dann zu laden und in die Aufdämmung bei C auf eine mittlere Entfernung = CD = 900′ zu transportiren; die zur Auffüllung noch fehlenden 390,50 Schachtruthen sind seitwärts zu erholen, woraus sich die Kosten der Erdarbeiten berechnen lassen. —

141. Der Kubikinhalt eines **Kegels** wird gefunden, wenn man die Grundfläche mit dem dritten Theile der Höhe multiplizirt.

Der Kegel ist der dritte Theil eines Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe.



Bezeichnet g die Grundfläche (Kreisfläche) des Kegels, d seinen Durchmesser und h seine Höhe, so ist der Kubikinhalt k des Kegels

$$k = \frac{g \times h}{3} = \left(\frac{3{,}14 \times d^2}{4}\right) \times \frac{h}{3}$$

Z. B. Welches ist der Kubikinhalt eines Kegels von 3′ Durchmesser und 12′ Höhe?

Antwort:

$$k = \left(\frac{3{,}14 \times 3^2}{4}\right) \times \frac{12}{3} = 28{,}26 \text{ c}'.$$

142. Der Kubikinhalt eines **abgestutzten Kegels** wird gefunden, wenn man 1) das Quadrat des großen Durchmessers, 2) das Quadrat des kleinen Durchmessers, 3) das Produkt aus beiden Durchmessern berechnet, die drei Resultate addirt, mit 3,14 und



mit der Höhe des abgestutzten Kegels multiplizirt, und mit 12 dividirt.

Bezeichnet D den großen, d den kleinen Durchmesser des abgestutzten Kegels, h seine Höhe, so ist der Kubikinhalt

$$k = \frac{3{,}14 \times (D^2 + d^2 + D \times d) \times h}{12}.$$

Z. B. Welches ist der Kubikinhalt eines Baumstammes, welcher unten 3', oben 1' Durchmesser und 70' Länge hat?

Antwort:

$$k = \frac{3{,}14 \times (3^2 + 1^2 + 3 \times 1) \times 70}{12}$$

$$= \frac{3{,}14 \times (9 + 1 + 3) \times 70}{12}$$

$$= \frac{3{,}14 \times 13 \times 70}{12} = 238{,}11 \text{ c}'$$

Annäherungsweise wird der Kubikinhalt eines abgestutzten Kegels gefunden, wenn man denselben als einen Cylinder von gleicher Höhe ansieht, dessen Durchmesser das arithmetische Mittel aus den beiden Durchmessern des abgestutzten Kegels ist.

Das vorige Beispiel nach dieser Regel berechnet, gibt:

Der mittlere Durchmesser ist $\frac{3 + 1}{2} = 2'$, also der Kubikinhalt des abgestutzten Kegels

$$k = \left(\frac{3{,}14 \times 2^2}{4}\right) \times 70 = \left(\frac{3{,}14 \times 4}{4}\right) \times 70$$

$$= 3{,}14 \times 70 = 219{,}8 \text{ c}',$$

daher um 18,31 c' zu wenig.

Die letztere Näherungsmethode gibt allemal zu wenig, und der Fehler ist um so größer, je größer der Unterschied zwischen den beiden Durchmessern des abgestutzten Kegels ist.

Um keinen großen Fehler zu begehen, darf man sich also der letzten Methode nur bedienen, wenn die beiden Durchmesser wenig verschieden sind.

Bei Berechnung des Kubikinhalts von Baumstämmen kann dieß immer stattfinden, da wegen der unregelmäßigen Form der Baumstämme ihr Kubikinhalt ohnehin nicht genau gefunden werden kann.

Für die Berechnung runder Baumstämme gilt daher die für die Praxis hinreichend genaue Regel:

Der Kubikinhalt eines runden Baumstammes wird gefunden, wenn man den mittleren Durchmesser ins Quadrat erhebt, mit 3,14 multiplizirt, mit 4 dividirt und mit der Länge des Stammes multiplizirt.

Beispiel. Ein Sägeblock hat unten 18″ dd, oben 16″ dd Durchmesser und 20′ Länge, welches ist sein Kubikinhalt?

Antwort: Der mittlere Durchmesser ist $= \frac{16+18}{2}$ $= 17''$ dd $= 1{,}41666\ldots$ oder $1{,}417$, daher der Kubikinhalt

$$k = \frac{3{,}14 \times 1{,}417^2}{4} \times 20 = 31{,}525 \text{ c}'. —$$

143. Der Kubikinhalt einer **Kugel** wird gefunden, wenn man den Kubus (Würfel)

des Durchmessers mit 3,14 multiplizirt und mit 6 dividirt.

Bezeichnet d den Durchmesser der Kugel, k den Kubikinhalt, so ist dieser



$$k = \frac{3,14 \times d^3}{6} = 0,523 \times d^3$$

Weil d^3 der Kubikinhalt des um die Kugel beschriebenen Würfels und $\frac{3,14}{6} = 0,523$ etwas größer als 0,5 oder $\frac{1}{2}$ ist, so kann man auch sagen:

Die Kugel ist etwas größer als die Hälfte des sie umschließenden Würfels.

1. Beispiel. Welches ist der Kubikinhalt einer Kugel von 1′ Durchmesser?

Antwort:

$$k = \frac{3,14 \times 1^3}{6} = \frac{3,14}{6} = 0,523\ c' = 523''\ \text{dec.}$$

Während also der umschließende Würfel von 1′ Seite 1 c′ oder 1000 c″ dec. Inhalt hat, hat die Kugel von gleichem Durchmesser nur 523 c″ dec. Inhalt.

2. Beispiel. Welches ist der Kubikinhalt einer Kugel von 2,5′ Durchmesser?

Antwort:

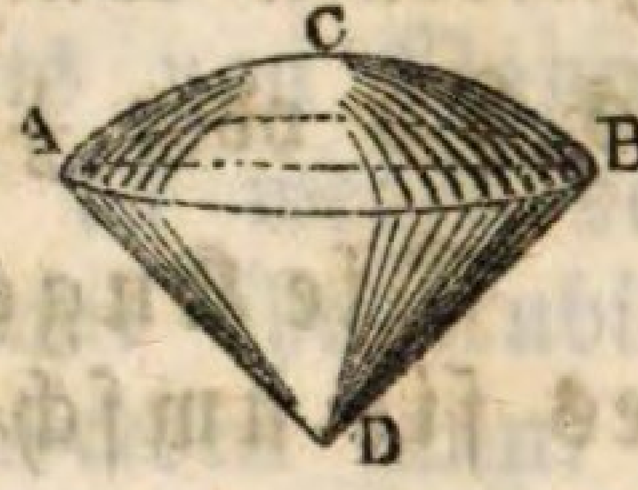
$$k = \frac{3,14 \times 2,5^3}{6} = \frac{3,14 \times 15,625}{6} = 8,177\ c'.$$

3. Beispiel. Der Durchmesser der Erde ist rund 1720 Meilen, welches ist ihr Kubikinhalt?

Antwort:
$= 0{,}523 \times 1720^3 = 0{,}523 \times 1720 \times 1720 \times 1720$
= 371 258 304 Kubik-Meilen, oder 371 Millionen 258 Tausend 304 Kubik-Meilen.

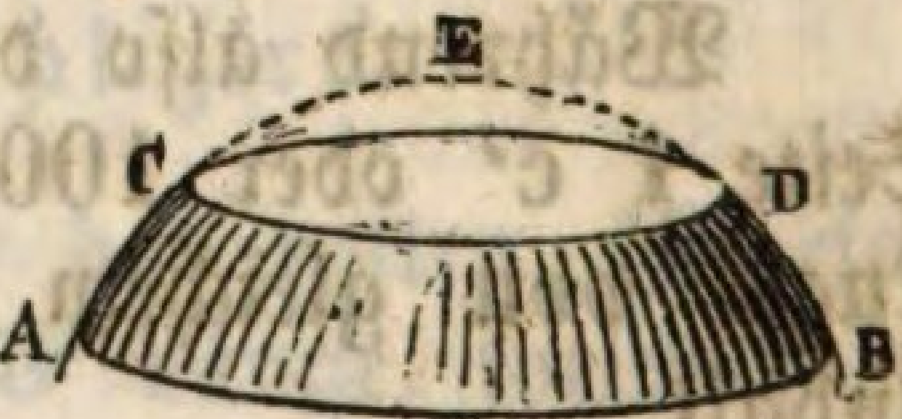
Eine Kubik-Meile ist ein Würfel, welcher 1 Meile Seite hat, also ein Raum 24000′ lang, 24000′ breit und 24000′ hoch.

144. Der Kubikinhalt eines Kugelausschnittes (Kugelsektors) ABCD wird gefunden, wenn man die Fläche des Käppchens ABC mit dem dritten Theile des Radius AD multiplizirt.



Der Kubikinhalt eines Kugelabschnittes (Käppchens) ABC wird gefunden, wenn man vom Kubikinhalt des Kugelausschnittes ABCD den Inhalt des Kegels ABD abzieht.

Der Kubikinhalt einer Kugelzone ABCD wird gefunden, wenn man vom Inhalt des größeren Kugelabschnittes ABE den des kleineren CDE abzieht.



145. Der Inhalt einer **hohlen Kugel** (Kugelwand) wird gefunden, wenn man vom Inhalt der ganzen Kugel den des hohlen Raumes abzieht, oder kürzer, wenn man vom Kubus des größeren Durchmessers den Kubus des kleineren Durchmessers abzieht, mit 3,14 multiplizirt und mit 6 dividirt.

Bezeichnet D den äußeren, d den inneren Durch-

messer und k den Kubikinhalt der hohlen Kugel, so ist dieser

$$k = \frac{3,14 \times (D^3 - d^3)}{6}.$$

Z. B. Welches ist der Kubikinhalt einer halbkugelförmigen Kuppel von 30′ innerem Durchmesser und 1′ Wanddicke?

Antwort: Der äußere Durchmesser ist

$$30 + 2 \times 1 = 32',$$

sohin der Kubikinhalt

$$k = \tfrac{1}{2} \times \left(\frac{3,14 \times (32^3 - 30^3)}{6}\right)$$

$$= \frac{3,14 \times (32768 - 27000)}{12}$$

$$= \frac{3,14 \times 5768}{12} = 1509,29 \text{ c}'.$$

146. Ist der Kubikinhalt einer Kugel gegeben, so findet man daraus den Durchmesser, wenn man den Kubikinhalt mit 6 multiplizirt, mit 3,14 dividirt und die Kubikwurzel auszieht.

Bezeichnet k den Kubikinhalt einer Kugel, so ist der dazu gehörige Durchmesser

$$d = \sqrt[3]{\frac{6 \times k}{3,14}}.$$

Z. B. Eine Kugel soll 20 c′ halten, welches ist ihr Durchmesser? Antwort:

$$d = \sqrt[3]{\frac{6 \times 20}{3,14}} = \sqrt[3]{38,216} = 3,37'.$$

147. Kegel, Kugel und Cylinder von gleichem Durchmesser und gleicher Höhe verhalten sich wie 1 : 2 : 3.



Beschreibt man um eine Kugel einen Cylinder ABCD, dessen Durchmesser AB und Höhe AC gleich dem Durchmesser der Kugel ist, und in den Cylinder einen Kegel ABE von gleichem Durchmesser und gleicher Höhe, und bezeichnet man den Durchmesser der Kugel mit d, so ist auch der Durchmesser und die Höhe des Cylinders und des Kegels = d, und es sind die Kubikinhalte der drei Körper:

$$1.\ \text{Kegel} = \left(\frac{3,14 \times d^2}{4}\right) \times \frac{d}{3} = \frac{3,14 \times d^3}{12}$$

$$2.\ \text{Kugel} = \frac{3,14 \times d^3}{6}$$

$$3.\ \text{Cylinder} = \left(\frac{3,14 \times d^2}{4}\right) \times d = \frac{3,14 \times d^3}{4}.$$

Die drei Körper verhalten sich also

Kegel : Kugel : Cylinder = $\frac{1}{12} : \frac{1}{6} : \frac{1}{4}$ oder wenn man die drei Brüche auf die Benennung 12 bringt,

Kegel : Kugel : Cylinder = 1 : 2 : 3.

Der Kegel ist also $\frac{1}{3}$, die Kugel $\frac{2}{3}$ des umschließenden Cylinders.

148. Der Kubikinhalt eines **offenen** oder **geschlossenen Kreuzgewölbes**, eines **böhmischen Gewölbes** wird gefunden, wenn man die mittlere Gewölbfläche mit der Dicke des Gewölbes multiplizirt.

Z. B. Welches ist der Kubikinhalt a) eines geschlossenen, b) eines offenen Kreuzgewölbes mit quadratischer Grundfläche von 18′ Spannweite und 0,75′ Stärke?

Antwort: Die Seite der Grundfläche der mittleren Gewölbfläche ist $18' + 2 \times \frac{0{,}75}{2} = 19{,}5'$. Daher der Kubikinhalt des geschlossenen Kreuzgewölbes

a) $k = 2 \times 19{,}5^2 \times 0{,}75 = 570{,}375$ c′;

und der Kubikinhalt des offenen

b) $k = 1{,}14 \times 19{,}5^2 \times 0{,}75 = 325{,}11375$ c′.

(Vergl. 124.)

Die Gewölbfläche eines böhmischen Gewölbes findet man, indem man die entwickelte Bogenlänge des Gewölbes am Scheitel nach der Richtung der Länge und ebenso die entwickelte Länge des Bogens in der Richtung der Breite aus dem Plan herausmißt, und beide Längen mit einander multiplizirt. Diese Gewölbfläche mit der Stärke (Dicke) des Gewölbes multiplizirt, gibt den Kubikinhalt des Gewölbes.

Diese Methode gibt jedoch nur ein annähernd genaues Resultat. Eine absolut genaue Berechnung des böhmischen Gewölbes gibt es nicht, da die Ge-

wölbfläche des böhmischen Gewölbes keine Cylinder- und keine Kugelfläche, sondern ein Stück einer nach 2 Seiten elliptisch gekrümmten Fläche ist.

Fünftes Kapitel.

Vom spezifischen Gewichte und der Berechnung des Gewichts der Körper.

149. Erklärungen. — Im Bauwesen ist es oft von großer Wichtigkeit, das Gewicht irgend eines Körpers durch Rechnung finden zu können. Nicht immer hat man eine Wage und den Gegenstand selbst, dessen Gewicht man bestimmen will, bei der Hand; wie z. B. wenn es sich um das Gewicht eines laufenden Schuhes eisernen Fenstergitters von einer gewissen Stärke handelt, oder das Gewicht eines Quadratschuhes Kupfer- oder Zinkblech von einer gewissen Dicke gesucht werden soll. In vielen Fällen ist es sogar eine Unmöglichkeit, das Gewicht eines Körpers auf der Wage zu finden, wie z. B. das Gewicht einer großen steinernen Säule, von der man wissen will, ob sie auf einem Wagen von dieser oder jener Tragkraft verladen werden kann. Ebenso kann das Gewicht eines Gewölbes, eines Dachstuhles, einer Mauer u. s. w. nur durch Rechnung gefunden werden.

Dieß geschieht mit Hilfe der im vorigen Kapitel erklärten Körperberechnung und des sogenannten spezifischen Gewichts.

150. Absolutes und spezifisches Gewicht. — Alle Körper haben ein Bestreben, wenn sie nicht unterstützt werden, gegen die Erde zu fallen. Dieses Bestreben ist eine Folge der Anziehungskraft oder Schwerkraft der Erde, welche alle Theilchen eines Körpers gleich stark gegen den Mittelpunkt der Erde, in welchem man sich die ganze Masse des Erdkörpers vereinigt denken kann, anzieht. Wird ein Körper durch eine Unterlage vor dem Fallen geschützt, so äußert er sein Bestreben zu fallen, durch einen Druck auf die Unterlage. Dieser Druck heißt das Gewicht des Körpers. Da jedes Massentheilchen eines Körpers von der Erde angezogen wird, so äußert auch jedes auf die Unterlage einen Druck, welcher also um so größer wird, je mehr Massentheilchen der Körper hat. Ein Körper ist also um so schwerer, oder das Gewicht eines Körpers ist um so größer, je mehr Masse er hat.

Ein Körper kann aber aus zwei Ursachen mehr Masse haben als ein anderer. Der eine Körper kann entweder bei derselben inneren Beschaffenheit einen größeren Raum- (Kubik) Inhalt und folglich eine größere Masse haben als der andere, in Folge dessen z. B. ein größeres Stück Holz mehr wiegt als ein kleineres; oder es kann der erste Körper bei demselben Kubikinhalt, wie der zweite, mehr Masse enthalten und deßhalb schwerer sein als der zweite. Eine bleierne Kugel z. B. ist schwerer als eine gleich große hölzerne Kugel; die bleierne Ku-

gel muß also in demselben Raum mehr Masse enthalten, als die hölzerne. Man sagt deßhalb: Das Blei ist dichter als das Holz, oder: das spezifische (eigenthümliche) Gewicht des Bleies ist größer als das des Holzes. Je größer also die Dichtigkeit eines Körpers ist, desto größer ist auch sein spezifisches Gewicht und umgekehrt.

Zum Unterschiede von dem spezifischen (eigenthümlichen) Gewicht eines Körpers wird das Gewicht oder die Schwere desselben, wie sie auf der Wage gefunden wird, auch das absolute Gewicht des Körpers genannt.

Man bestimmt das spezifische Gewicht eines Körpers durch Vergleichen seines absoluten Gewichts (welches auf der Wage gefunden wird) mit dem absoluten Gewicht einer Wassermenge, welche mit dem Körper gleichen Kubikinhalt hat.

Wägt man zum Beispiel einen c′ Sandstein, so findet man dessen (absolutes) Gewicht = 104 Pfd. Eine gleich große Menge reinen Wassers oder 1 c′ Wasser wiegt aber nur 44,4 Pfd. Ein c′ Sandstein ist also $\frac{104}{44,4} = 2,34$ mal schwerer als 1 c′ Wasser; das spezifische Gewicht des Sandsteins ist also 2,34.

Wägt man einen c′ Schmiedeisen, so findet man, daß er ohngefähr 344,4 Pfd. wiegt, ein c′ Wasser wiegt aber nur 44,4 Pfd., folglich ist das Schmiedeisen $\frac{344,4}{44,4} = 7,75$ mal schwerer als das Wasser, oder das spezifische Gewicht des Schmiedeisens ist 7,75.

Das spezifische Gewicht eines Körpers ist also eigentlich gar kein Gewicht, sondern nur

die Zahl, welche angibt, wie viel Mal ein Körper schwerer ist, als eine gleich große Menge reinen Wassers.

151. Bestimmung des spezifischen Gewichts. — Auf diese Art ließe sich das spezifische Gewicht eines jeden festen Körpers bestimmen. Da es jedoch sehr schwer halten dürfte, immer einen richtigen geometrischen Körper, wie 1 c′ oder 1 c″ aus der Materie herzustellen, deren spezifisches Gewicht man bestimmen will, so hat man folgenden einfacheren und zugleich mehr Genauigkeit darbietenden Weg eingeschlagen.

Wägt man nämlich einen c′ Eisen auf der Wage ab, und dann wieder denselben c′ Eisen mit einem Faden an die eine Wagschale aufgehängt unter Wasser, so findet man, daß derselbe, während er an der Luft 344,4 Pfd. wog, im Wasser an Gewicht verliert und nur mehr 300 Pfd. wiegt.

Dieser Erscheinung liegt der Satz zu Grunde:

Ein Körper verliert in einer Flüssigkeit genau so viel von seinem Gewichte, als die Flüssigkeit wiegt, welche er aus der Stelle verdrängt.

Ein c′ Eisen verdrängt nun im Wasser 1 c′ Wasser. Das Wasser trägt also von dem Gewicht des eingetauchten c′ Eisens gerade so viel, als ob Wasser an seiner Stelle wäre, nämlich so viel, als 1 c′ Wasser wiegt oder 44,4 Pfd. Der c′ Eisen wird also im Wasser nur 344,4 — 44,4 = 300 Pfd. wiegen, und man muß also an dem Wagbalken, woran der c′ Eisen mit einem Faden in das

Wasser hängt, noch 44,4 Pfd. auflegen, damit die Wage wieder in's Gleichgewicht kommt, das aufgelegte Gewicht gibt das Gewicht der von dem eingetauchten Körper verdrängten Wassermenge an. Das aufgelegte Gewicht gibt daher das Gewicht an, welches der Körper wiegen würde, wenn er von Wasser wäre.

Würde statt eines c' Eisens 1 c' eines andern Materials eingetaucht, so würde immer noch 1 c' Wasser verdrängt, also immer noch 44,4 Pfd. aufgelegt werden müssen.

Man sieht, daß bei dieser Art, das spezifische Gewicht eines Körpers zu bestimmen, es gar nicht darauf ankommt, welche Gestalt der Körper hat. Will man z. B. das spezifische Gewicht irgend eines Steines bestimmen, so wägt man ein Stück davon auf einer genauen Wage in der Luft ab, und findet z. B. $18\frac{1}{2}$ Loth. Hängt man nun denselben Stein an dem einen Wagbalken mittels eines feinen Fadens in Wasser, und findet man, daß zu dem im Wasser hängenden Stein $7\frac{1}{4}$ Loth zugelegt werden müssen, damit die Wage wieder in's Gleichgewicht kommt, so folgert man hieraus, daß der Stein im Wasser $7\frac{1}{4}$ Loth an Gewicht verloren hat, daß also genau ebensoviel die Wassermenge wiegt, welche er verdrängt, mit andern Worten, daß der Stein, wenn er von Wasser wäre, $7\frac{1}{4}$ Loth wiegen würde. Das spezifische Gewicht des Steines ist also

$$= \frac{\text{Absolutes Gewicht des Steines}}{\text{Absol. Gew. der gleichen Menge Wassers}}$$

$$= \frac{18\frac{1}{2}}{7\frac{1}{4}} = \frac{18,5}{7,25} = 2,55$$

oder der Stein ist 2,55mal schwerer als ein gleicher Rauminhalt Wasser.

Das spezifische Gewicht von Hölzern findet man am einfachsten dadurch, daß man ein genau gearbeitetes, vierseitiges, rechtwinklig abgeschnittenes prismatisches Stäbchen von dem zu untersuchenden Holz von beliebiger Länge in 10 oder 100 gleiche Theile theilt, und vertikal in eine nicht viel weitere mit Wasser gefüllte Röhre stellt. Sinkt das Stäbchen bis $\frac{4}{10}$ seiner Länge ein, so ist das spezifische Gewicht des Holzes 0,4; sinkt es bis $\frac{9}{10}$ ein, so ist das spezifische Gewicht 0,9 u. s. w.

Weiß man das spezifische Gewicht eines Körpers, so findet man das Gewicht von einem bayer. c′, wenn man das spezifische Gewicht mit dem Gewichte eines c′ Wassers oder 44,4, genauer 44,39 multiplizirt.

Ist z. B. das spezifische Gewicht des Sandsteins 2,34, so wiegt 1 c′ solchen Sandsteins 2,34 × 44,4 Pfund = 104 Pfund.

Ist das spezifische Gewicht des trockenen Tannenholzes 0,45, so wiegt 1 c′ trockenes Tannenholz = 0,45 × 44,4 = 19,98 oder 20 Pfund.

152. Tabelle des spezifischen Gewichts der Körper. — Die folgende Tabelle gibt eine Uebersicht der spezifischen Gewichte verschiedener Baumaterialien und einiger anderer Körper mit Beisetzung des für die Praxis wichtigen absoluten Gewichtes von 1 c′ dieser Materialien in bayer. Pfunden.

Spezifisches Gewicht verschiedener Baumaterialien und anderer Körper.

Stoffe.	Spezifisches Gewicht.	1 Kubikschuh wiegt bayer. Pfd.
Wasser	1,00	44,4
Schmiedeisen	7,78	345
Gußeisen	7,21	320
Stahl, englischer . . .	7,83	347
Gußmessing	8,44	375
Messingdraht	8,54	379
Kupferdraht	8,87	394
Kupferblech	9,00	400
Zinn	7,29	324
Zink	7,19	319
Zinkblech	7,86	349
Blei	11,35	504
Glas	2,89	128
Granit	2,54	113
Kalkstein	2,70	120
Gebrannter Kalk . . .	2,25	100
Gypsstein	2,16	96
Marmor	2,77	123
Ziegelsteine, feste . . .	1,61	72
Bruchsteinmauer, trocken .	2,39	106
Backsteinmauer, trocken .	1,47	65
Sandstein, gewöhnlicher .	2,34	104
Tuffstein, harter . . .	2,00	89
Nagelfluhe	2,09	93
Sand	1,65	74
Lehm, fetter	1,60	71
Gartenerde, fette . . .	1,62	72
Erde, lockere und magere	1,33	59

Stoffe.	Spezifisches Gewicht.	1 Kubikschuh wiegt bayer. Pfd.
Thon, gemeiner . . .	1,89	84
Lehm, erhärteter . . .	1,51	67
Eichenholz, frisches . .	0,85	38
" trockenes . .	0,70	34
Lerchenholz, frisches . .	0,60	30
" trockenes . .	0,47	21
Kiefern, frisch	0,88	39
" trocken . . .	0,45	20
Fichten, frisch	0,90	40
" trocken . . .	0,45	20
Tannen, frisch	0,92	41
" trocken . . .	0,49	22
Pech	1,14	51
Weizen	0,77	34
Korn	0,72	32
Gerste	0,67	30
Haber	0,45	20
Eis, klares	0,91	40
Schnee, im Mittel . .	0,16	7

153. Anwendung des spezifischen Gewichts auf die Berechnung des Gewichts der Körper. — Ist das absolute Gewicht eines Körpers zu berechnen, so bestimmt man zuerst seinen Kubikinhalt nach den im vorigen Kapitel gegebenen Regeln, und multiplizirt den Kubikinhalt mit dem in der Tabelle gegebenen Gewicht von 1 c′ desjenigen Stoffes, aus welchem der Körper besteht; das Resultat ist das absolute Gewicht des Körpers in bayer. Pfunden.

1. Beispiel. Welches ist das Gewicht eines Kalksteinquaders von $4\frac{1}{2}'$ Länge, $3'$ Breite, $2\frac{1}{4}'$ Höhe?

Antwort: Der Kubikinhalt k ist

$$k = 4{,}5 \times 3 \times 2{,}25 = 30{,}375\ c',$$

daher sein Gewicht w, da 1 c' Kalkstein nach der Tabelle 120 Pfd. wiegt.

$$w = 30{,}375 \times 120\ \text{Pfd.} = 3645\ \text{Pfd.} = 36{,}45\ \text{Ztr.}$$

2. Beispiel. Welches ist das Gewicht eines Mauerziegels von $14''$ dd Länge, $7''$ dd Breite und $3\frac{1}{2}''$ dd Höhe?

Antwort: Der Kubikinhalt k ist

$$k = 14 \times 7 \times 3{,}5 = 343\ c''\ \text{dd}.$$

1 c' ist aber = 1728 c'' dd, also hat der Ziegel

$$k = \frac{343}{1728}\ c' = 0{,}198\ c'.$$

Sein Gewicht w ist daher, weil 1 c' Ziegel nach der Tabelle 72 Pfd. wiegt,

$$w = 0{,}198 \times 72\ \text{Pfd.} = 14{,}256\ \text{Pfd.}$$

oder ohngefähr 14 Pfd.

3. Beispiel. Wie schwer ist der laufende Fuß schmiedeisernes Fenstergitter, a) von $\frac{3}{4}''$ dd und b) von $1''$ dd Stärke?

Antwort:

Es ist $1' = 12''$ dd, daher der Kubikinhalt

a) $k = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times 12 = \frac{9}{16} \times 12 = 6{,}75\ c''$ dd

$$= \frac{6{,}75}{1728}\ c' = 0{,}00390\ c'$$

und das Gewicht, da 1 c′ Eisen 345 Pfd. wiegt,

$w = 0{,}0039 \times 345$ Pfd. $= 1{,}34$ Pfd.

b) $k = 1 \times 1 \times 12 = 12$ c″ dd $= \frac{12}{1728}$ c′

$= 0{,}00695$ c′

$w = 0{,}00695 \times 345$ Pfd. $= 2{,}39$ Pfd.

4. Beispiel. Welches ist das Gewicht eines □Schuhes Kupferblech von $\frac{1}{2}$‴ dd Stärke?

Antwort: Es ist $\frac{1}{2}$‴ dd $= \frac{1}{24}$″ dd, daher

$k = 12 \times 12 \times \frac{1}{24} = \frac{144}{24}$ c″ dd $= 6$ c″ dd

$= \frac{6}{1728}$ c′ $= 0{,}00347$ c′.

$w = 0{,}00347 \times 400$ Pfd. $= 1{,}388$ Pfd.

5. Beispiel. Wie groß ist das Gewicht einer gußeisernen Herdplatte von 3′ Länge, 2,5′ Breite, $\frac{1}{4}$″ dec. = 0,025′ Dicke?

Antwort: Der Kubikinhalt k der Platte ist

$k = 3{,}0 \times 2{,}5 \times 0{,}025 = 0{,}1875$ c′

und ihr Gewicht w, da 1 c′ Gußeisen 320 Pfd. wiegt,

$w = 0{,}1875 \times 320 = 60$ Pfd. —

6. Beispiel. Wie groß ist die Last, welche der Schnee auf einem flachen Dache von 50′ Länge und 18′ Sparrenlänge verursacht, wenn er 1′ hoch liegt?

Antwort:

$k = 50 \times 18 \times 1 = 900$ c′.

$w = 900 \times 7$ Pfd. $= 6300$ Pfd. $= 63$ Ztr.

7. Beispiel. Das Gewicht eines eisernen runden Schraubenbolzens von 3′ Länge und 14‴ dd Stärke, sammt Schraubenkopf und Mutter, jedes von 3″ dd Länge und Breite und 1″ dd Stärke ist in einem Kostenanschlage zu 12 Pfd. angegeben, ist dieß richtig?

Antwort:

14‴ dd Stärke = 1″ 2‴ dd = 1,166″ dd.

Denkt man sich die Schraubenmutter angeschraubt, so bleibt zwischen Kopf und Schraubenmutter eine Länge des Bolzens von

3′ — 2″ = 2′ 10″ dd = 34″ dd,

also ist der Kubikinhalt des Bolzens

$$k = \left(\frac{3,14 \times 1,166^2}{4}\right) \times 34 = 36,285 \text{ c}'' \text{ dd}$$

und der Kubikinhalt der Schraubenmutter und des Kopfes

$$k = 2 \times 3 \times 3 \times 1 = 18,000 \text{ c}'' \text{ dd}$$

$$\text{zusammen} = 54,285 \text{ c}'' \text{ dd} = \frac{54,285}{1728} \text{ c}'.$$

Also das Gesammtgewicht

$$w = \frac{54,285}{1728} \times 345 \text{ Pfd.} = 10,83 \text{ Pfund},$$

folglich die Angabe um 1,17 Pfd. zu groß.

8. Beispiel. Wie groß ist die Tragfähigkeit eines Floßes von 12 fichtenen Schnittbäumen von 1,5′ mittlerem Durchmesser und 25′ Länge?

Antwort:

$$k = 12 \times \left(\frac{3,14 \times 1,5^2}{4}\right) \times 25 = 530 \text{ c}' \text{ Holz}$$

Das Gewicht dieses Holzes oder des Floßes ist

$$w = 530 \times 20 \text{ Pfd.} = 10600 \text{ Pfd.}$$

Eine gleich große Wassermenge aber wiegt

$$w' = 530 \times 44{,}4 = 23532 \text{ Pfd.}$$

Folglich kann der Floß noch belastet werden, bis er ganz untertaucht, mit 23532 — 10600 = 12932 Pfd. = 129 Ztr., die Tragkraft des Floßes.

9. Beispiel. Was wiegt eine gußeiserne Wasserleitungsröhre, von 10′ Länge, 4″ dd innerem Durchmesser und $\frac{1}{2}$″ dd Wanddicke?

Antwort: Der äußere Durchmesser ist 5″ dd, also der Kubikinhalt der Röhre

$$k = \left(\frac{3{,}14 \times (5^2 - 4^2)}{4}\right) \times 120 = 847{,}8 \text{ c}'' \text{ dd}$$

$$= \frac{847{,}8}{1728} \text{ c}' \text{ und hieraus das Gewicht}$$

$$w = \frac{847{,}8}{1728} \times 320 \text{ Pfd.} = 157 \text{ Pfd.}$$

154. Bestimmung der Dimensionen eines geometrischen Körpers aus seinem Gewicht. — So wie man aus den Dimensionen eines geometrischen Körpers mit Hilfe des spezifischen Gewichtes sein absolutes Gewicht berechnen kann, so lassen sich auch umgekehrt aus dem gegebenen absoluten Gewicht eines geometrischen Körpers und dem spezifischen Gewicht seine Dimensionen bestimmen.

Ist nämlich das absolute Gewicht eines geometrischen Körpers gegeben, so findet man zunächst seinen Kubikinhalt in c′, wenn man das absolute

Gewicht des Körpers mit dem Gewicht von 1 c′ derselben Masse dividirt.

Aus dem Kubikinhalt und der Form des Körpers lassen sich dann auch in gewissen Fällen die Dimensionen desselben finden, wie an ein Paar Beispielen gezeigt werden soll.

1. Beispiel. Welches ist der Durchmesser einer 24pfündigen Kanonenkugel?

Auflösung. Wenn eine gußeiserne Kugel 24 Pfd. wiegen soll, so muß sie, da 1 c′ Gußeisen 320 Pfd. wiegt, einen Kubikinhalt k haben,

$$k = \frac{24}{320} = 0{,}075 \text{ c}' \text{ oder } 75 \text{ dec. Kubikzoll.}$$

Hieraus ergibt sich aber (nach 146) der Durchmesser d der Kugel

$$d = \sqrt[3]{\frac{6 \times 75}{3{,}14}} \text{ in dec. Zollen}$$

$$= \sqrt[3]{143{,}312} = 5{,}2 \text{ dec. Zoll.}$$

2. Beispiel. Ein siebenfach gewundener messingener Blitzableiterdraht von 200′ Länge wiegt 20 Pfd., wie stark ist der einfache Draht?

Antwort: 1 c′ Messingdraht (siehe Tabelle) wiegt 376 Pfd., also hat der siebenfache Draht von

$$200' \text{ Länge } \frac{20}{376} \text{ c}' \text{ Inhalt} = 0{,}0532 \text{ c}'.$$

Der einfache Draht von 200′ Länge sohin

$$\frac{0{,}0532}{7} = 0{,}0076 \text{ c}'.$$

Der Kubikinhalt mit der Länge dividirt gibt den Querschnitt; heißt dieser g, so ist

$$g = \frac{0{,}0076}{200} = 0{,}000038 \,\square' = 0{,}0038 \,\square'' \text{ dec.}$$
$$= 0{,}38 \,\square''' \text{ dec.}$$

Der Querschnitt des einfachen Drahts (eine Kreisfläche) hat also 0,38 □‴ dec., sohin ist dessen Durchmesser d in Linien

$$d = \sqrt{\frac{4 \times 0{,}38}{3{,}14}} = \sqrt{0{,}48} = 0{,}69''' \text{ dec.}$$
$$= \frac{7}{10} \text{ dec. Linie.}$$

3. Beispiel. Eine Marmorkugel wiegt 200 Pfund, welches ist ihr Durchmesser?

Antwort: Da 1 c′ Marmor 123 Pfd. wiegt, so hat die Kugel

$$k = \frac{200}{123} = 1{,}626 \text{ c}' \text{ Inhalt;}$$

ihr Durchmesser d ist also

$$d = \sqrt[3]{\frac{6 \times 1{,}626}{3{,}14}} = \sqrt[3]{3{,}106} = 1{,}4'.$$

4. Beispiel. Ein Thurmknopf von Kupferblech, im Durchmesser 2,5′ wiegt ohne den in der Mitte vorstehenden Rand 25 Pfd., welches ist die Dicke des Bleches?

Antwort: 1 c′ Kupferblech wiegt 400 Pfd., also hat das Blech des Knopfes einen Kubikinhalt

$$k = \frac{25}{400} = 0{,}0625 \text{ c}'.$$

Die Oberfläche des Knopfes ist

$$g = 3{,}14 \times 2{,}5^2 = 19{,}625 \;\square';$$

der Kubikinhalt durch die Fläche dividirt, gibt die Dicke

$$d = \frac{0{,}0625}{19{,}625} = 0{,}00318' = 0{,}318''' \text{ Dec. oder}$$

$\frac{3}{10}$ Dec. Linie Blechdicke.

Sechstes Kapitel.

Mechanik und von den Bau-Maschinen.

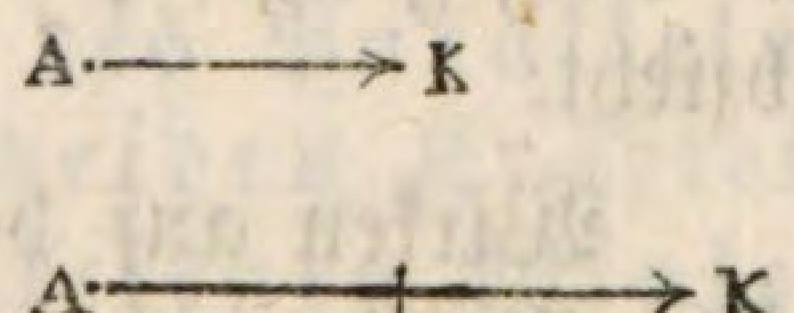
A. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.

155. Erklärungen. Die Lehre von den Wirkungen der Kräfte auf die Körper im Allgemeinen heißt Mechanik. Sie wird abgetheilt in die Lehre vom Gleichgewichte der Körper (Statik), welche die Körper im Zustande der Ruhe, oder wenn die auf ihn einwirkenden Kräfte im Gleichgewichte sind, betrachtet; und in die Lehre von der Bewegung der Körper (Dynamik). Wird die Statik auf flüssige Körper z. B. das Wasser angewendet, so heißt sie Hydrostatik oder die Lehre vom Gleichgewicht flüssiger Körper; die Dynamik auf die flüssigen

Körper angewendet, heißt **Hydrodynamik** oder **Hydraulik**, oder die Lehre von der **Bewegung der Flüssigkeiten**.

156. Unter **Kraft** versteht man Alles, was eine Bewegung hervorbringt oder eine Bewegung aufzuheben im Stande ist. So ist z. B. eine gewisse Kraft nothwendig, um einen Stein aus dem Zustande der Ruhe in den der Bewegung zu versetzen; es ist aber auch eine Kraft nöthig, um einen in Bewegung befindlichen Körper, z. B. eine rollende Kugel zum Stillstand zu bringen. Um Kräfte messen und vergleichen zu können, stellt man sie durch Linien dar. Bei jeder Kraft muß nämlich zweierlei unterschieden werden: 1) die **Größe**, 2) die **Richtung** der Kraft.

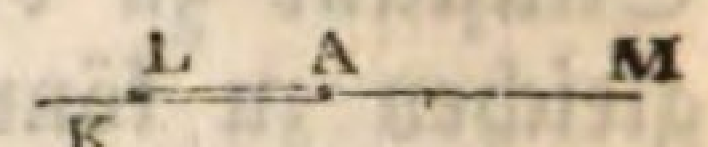
Ist z. B. A ein Punkt, und AK eine Kraft, welche auf ihn einwirkt, so stellt die **Länge** der Linie AK die **Größe** der Kraft, und ihre **Lage** die **Richtung** dar, in welcher die Kraft wirkt. Der Pfeil endlich zeigt, ob die Kraft auf den Punkt A **stoßend** oder an demselben **ziehend** zu denken ist. Man kann sich hiebei vorstellen, daß in Folge der Wirkung dieser Kraft der Punkt A in einer gewissen Zeit, z. B. in einer Sekunde, sich von A nach K bewegt. Eine Kraft, welche in derselben Zeit den Punkt A doppelt so weit bewegt, ist hiernach **doppelt** so groß, und wird durch eine Linie AK′ von der doppelten Länge dargestellt. Stellt die erste Linie AK eine Kraft von 10 Zentnern vor, so wird die zweite Linie eine Kraft von 20 Zentnern bedeuten u. s. w.



Auf diese Art lassen sich also Kräfte wie Linien messen, auftragen und vergleichen.

157. Mittelkraft. — Wenn zwei oder mehrere Kräfte auf einen Punkt oder Körper wirken, so gibt es allemal eine einzige Kraft, welche so viel wirkt, als alle zusammengenommen, diese heißt die Mittelkraft. Soll die Mittelkraft aus mehreren Kräften gesucht werden, so muß von ihr bestimmt werden: 1) die Größe, 2) die Richtung.

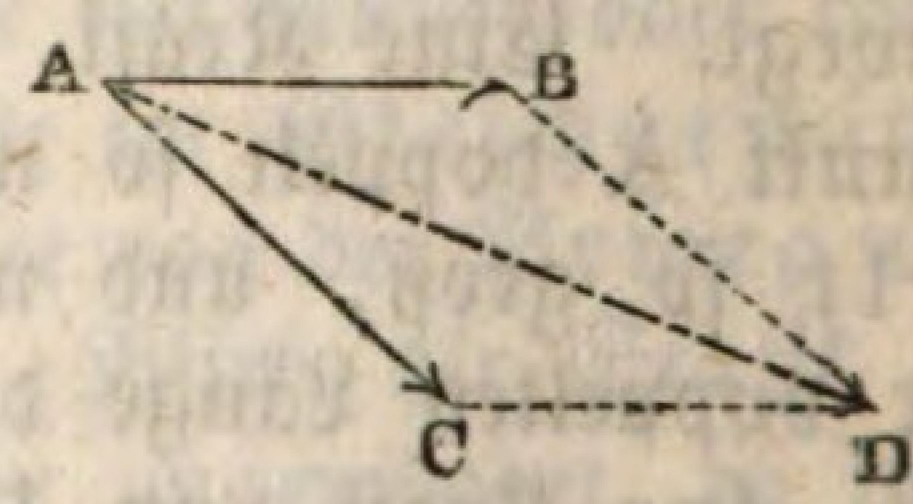
Wirken mehrere parallele Kräfte auf einen Punkt A, jedoch in entgegengesetzter Richtung, z. B. AK, AL nach links und



AM nach rechts, so ist klar, daß die Mittelkraft ebenfalls den Kräften parallel sein muß, und daß man ihre Größe erhält, wenn man die in gleicher Richtung wirkenden Kräfte AL und AK addirt, und die in entgegengesetzter Richtung AM wirkenden davon abzieht.

Wirken auf beiden Seiten gleich starke und gleich viele Kräfte, oder wird die Summe aus den rechts wirkenden jener aus den links wirkenden gleich, so ist die Mittelkraft Null, und der Punkt A bleibt in Ruhe.

158. Parallelogramm der Kräfte. Wenn zwei Kräfte AB, AC unter einem Winkel BAC auf einen Punkt A einwirken, so ist klar, daß letzterer nicht zugleich beide Wege AB und AC gehen kann; der Punkt



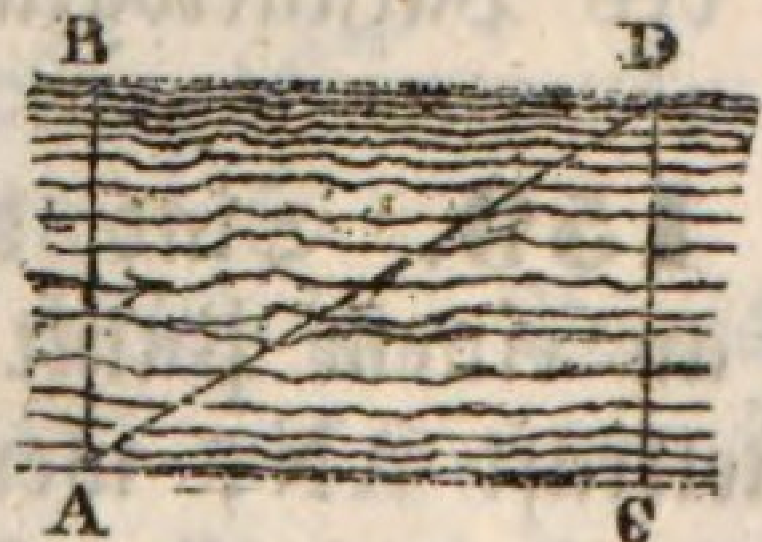
A wird also einen mittleren Weg einschlagen. Denkt man sich die Wirkung der beiden Kräfte AB, AC nach

einander eintretend, und zuerst AB allein wirkend, so wird in einer gewissen Zeit der Punkt von A nach B gelangen; wirkt hierauf die Kraft AC oder die ihr parallele und gleich große BD, so wird diese zweite Kraft den Punkt von A nach D bewegen. Am Ende der Bewegung wird also der Punkt A in D sein, und dieß ist das Resultat der Wirkung beider Kräfte AB und AC auf den Punkt A. Da aber beide Kräfte AB, AC gleichzeitig wirken, so wird der Punkt A nicht die gebrochene Linie ABD, sondern die gerade AD zurücklegen, welches die Diagonale des Parallelogramms ist, das von den beiden Kräften AB, AC und dem eingeschlossenen Winkel BAC gebildet wird. Daher der Satz:

Wenn zwei Kräfte unter einem Winkel auf einen Punkt wirken, so wird die Mittelkraft der Größe und Richtung nach vorgestellt durch die Diagonale des Parallelogramms, welches aus den beiden Kräften und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel gebildet wird.

Das Parallelogramm ABCD heißt daher auch das Parallelogramm der Kräfte, und die beiden Seiten AB und AC des Parallelogramms heißen die Seitenkräfte.

Wenn man z. B. in einem Kahn von A nach B über einen Fluß setzen will, in derselben Zeit aber, in welcher der Kahn den Weg AB zurücklegt, das Wasser des Flusses von A bis C fließt, so wird der Kahn durch das



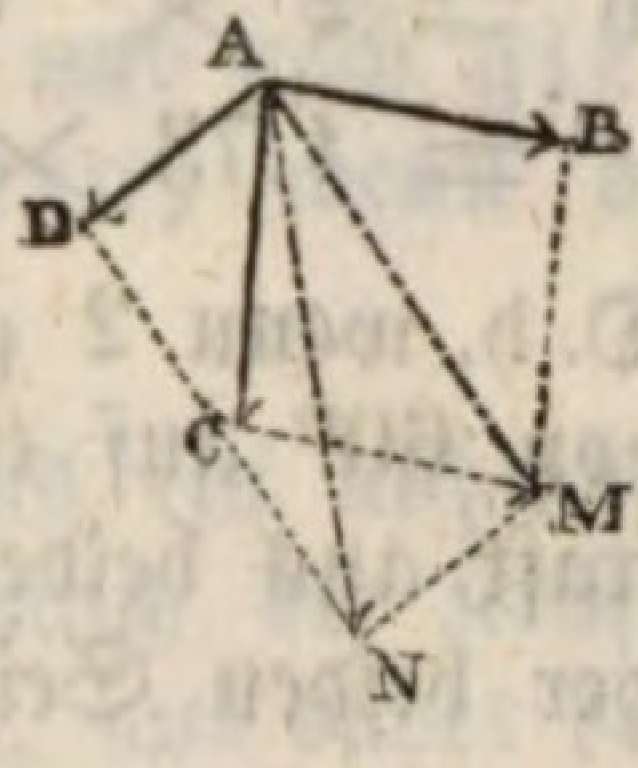
Zusammenwirken beider Kräfte AB und AC die Diagonale AD beschreiben, und in D an das andere Ufer gelangen.

Auf gleiche Weise erklären sich viele Erscheinungen: Man begreift hiernach, warum der Regen, der doch durch seine Schwere gerade abwärts zu fallen sucht, bei einem Winde schief herabfällt und an die Mauern der Gebäude anschlägt. Eine bei windigem Wetter abgeschossene Kugel nimmt eine Richtung, welche aus der Richtung der Pulverkraft und jener des Windes zusammengesetzt ist; daher die Schwierigkeit, bei windigem Wetter das Ziel zu treffen u. s. w.

Ein Stein, welchen man von dem Mastbaum eines schnell segelnden Schiffes fallen läßt, fällt unten ganz nahe am Mastbaum nieder. Das Schiff ist nicht während des Falles unter dem Stein weggesegelt, wie man wohl glauben könnte, sondern der Stein ist der Richtung des Mastbaums gefolgt. Stellt z. B. AC (erste Figur zu 159) den Mastbaum vor, welcher sich in eben der Zeit von AC nach BM bewegt, in welcher der Stein bei ruhendem Schiff von A nach C fiele, so wird der Stein, da ihm beim Beginn des Fallens die Bewegung des Schiffes in der Richtung nach AB mitgetheilt wird, in eben der Zeit sich nach AB bewegen, also in M am Fuß des Mastbaums ankommen, und sohin die Diagonale AM des Parallelogramms ACBM zurückgelegt haben.

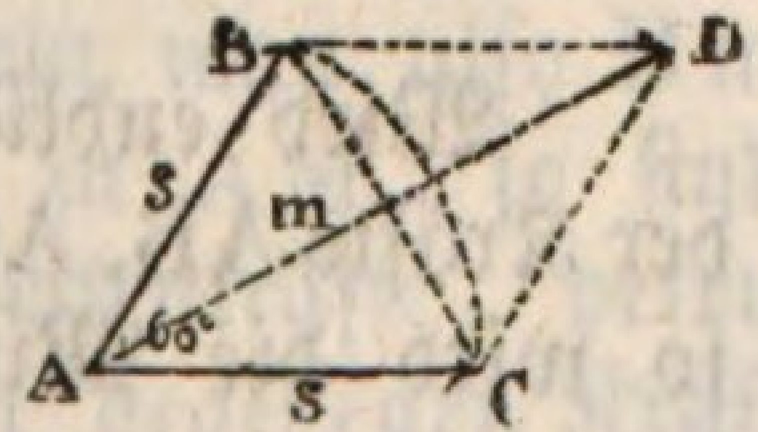
159. Sind drei oder mehr Kräfte AB, AC, AD an einem Punkt A wirksam, so findet man deren Mittelkraft AN, wenn man zuerst zwei Kräfte AB, AC durch das Parallelogramm ABCM in der Mittel-

kraft AM, und dann diese und die dritte Kraft AD durch das Parallelogramm AMND zur gesuchten Mittelkraft AN vereinigt.



Man mag hiebei die Ordnung der Kräftevereinigung vornehmen, wie man will, immer muß sich dieselbe Linie AN für die Größe und Richtung der Mittelkraft herausstellen. Hätte man also zuerst die Kräfte AB, AD durch die Diagonale des Parallelogramms, welches sich aus AB und AD bilden läßt, vereinigt und dann aus dieser Diagonale und der dritten Kraft AC ein neues Parallelogramm gebildet, so müßte die Diagonale dieses Parallelogramms wieder der Größe und Richtung nach mit AN, welches die Mittelkraft aus allen drei Kräften ist, zusammenfallen.

160. Weil die Diagonale des Parallelogramms immer kleiner ist, als die Summe der zwei Seiten, so folgt hieraus, daß, wenn zwei Kräfte unter einem Winkel wirken, immer an Kraft verloren geht, und um so mehr, je stumpfer der Winkel ist, welchen die beiden Kräfte mit einander bilden.

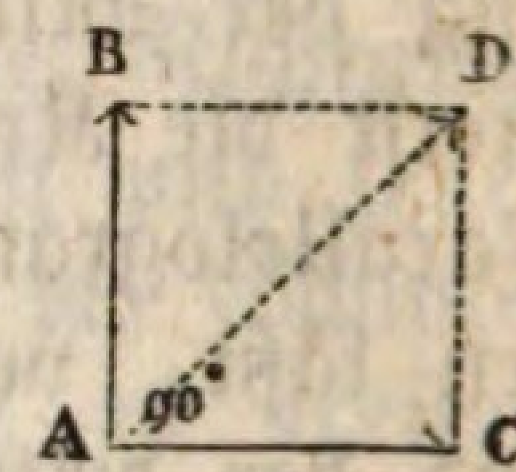


Betrachtet man z. B. das Parallelogramm ABCD, in welchem die beiden Kräfte AB, AC gleich sind, und einen Winkel von 60° einschließen, so sieht man, daß die Mittelkraft AD gleich der doppelten Höhe des gleichseitigen Dreiecks ABC ist. Bezeichnet man jede der Seitenkräfte AB, AC mit s, die Mittelkraft AD mit m, so ist

$$m = 2 \times \sqrt{\tfrac{3}{4}} \times s = 2 \times 0{,}866 \times s$$
$$= 1{,}73 \times s = 1{,}73 \times \text{Seitenkraft}.$$

D. h. wenn 2 gleich große Kräfte unter einem Winkel von 60^0 auf einen Punkt wirken, so ist die Mittelkraft aus beiden ohngefähr $1\frac{3}{4}$ mal so groß als jede der beiden Seitenkräfte.

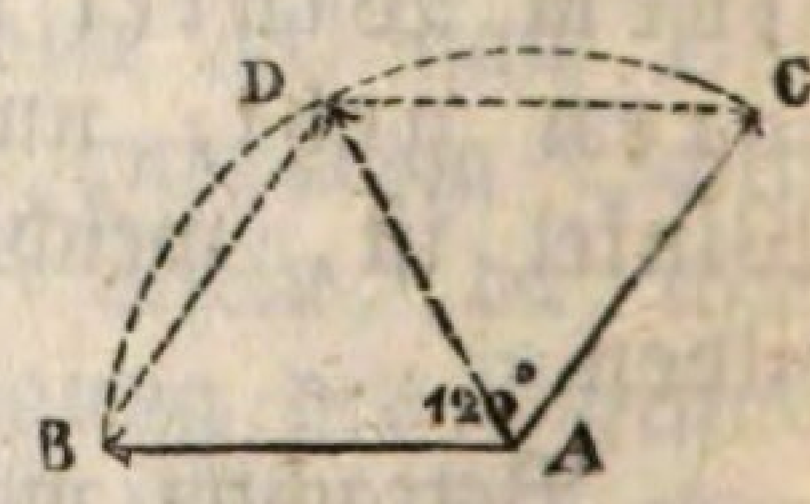
Bilden die beiden Seitenkräfte AB, AC einen rechten Winkel, so ist die Mittelkraft



$$m = \sqrt{2} \times s = 1{,}41 \times s$$
$$= 1{,}41 \times \text{Seitenkraft}.$$

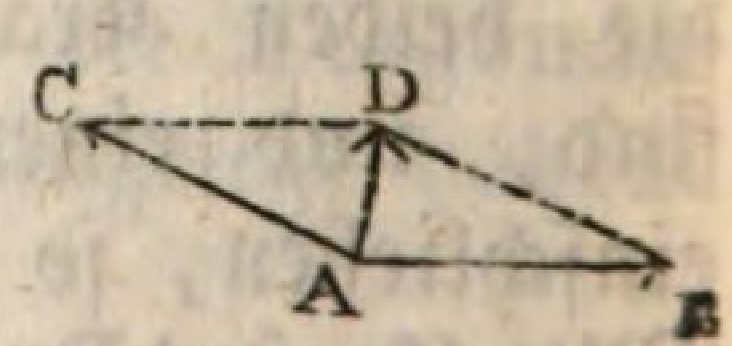
D. h. wenn 2 gleich große Kräfte unter einem rechten Winkel wirken, so ist die Mittelkraft aus beiden der Diagonale des von den Seitenkräften gebildeten Quadrats gleich oder nicht ganz $1\frac{1}{2}$ mal so groß als jede der beiden Seitenkräfte.

Ist der Winkel beider Seitenkräfte stumpf, so wird die Mittelkraft noch kleiner; ist der Winkel 120^0, so wird die Mittelkraft AD gleich einer Seitenkraft AB oder AC, also



$$m = s = \text{Seitenkraft}.$$

Wird endlich der Winkel beider Kräfte AB, AC größer als 120^0, so wird die Mittelkraft AD kleiner als eine der Seitenkräfte, und



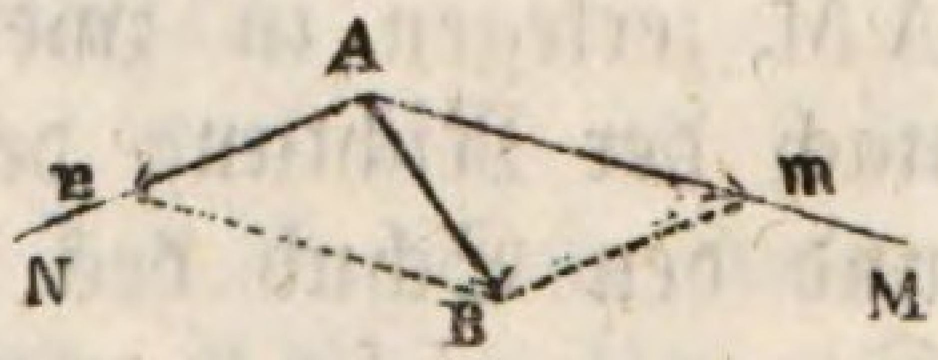
wird der Winkel BAC beider Kräfte $= 180^0$, oder fallen die beiden Kräfte AB, AC in eine gerade Linie, so ist die Mittelkraft AD gleich Null.

Die Wirkung zweier Kräfte auf einen Körper ist also am größten, wenn sie parallel und nach gleicher Richtung wirken, am kleinsten, wenn die Kräfte einander entgegen wirken.

In dieser Wahrheit liegt für uns ein nützlicher Wink für die Praxis; man soll nämlich die Kräfte immer möglichst parallel wirken lassen, und daher den Winkel derselben so klein als möglich machen. Bei der Zugramme, wo mehrere Arbeiter an besonderen Stricken des Rammtaues (Rammseil) ziehen, sollen sich dieselben nahe aneinander in einem Kreise zusammenstellen; und wo mehrere Pferde ein Schiff stromaufwärts ziehen sollen, läßt man dieselben besser hintereinander und nicht nebeneinander gehen.

161. Zerlegung der Kräfte. So wie man zwei Kräfte zu einer Mittelkraft vereinigen kann, so läßt sich auch umgekehrt jede Kraft in zwei andere nach beliebigen Richtungen zerlegen.

Ist z. B. eine Kraft AB gegeben, und zwei Richtungen AM, AN, nach denen sie in Seitenkräfte zerlegt werden soll, so sieht man AB als die Diagonale

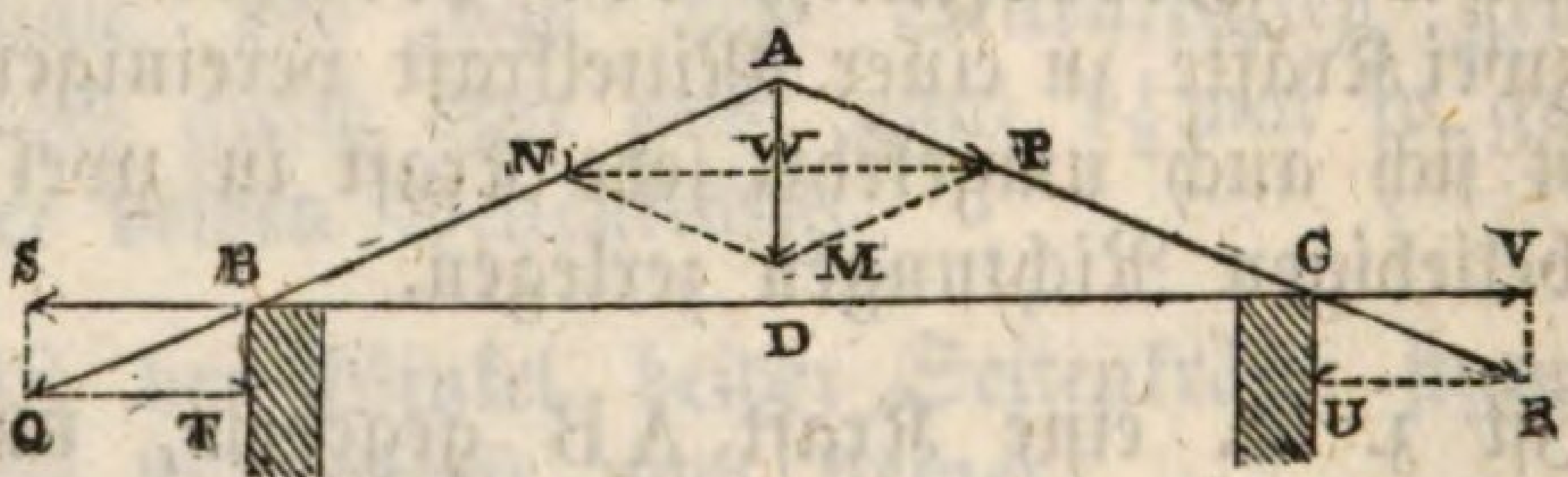


eines Parallelogramms an, zu dem AM und AN die Richtungen der Seiten sind. Zieht man also Bm parallel zu AN, und Bn parallel zu AM, so sind Am und An die zwei gesuchten Seitenkräfte, deren vereinigte Wirkung der Wirkung der gegebenen Kraft AB gleich ist.

Eine nützliche Anwendung hievon läßt sich zur Ermittelung des Schubs eines Dachstuhls machen.

162. Den Schub eines Dachstuhls finden. — Der Schub eines Dachstuhls hängt vor Allem vom Gewicht desselben ab. Hat man das Gewicht eines Dachstuhls mit allen einen Schub verursachenden Theilen, Sparren, Pfetten, Kehlbalken, liegenden Stuhlsäulen, Riegeln, Streben und der Dacheindeckung ermittelt, so ist man auch im Stande, anzugeben, wie viel von der Gesammtlast des Dachstuhls auf ein Gespärre trifft. Es sei dieß Gewicht zehn Zentner, und ABC das Gespärre des Dachstuhls, wo der Einfachheit der Betrachtung wegen nur die Sparren AB und AC und der Balken (Tram) BC angenommen sind.

Denkt man sich das Gewicht des Gespärres (zehn Zentner) an der Spitze des Dachstuhls A als eine Kraft AM vertikal angebracht, und durch eine Linie von 1 Zoll dargestellt, so läßt sich diese Kraft

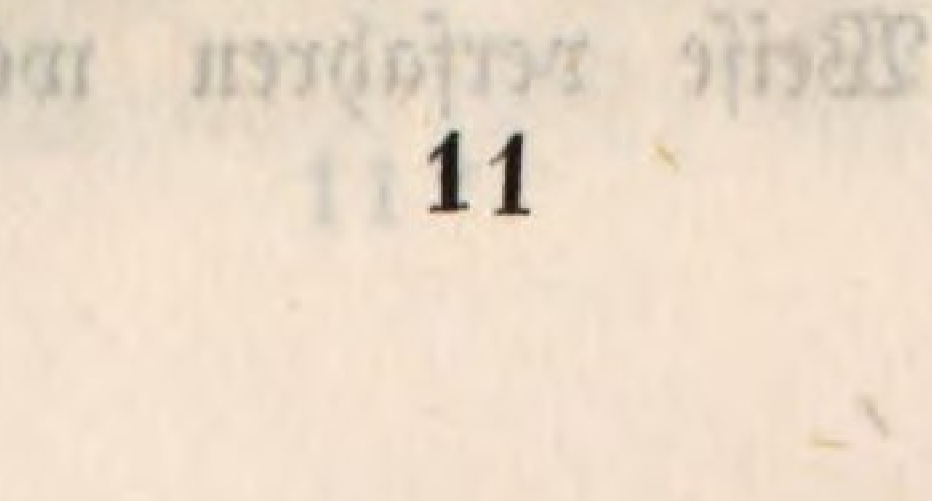


AM zerlegen in zwei Seitenkräfte AN, AP, welche nach der Richtung der Sparren AB und AC wirken und den Schub des Dachstuhl im Sparren oder den Sparrenschub vorstellen.

Diese Seitenkräfte erhält man, wenn man MP parallel zu AB und MN parallel zu AC zieht. Bringt man diese Seitenkräfte AN, AP, welche sich im Sparren bis B und C fortpflanzen, bei B und C in derselben Richtung an, d. h. macht man BQ = AN und CR = AP, so lassen sich diese Kräfte wieder, jede in zwei Seitenkräfte, die eine horizontal, die andere vertikal zerlegen. Man zieht nämlich durch

Q und R die Horizontalen QT und RU, und die Vertikalen QS und RV, und erhält so aus dem Sparrenanschub BQ und CR als eine Seitenkraft den Vertikaldruck auf die Mauern BT und CU, und als die andere den Horizontalschub BS und CV. Ist die Construktion richtig gemacht, so muß BT = CU = ½ AM, das heißt, der vertikale Druck auf jede Mauer muß dem halben Gewicht des Gespärres gleich sein. War AM, wie angenommen = 10 Zentner = 1 Zoll, so muß jedesmal, welchen Winkel auch der Dachstuhl haben mag, BT = CU = 5 Zentner = ½ Zoll werden. Als Resultat der Construktion und der Betrachtung erhält man also außer dem Druck auf die Mauern gleich dem Gewicht des Gespärres, noch die beiden Kräfte BS und CV, welche als Horizontalschub den Balken BC zu zerreißen suchen. Denkt man sich den Balken bei D fest eingeklemmt, so ist BS der Horizontalschub oder die Kraft, welche den Balken BD zu zerreißen sucht. Diesem hat, wenn der Balken BC von Eisen ist, die Widerstandsfähigkeit dieses Metalls, oder, wenn der Balken BC von Holz ist, der Zapfen des Sparrens bei B Widerstand zu leisten.

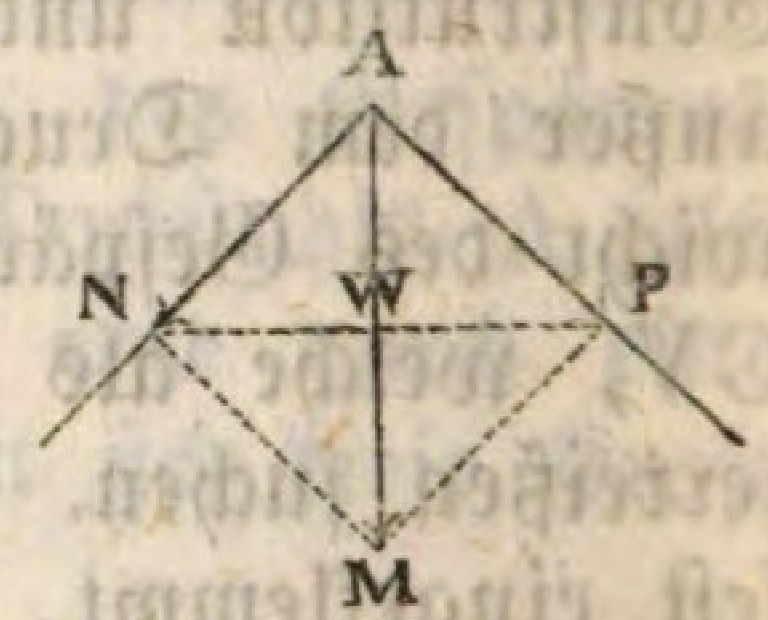
Aus der Construktion folgt, weil BQ = AN und Winkel QBT = Winkel NAM, daß, wenn NW parallel zu BC gezogen wird, NW = BS und AW = BT = ½ AM sein muß. Man hat also um den Sparren- und Horizontalschub zu erhalten, nicht nöthig, das ganze Gespärr zu zeichnen, sondern nur den Winkel am Dachfirst zu kennen, das Gewicht, das auf ein Gespärre trifft, als vertikale Kraft AM aufzutragen, die Parallelen



zu den Sparren MN, MP und die Horizontale NWP zu ziehen, dann ist AN der Schub im Sparren und NW der Horizontalschub.

Ist z. B. der Winkel bei A 120°, so findet man, daß der Sparrenschub AN = dem in A angebrachten Gewicht AM; daß der Vertikaldruck auf eine Mauer, wie immer = AW = 0,5 × AM, und daß der Horizontalschub NW = $\sqrt{\frac{3}{4}}$ = 0,866 × AM oder fast $\frac{9}{10}$ des angebrachten Gewichtes ist.

Ist der Winkel bei A ein rechter, oder das Dach ein Winkeldach, so findet man den Sparrenschub AN = $\sqrt{2}$ oder 0,707 × AM; der Vertikaldruck AW ist wieder = 0,5 × AM; und der Horizontalschub NW ebenfalls = 0,5 × AM oder gleich der Hälfte des Gewichts.



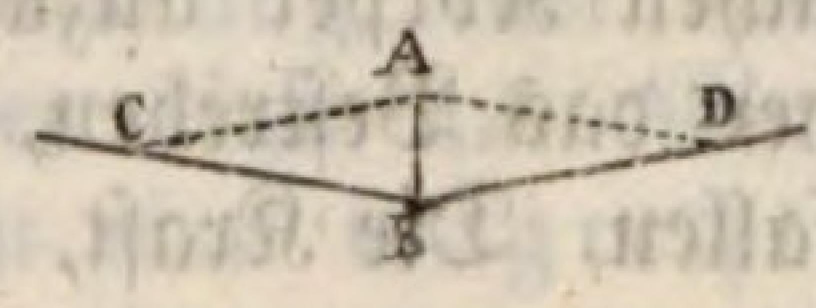
Wird der Winkel bei A spitz, so wird der Sparrenschub kleiner als 0,7 oder $\frac{7}{10}$, und der Horizontalschub kleiner als 0,5 oder die Hälfte des Gewichts eines Gespärres.

Was für ein Gespärre gilt, gilt auch für das ganze Dach. Der Horizontalschub eines Dachstuhls ist also um so größer, je flacher das Dach ist. Ist der Winkel am First 120°, so ist der Horizontalschub des Daches fast $\frac{9}{10}$ vom Gewicht des Dachstuhls; beim Winkeldach ist der Horizontalschub genau die Hälfte vom Gewicht des ganzen Dachstuhls.

Bei eisernen Dachkonstruktionen muß auf diese Weise verfahren werden, um die Stärke der die

Stelle des Gebälks vertretenden Eisentheile, sowie der Sparren selbst zu ermitteln. Die weiteren Anhaltspunkte hiezu findet man später, wo es sich um die Festigkeit der Baumaterialien handelt.

163. Zerlegt man eine kleine Kraft AB nach zwei Richtungen AC, AD in zwei Seitenkräfte, welche einen sehr stumpfen Winkel mit einander machen, indem man AC parallel mit BD, und AD parallel mit BC zieht, so sieht man, daß in diesem Falle die Seitenkräfte AC, AD sehr groß werden. Denkt man sich, CBD sei ein Seil und AB ein kleines Gewicht auf demselben, so muß man, um dem Gewicht AB an dem Seil das Gleichgewicht zu halten, die beiden großen Zugkräfte AC und AD oder was dasselbe ist, BC und BD beiderseits anbringen. Je stumpfer der Winkel wird, desto größer müssen bei demselben Gewicht AB die Zugkräfte sein. Das Gewicht eines Seils oder auch einer Schnur selbst ist ein solches kleines Gewicht. Es bedarf daher sehr großer Zugkräfte beiderseits, ein Seil oder eine Schnur möglichst horizontal zu spannen. Ganz horizontal ein Seil zu spannen, ist aber eine Unmöglichkeit, weil dann die beiden Seitenkräfte unendlich groß sein müßten.



Eine weitere Anwendung der Zerlegung der Kräfte macht man bei der schiefen Ebene und dem Keil.

B. Vom Schwerpunkt.

164. Erklärungen. — Die Erde, welche wir bewohnen, hat die Eigenschaft, alle außer ihr befindlichen Körper anzuziehen. Ein jeder Körper hat daher das Bestreben, wenn er nicht unterstützt wird, zu fallen. Die Kraft, durch welche die Körper zum Fallen gezwungen werden, nennt man die Schwerkraft oder allgemeine Schwere. Wird ein Körper durch eine Unterlage vor dem Fallen geschützt, so äußert er sein Bestreben zu fallen, durch einen Druck auf die Unterlage, welchen wir seine Schwere nennen, und der Punkt, in welchem man sich die Schwere aller Theile vereinigt denken kann, heißt der Schwerpunkt des Körpers.

Ist die Masse eines Körpers durchaus von gleicher Dichte, so fällt der Schwerpunkt mit seinem Mittelpunkte zusammen. Alle regelmäßigen Figuren und Körper haben einen Mittelpunkt. Eine gleichförmig dichte Kugel hat also ihren Schwerpunkt im Mittelpunkte, ein Cylinder und ein regelmäßiges Prisma in der Mitte seiner Axe. Bestünde aber ein Körper halb aus Holz, halb aus Metall, so wäre sein Schwerpunkt mehr auf der Seite zu suchen, wo sich das Metall befindet. Bei einer hohlen Kugel und bei einem Ring befindet sich der Schwerpunkt ebenfalls im Mittelpunkt, obgleich daselbst nichts von der Masse des Körpers ist.

Da man sich die Masse der ganzen Erdkugel in ihrem Mittelpunkt vereinigt denken kann, so geht die Richtung aller fallenden Körper nach diesem Punkte hin. Eine Linie aber, welche zum Mittelpunkt der

Erde gezogen wird, steht senkrecht auf der Oberfläche der Erde. Alle fallenden Körper fallen also senkrecht zur Oberfläche der Erde oder vertikal (lothrecht) nieder.

Das Senkblei (der Senkel) der Maurer und Steinhauer gibt daher immer die Richtung einer nach dem Mittelpunkt der Erde gehenden Linie an. Eine Senkrechte auf diese Richtung heißt eine wagrechte oder horizontale Linie.

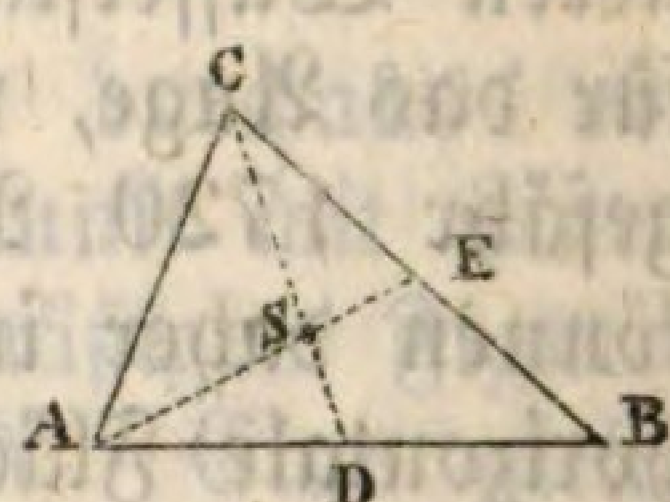
Die Theilchen einer Wasseroberfläche streben gleichfalls beständig nach dem Mittelpunkt der Erde. Im Zustand der Ruhe sind daher alle Punkte einer Wasserfläche gleich weit vom Mittelpunkt der Erde entfernt. Eine große Wasserfläche, z. B. das Meer, bildet deßhalb im Zustand der Ruhe eine Kugelfläche. Bei kleineren Wasserflächen verschwindet nur die Krümmung für das Auge, weil der Radius dieser Kugelfläche ohngefähr 1720 Meilen beträgt. Kleine Wasserflächen können daher in ihrer ganzen Ausdehnung als ebene, horizontale Flächen angesehen werden.

Eine lothrechte Linie durch den Schwerpunkt eines Körpers nennt man die Direktionslinie der Schwere. Ist diese Linie irgendwo unterstützt, so kann der Schwerpunkt des Körpers und folglich der ganze Körper nicht sinken, wenn die Unterlage anders stark genug ist, das Gewicht des Körpers zu tragen. Diesen Unterstützungspunkt kann man durch Versuche finden, wenn man den Körper auf einer scharfen oder kantigen Unterlage so lange hin und herschiebt, bis er darauf ruht. Wird ein Körper an einem Faden aufgehangen, so wird er sich allemal so stellen, daß der Schwerpunkt in die lothrechte Linie des Fadens zu liegen kommt, und also durch diesen

verhindert wird, in der lothrechten Linie niederzusinken. Hängt man denselben Körper an einem andern Punkte auf, so wird sein Schwerpunkt ebenfalls so lange sinken, bis er sich in der verlängerten Linie des Fadens befindet. Im Durchschnittspunkte beider Linien nun liegt der Schwerpunkt des Körpers. Dieses Verfahren ist sehr dienlich, wenn von Körpern der Schwerpunkt gefunden werden soll, welche aus verschiedenen Materien von ungleicher Dichtigkeit zusammengesetzt sind.

Die Kenntniß der Lage des Schwerpunkts von Flächen und Körpern ist für den Bauhandwerker höchst wichtig, daher im Folgenden gezeigt werden soll, wie an den am häufigsten vorkommenden Flächen und Körpern der Schwerpunkt gefunden wird.

165. Der Schwerpunkt eines Dreiecks wird gefunden, wenn man zwei beliebige Seiten, z. B. AB und BC halbirt und von den Halbirungspunkten D und E zu den gegenüberliegenden Spitzen C und A gerade Linien zieht; der Durchschnittspunkt S der Halbirungslinien AE, CD ist dann der Schwerpunkt. Es ist dann DS $= \frac{1}{2}$ SC oder DS $= \frac{1}{3}$ DC.



Daß dieß so sein muß, ist leicht zu zeigen. Denkt man sich das ganze Dreieck ABC parallel mit der Grundlinie AB in lauter schmale Streifen zerschnitten, so wird die Linie CD, welche die Spitze C mit der Mitte der Grundlinie AB verbindet, alle diese Streifen halbiren, oder das Gewicht des Dreiecks ADC wird gleich jenem des Dreiecks DBC sein, was auch aus der Gleichheit der beiden Dreiecke ADC und DBC folgt; der Schwerpunkt des ganzen Dreiecks muß also auf der Linie CD liegen. Bringt man also

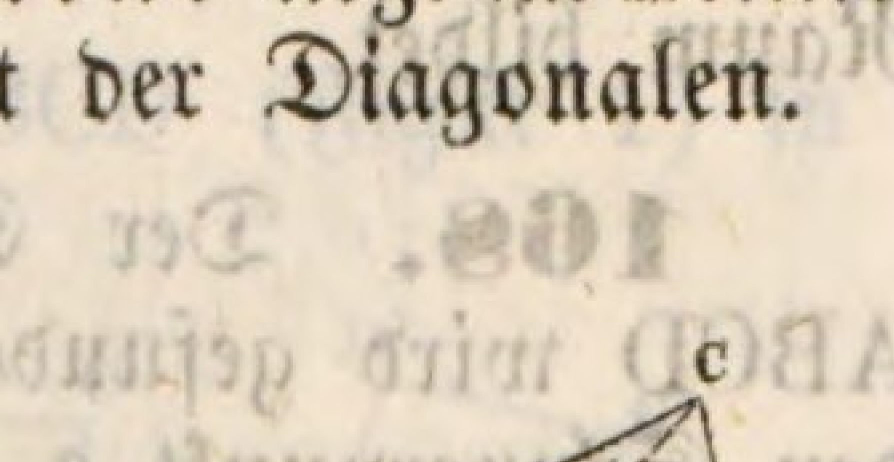
eine Messerschneide längs CD unter das Dreieck, so wird dieses weder rechts noch links fallen, daher balanciren. Dreht man nun das Dreieck um, und sieht man CB als Grundlinie an, so wird der Schwerpunkt des Dreiecks aus gleichen Gründen auch auf der Linie AE von der Spitze zur Mitte E der Grundlinie CB liegen. Der Schwerpunkt des ganzen Dreiecks muß daher im Schnittpunkt S der Linien AE und CD liegen.

Der Schwerpunkt eines Dreiecks liegt daher auf der Halbirungslinie von der Mitte einer Seite zur gegenüberliegenden Spitze und zwar $\frac{1}{3}$ von der Seite und $\frac{2}{3}$ von der Spitze entfernt.

Schneidet man ein Dreieck ABC, an welchem man den Schwerpunkt S auf diese Art construirt hat, in starkem Papier sauber aus, und zieht man bei S mittelst einer Nadel einen feinen Faden, an dessen Ende ein Knopf gemacht wird, durch, so kann man sich von der Richtigkeit dieses wichtigen Lehrsatzes praktisch überzeugen; das Papierdreieck wird dann, am Faden aufgehängt, horizontal schweben.

166. Der Schwerpunkt eines Parallelogrammes, eines Rechteckes, Quadrates, Rhombus, eines regelmäßigen Vielecks liegt im Mittelpunkt, d. i. im Durchschnittspunkt der Diagonalen.

167. Den Schwerpunkt eines unregelmäßigen Vierecks ABCD findet man auf folgende Weise. Man zerlege das Viereck ABCD durch die Diagonale AC in zwei Dreiecke ADC und ABC, und bestimme ihre

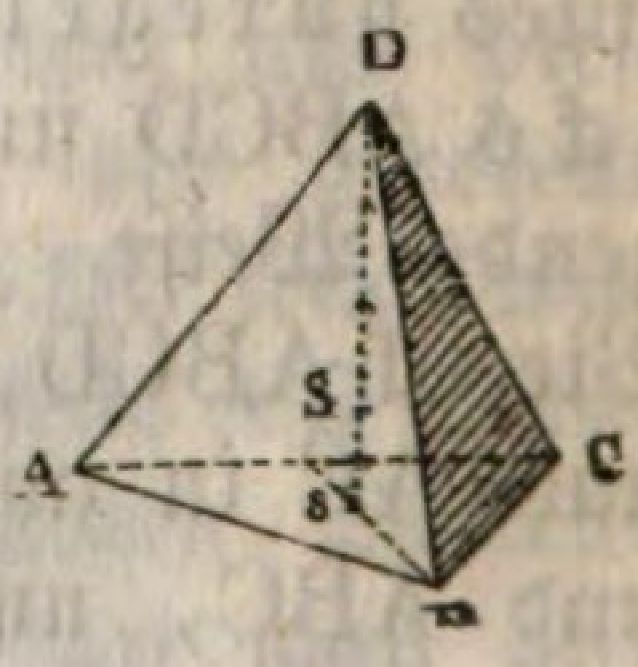


Schwerpunkte R und T auf die bereits angegebene Weise, welche Punkte durch eine Gerade RT verbunden werden; hierauf zerlegt man das Viereck auch durch die Diagonale DB und sucht von den Dreiecken BDC und ABD die Schwerpunkte r und t, welche ebenfalls durch eine Gerade rt verbunden werden; der Durchschnittspunkt S der beiden Linien RT und rt ist dann der Schwerpunkt des Vierecks.

Der Schwerpunkt eines unregelmäßigen Fünfecks wird gefunden, indem man es durch eine Diagonale in ein Dreieck und ein Viereck zerlegt, den Schwerpunkt des Dreiecks R und den des Vierecks T sucht, und die Linie RT zieht. Zerlegt man alsdann durch eine andere Diagonale das Fünfeck wieder in ein Dreieck und ein Viereck, sucht den Schwerpunkt r dieses Dreiecks und den des Vierecks t, und zieht die Linie rt, so ist der Durchschnittspunkt S der beiden Linien RT und rt der Schwerpunkt des Fünfecks.

Eine Anwendung des Schwerpunkts von unregelmäßigen Figuren macht man in der Praxis, wenn ein unregelmäßiger Raum überwölbt werden soll. Der Scheitel des Gewölbes soll dann im Schwerpunkt des Vielecks sein, welches der zu überwölbende Raum bildet.

168. Der Schwerpunkt einer Pyramide ABCD wird gefunden, wenn man den Schwerpunkt s der Grundfläche sucht, diesen mit der Spitze D durch die Gerade sD verbindet, und die Gerade sD in vier gleiche Theile theilt. Bei $\frac{1}{4}$ von der Grundfläche ist dann der Schwerpunkt S.



Der Schwerpunkt eines Kegels wird ebenso gefunden.

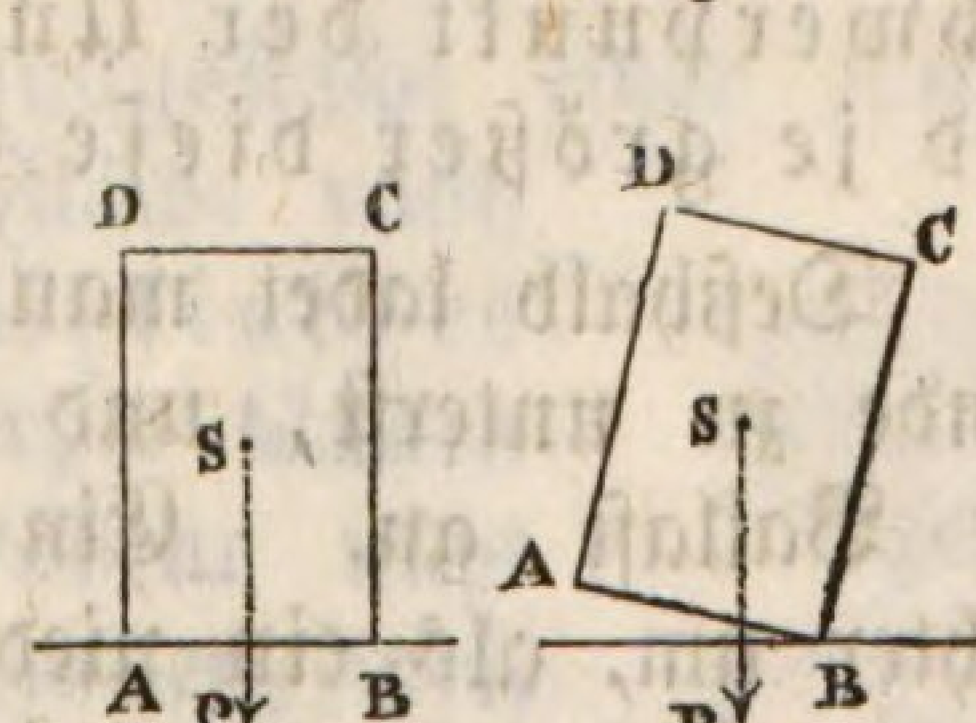
169. Der Schwerpunkt eines regelmäßigen Prisma's oder eines Cylinders liegt im Mittelpunkt der Axe; der Schwerpunkt eines Parallelepipedums oder eines Würfels liegt im Mittelpunkt oder im Durchschnittspunkt der Diagonalen.

170. Der Schwerpunkt einer massiven Halbkugel liegt bei $\frac{3}{8}$ des Halbmessers vom Mittelpunkt entfernt.

171. Von der Stabilität oder Standfähigkeit der Körper. — Ein Körper ist in Ruhe oder kann nicht fallen, wenn sein Schwerpunkt unterstützt ist. Ist die Unterstützung über dem Schwerpunkt, so hängt der Körper; ist sie unter demselben, so steht oder liegt er; ist sie in demselben, so ist der Körper im Gleichgewicht und ruht in jeder Lage, wie z. B. eine Rollenscheibe, ein Wagenrad.

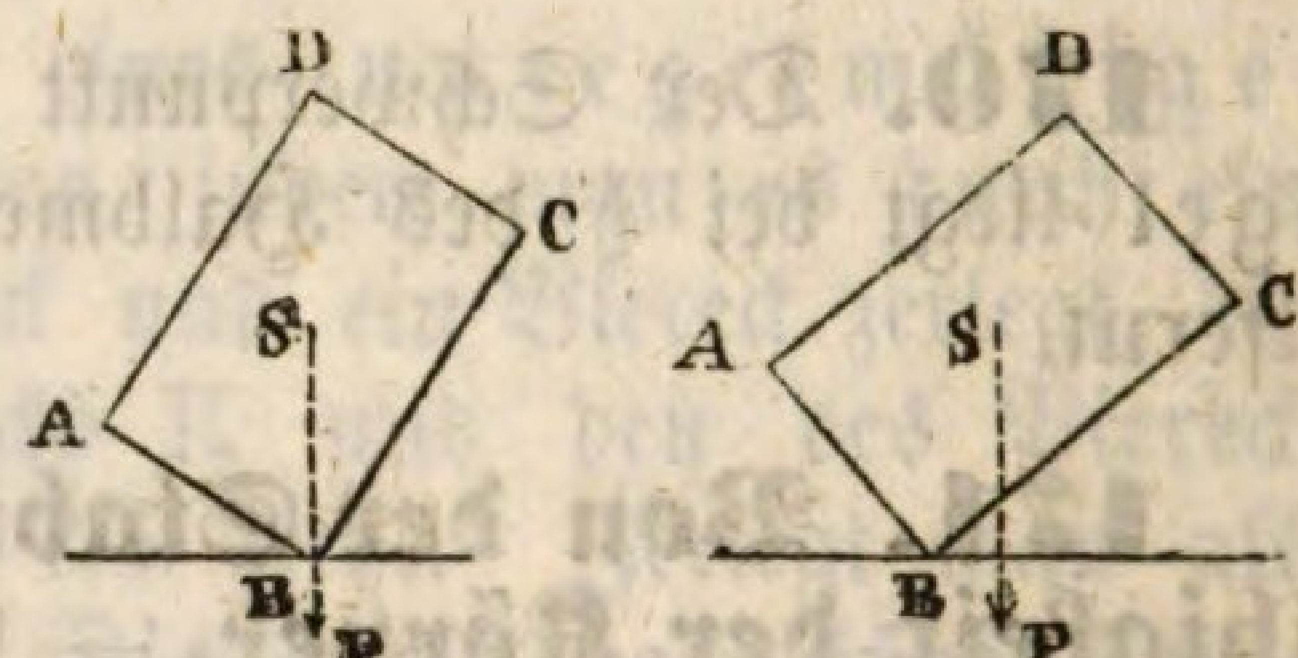
Soll ein Körper sicher stehen, so muß der Schwerpunkt unterstützt sein, und die Direktionslinie der Schwere innerhalb die Unterstützungsfläche treffen.

So ist z. B. der Körper ABCD (Figur 1) in Ruhe, und steht sicher, weil die Direktionslinie der Schwere SP (die Vertikale, Lothrechte durch seinen Schwerpunkt S) innerhalb der Unterlage AB fällt und sein Schwerpunkt durch die Fläche AB unterstützt ist.



Wird aber der Körper ABCD (Figur 2) auf der einen Seite bei A gehoben, so kann er in dieser Lage nicht bleiben, weil die Direktionslinie der Schwere SP nicht in den Unterstützungspunkt B trifft. Der Körper fällt also rückwärts, weil die Direktionslinie der Schwere SP noch zwischen A und B trifft.

Wird der Körper ABCD (Figur 3) noch mehr bei A gehoben, bis die Direktionslinie der Schwere SP genau durch die Unterstützungskante B geht, so ist zwar der Schwerpunkt unterstützt, aber der Körper balançirt, und die geringste Kraft ist im Stande, die Direktionslinie der Schwere rechts oder links von B zu bringen, d. h. den Körper nach vor- oder rückwärts fallen zu machen.



Der Körper ABCD (Figur 4) fällt endlich vorwärts, wenn derselbe so weit bei A gehoben wird, daß die Direktionslinie der Schwere SP über die Unterstützungsfläche AB trifft.

172. *Hieraus ergibt sich, daß ein Körper um so sicherer steht, je näher sein Schwerpunkt der Unterstützungsfläche liegt, und je größer diese ist.*

Deßhalb ladet man Wägen die schwersten Gegenstände zu unterst, und füllt den Bauch der Schiffe mit Ballast an. Ein hochbeladener Wagen fällt leichter um, als ein niedrig beladener, weil bei ersterem der Schwerpunkt bei derselben Unterstützungsfläche höher liegt als bei letzterem.

Ein Wagen fällt nicht um, so lange die Direktionslinie der Schwere noch zwischen die Räder trifft, und eine Mauer fällt nicht um, so lange die Direktionslinie der Schwere noch innerhalb ihrer Grundfläche fällt, vorausgesetzt, daß die Theile derselben gehörig verbunden sind. Zu Pisa in Italien steht ein Thurm, der 300 Fuß hoch ist, und 12 Fuß überhängt, und in Bologna steht einer, der 130 Fuß hoch ist und 9 Fuß überhängt. Sie können aber beide nicht umfallen, weil die Direktionslinie der Schwere bei beiden noch innerhalb ihrer Grundflächen fällt. Sie sind daher in der Stellung wie der Körper ABCD Figur 2 zu 171.

Pyramiden und Kegel stehen sicherer, als Prisma und Cylinder von gleicher Grundfläche und Höhe, weil bei ersteren der Schwerpunkt nur um $\frac{1}{4}$ der Höhe von der Grundfläche entfernt ist, bei letzteren aber in der halben Höhe liegt.

Stützmauern, welche einen starken Erddruck auszuhalten haben, werden zweckmäßig unten stärker als oben angelegt, oder mit einer Böschung nach vorn versehen, weil sie bei dieser Form mehr Widerstand gegen das Umwerfen leisten, als eine Mauer von gleichem Kubikinhalt, welche oben und unten gleiche Stärke hat u. s. w.

173. Die Unterstützungsfläche einer Kugel, welche auf einer ebenen Fläche ruht, ist ein Punkt, die eines Cylinders eine gerade Linie. Diese Körper können daher auf einer schiefen Ebene nicht ruhen, sondern müssen herabrollen, weil die Direktionslinie der Schwere SP immer vor die Unterstützungsfläche M trifft.



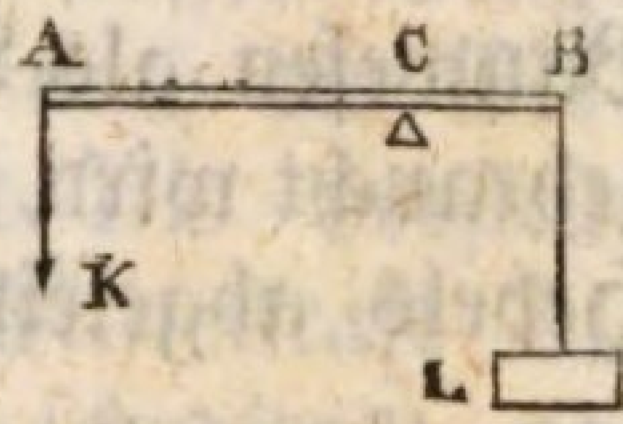
Der Schwerpunkt des menschlichen Körpers liegt in der Mitte des Unterleibes, und die Direktionslinie der Schwere trifft, wenn er gerade aufrecht steht, zwischen die beiden Füße. Trägt der Mensch eine Last, so muß die Direktionslinie der Schwere der Last mit der seines Körpers zusammenfallen. Daher biegt er sich vorwärts, wenn er Etwas auf dem Rücken, und rückwärts, wenn er Etwas vor sich trägt.

In dem Schwerpunkt eines Körpers kann man sich eine ganze Masse vereinigt denken, daher übt ein Körper in seiner Bewegung die größte Gewalt gegen einen andern aus, wenn er ihn mit seinem Schwerpunkt trifft. Ein fallender Balken thut am meisten Schaden, wenn er in der Richtung seiner Länge (oder vertikal) herabfällt, und fällt er in horizontaler Lage, so verursacht er weniger Schaden, wenn er mit einem Ende, als wenn er mit seiner Mitte auffällt.

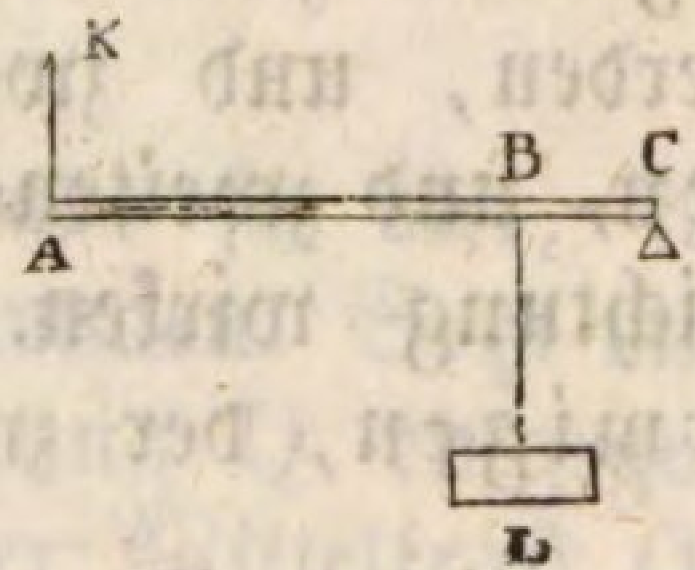
Geworfene Körper, auch wenn sie nicht rund sind, kommen, wenn der Stoß nicht durch den Schwerpunkt ging, in eine um den Schwerpunkt rollende Bewegung. Hieher gehört die Geschicklichkeit der Handlanger, einander Ziegelsteine zuzuwerfen, ohne sie in die drehende Bewegung zu versetzen.

C. Vom Hebel.

174. Erklärung. — Ein unbiegsamer Stab AB, der in irgend einem Punkte C seiner Länge unterstützt ist, und an dessen einem Ende eine



Kraft K und an dessen anderem Ende ein Gewicht L wirkt, heißt ein physischer Hebel. Denkt man sich statt des Stabes eine gewichtlose, unbiegsame Linie AB und an ihrem Ende zwei Kräfte AK und BL, so hat man den mathematischen Hebel.



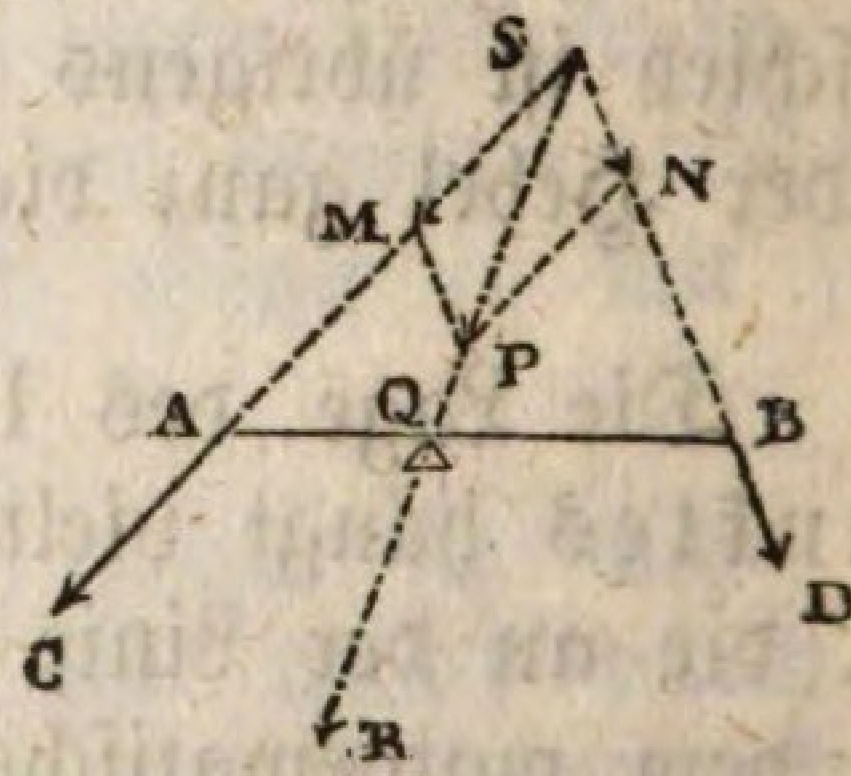
Gewöhnlich unterscheidet man zwischen dem zweiarmigen und einarmigen Hebel. Liegt der Unterstützungspunkt C des Hebels zwischen Kraft und Last (erste Figur), so heißt der Hebel zweiarmig; liegt er aber außerhalb Kraft und Last (zweite Figur), so heißt er einarmig. Dieser Unterschied ist übrigens nicht wesentlich, da die Gesetze beider Hebel ganz dieselben sind.

Die Lage des Unterstützungs- oder Drehpunktes hängt vielmehr von der Richtung der Kräfte ab, die an der Linie wirken. Im ersten Falle wirken an dem mathematischen Hebel zwei Kräfte parallel abwärts, der Unterstützungspunkt muß also, wenn die Linie sich nicht bewegen soll, oder die zwei Kräfte sich das Gleichgewicht halten sollen, zwischen beide fallen; im zweiten Falle wirken die beiden Kräfte in entgegengesetzter Richtung und deßhalb muß der Unterstützungspunkt außerhalb und auf die Seite fallen, wo die größere Kraft wirkt. Wenn also von dem zwei- oder einarmigen Hebel die Rede ist, so muß man dieß nur als Benennung der verschiedenen Anwendung eines und desselben Gesetzes, welches beim Hebel gilt, ansehen.

Die Gesetze des physischen Hebels, wie er im Bauwesen als Brech- und Hebeisen, oder als Wage 2c. gebraucht wird, müssen von denen des mathematischen Hebels abgeleitet werden.

Es sollen deßhalb, um zu dem für alles Folgende wichtigen Gesetz des mathematischen Hebels durch eine einfache Construktion zu gelangen, ganz allgemein zwei Kräfte an einer Linie wirkend gedacht werden, und zwar erstens, wenn sie nach derselben, und zweitens, wenn sie in entgegengesetzter Richtung wirken. Der erste Fall gibt den zweiarmigen, der zweite den einarmigen Hebel.

175. Construktion der Mittelkraft am zweiarmigen Hebel. — Wenn zwei Kräfte AC, BD nach gleicher Richtung an einer Linie AB wirken, so findet man die Größe und Richtung der Mittelkraft, oder der Kraft, welche so viel wirkt, als beide Kräfte zusammen, ebenfalls mit Hilfe des Parallelogramms der Kräfte. (158.) Verlängert man nehmlich die Richtungen AC, BD, nach welchen die Kräfte wirken, bis sie sich in S schneiden, und denkt man sich den Punkt S mit der Linie AB durch zwei gewichtlose, unbiegsame Linien SA, SB fest verbunden, so wird man, ohne die Wirkung der Kräfte auf die Linie AB zu ändern, dieselben parallel mit sich selbst nach S verschieben können. Macht man also SM = AC und SN = BD, so hat man zwei an einem Punkt S wirkende Kräfte, deren Mittelkraft gefunden wird, wenn man MP parallel zu SN und NP parallel zu SM zieht, wodurch



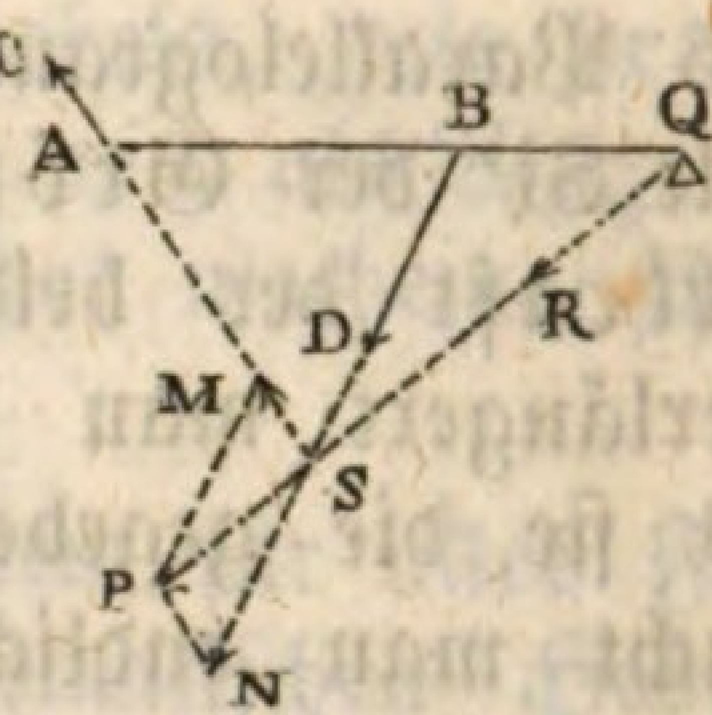
das Parallelogramm SMPN entsteht, dessen Diagonale SP der Größe und Richtung nach die Mittelkraft der beiden Kräfte AC und BD vorstellt. Verlängert man die Richtung der Mittelkraft SP, bis sie die gegebene Linie AB in Q schneidet, und macht man endlich QR = SP, so ist Q der Angriffspunkt und QR die Größe und Richtung der Mittelkraft der beiden gegebenen Kräfte AC und BD.

Die Mittelkraft QR wirkt gerade so viel, als die beiden Kräfte AC und BD zusammen. Setzt man der Mittelkraft QR eine Unterstützung Q entgegen, welche stark genug ist, den Druck der Mittelkraft QR zu überwinden, so wird diese Unterstützung Q die Wirkung der Mittelkraft QR, oder was das Nämliche ist, die Wirkung der beiden gegebenen Kräfte AC und BD aufheben. Die Linie AB wird also durch die in Q angebrachte Unterstützung in Ruhe bleiben, oder mit den daran wirkenden Kräften AC, BD im Gleichgewicht sein.

Die Linie AB mit den daran wirkenden zwei Kräften AC, BD und dem Unterstützungspunkt Q ist nun ein mathematischer Hebel.

Ist der Unterstützungspunkt Q auf die angegebene Art construirt und angebracht, so ist der mathematische Hebel AB mit den beiden Kräften AC, BD im Gleichgewicht.

176. Construktion der Mittelkraft am einarmigen Hebel. — Wirken an der Linie AB die beiden Kräfte AC, BD in entgegengesetzter Richtung, so wird die Größe und Richtung der Mittelkraft und ihr Angriffspunkt auf gleiche Weise

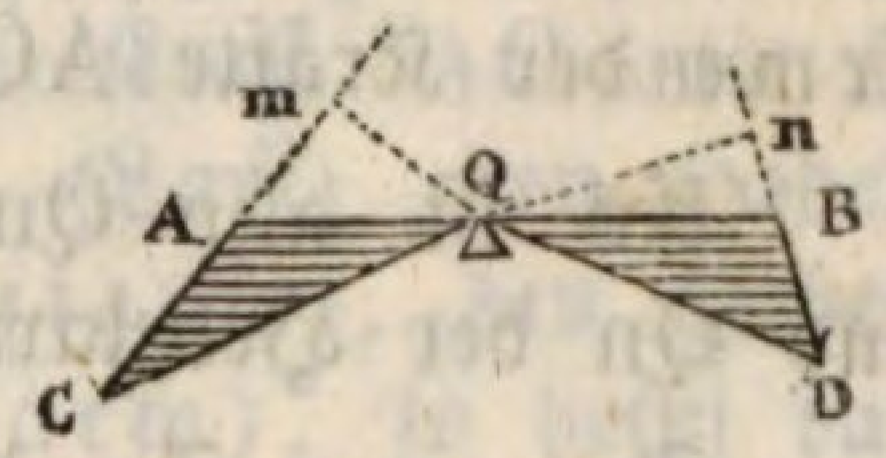


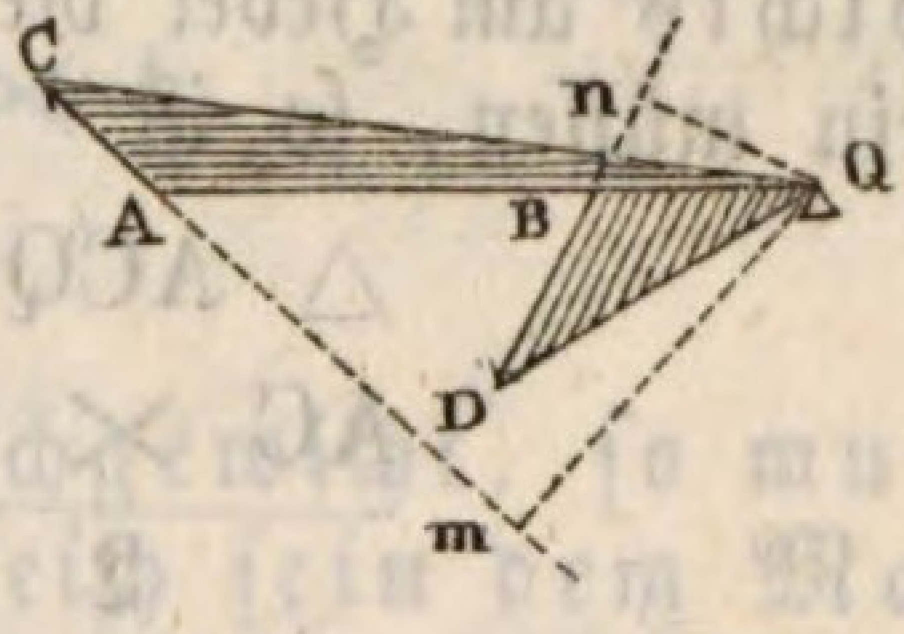
gefunden. Man verlängert die Richtungen AC, BD der beiden gegebenen Kräfte, bis sie sich in S schneiden. Denkt man sich nun den Punkt S mit der Linie AB durch die Linien SA, SB fest verbunden, so wird man, ohne die Wirkungen der Kräfte AC, BD auf die Linien AB zu ändern, dieselben parallel mit sich selbst nach dem Punkt S verschieben können. Macht man also SM = AC, SN = BD und vollendet man das Parallelogramm SNPM, indem man NP mit SM und MP mit SN parallel zieht, so ist die Diagonale SP der Größe und Richtung nach die Mittelkraft der beiden gegebenen Kräfte AC und BD, und die Verlängerung von SP bis Q gibt den Angriffspunkt derselben. Macht man endlich QR = SP, so ist Q der Angriffspunkt und QR die Größe und Richtung der Mittelkraft, welche eben so viel wirkt als die beiden Kräfte AC, BD zusammengenommen. Setzt man der Mittelkraft QR die Unterstützung Q entgegen, so wird diese einen Druck gleich der Größe der Mittelkraft auszuhalten haben. Die Unterstützung Q hebt aber die Wirkung der Mittelkraft QR, oder was dasselbe ist, die Wirkung der beiden Kräfte AC, BD auf und die Linie AB ist in Ruhe.

Die Linie AB mit den beiden Kräften AC, BD und dem Unterstützungspunkt Q bildet also einen mathematischen Hebel, welcher im Gleichgewicht ist.

177. Gleichgewichtsgesetz des Hebels. — Sind die beiden Kräfte AC, BD am Hebel im

Gleichgewicht, so läßt sich beweisen,*) daß sowohl im ersten Falle, wenn beide Kräfte nach derselben Richtung wirken (zweiarmiger Hebel), als auch im zweiten, wenn sie in entgegengesetzter Richtung wirken (einarmiger Hebel), die Dreiecke ACQ, BDQ, welche die Kräfte AC, BD zu Grundlinien, und ihre Spitzen im Unterstützungs- oder Drehpunkt Q des Hebels haben, an Fläche einander gleich sind.





Dieser Satz ist als das Grundgesetz des Hebels, wenn die Kräfte an demselben im Gleichgewicht sind, zu betrachten. Alle andern Sätze waren nur Folgerungen daraus.

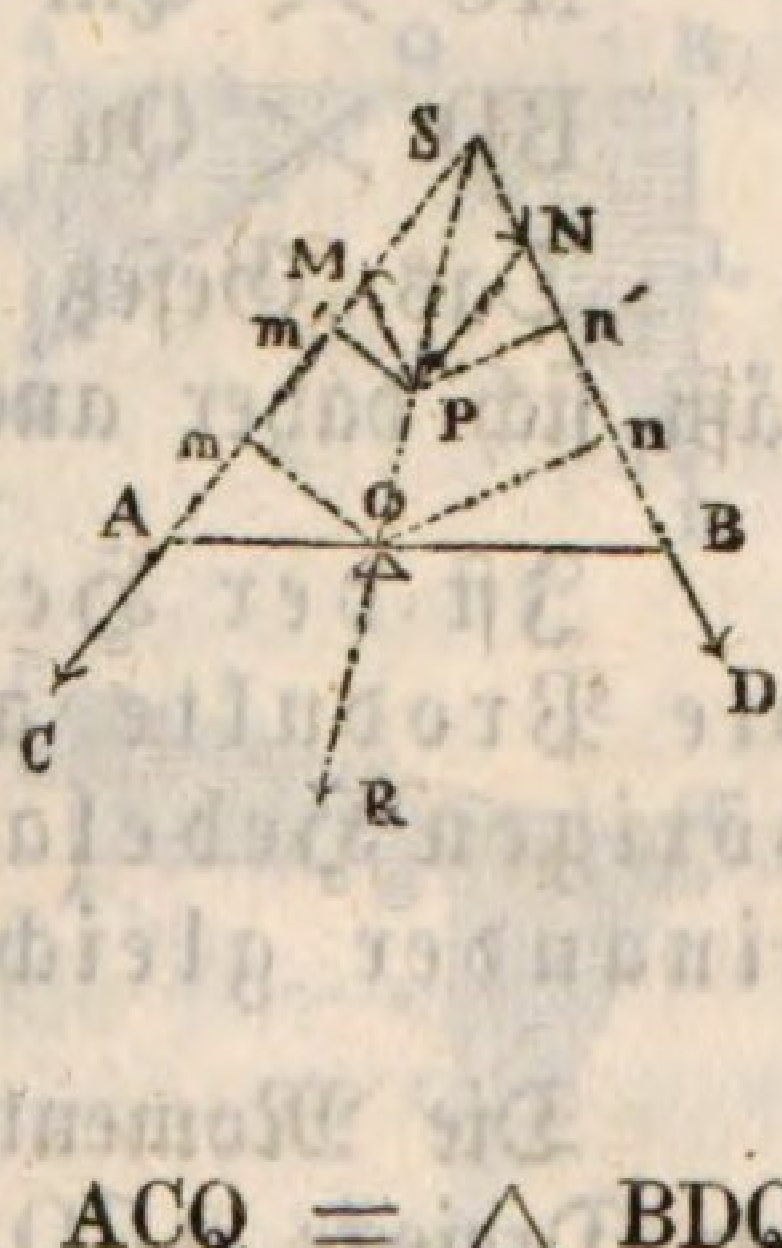
178. Kraftmoment, Lastmoment des Hebels. — Fällt man von dem Drehpunkt Q des Hebels die Senkrechte Qn auf die Richtung der

---

*) Beweis. $\triangle$ SMP $= \triangle$ SNP
oder SM $\times$ Pm' $=$ SN $\times$ Pn'.
Nun ist:
Pm' : Qm $=$ SP : SQ $=$ Pn' : Qn.
Hieraus:
Pn' $\times$ Qm $=$ Pm' $\times$ Qn; aber
SM $\times$ Pm' $=$ SN $\times$ Pn'.

SM $\times$ Qm $=$ SN $\times$ Qn

$$\frac{AC \times QM}{2} = \frac{BD \times Qn}{2}$$ oder $\triangle$ ACQ $= \triangle$ BDQ.



Kraft AC und die Senkrechte Qn auf die Richtung der Kraft BD, so sind diese Senkrechten die Höhen der Dreiecke ACQ und BDQ und heißen die **Hebelarme** der Kräfte AC und BD.

Es ist also Qm der Hebelarm der Kraft AC, und Qn der Hebelarm der Kraft BD.

Da nun für den **Zustand des Gleichgewichts** am Hebel die Dreiecke ACQ und BDQ gleich sein müssen, so ist

$$\triangle\ ACQ = \triangle\ BDQ \text{ oder}$$

$$\frac{AC \times Qm}{2} = \frac{BD \times Qn}{2}$$

oder weil die doppelten Flächeninhalte der Dreiecke ebenfalls gleich sein müssen,

$$AC \times Qm = BD \times Qn.$$

Die Produkte aus den Kräften in die entsprechenden Hebelarme heißt man die (**statischen**) **Momente der Kräfte**.

Es ist also

AC × Qm das Moment der Kraft AC.

BD × Qn „ „ „ „ BD.

Das Gesetz für das Gleichgewicht am Hebel läßt sich daher auch so ausdrücken:

Ist der Hebel im Gleichgewicht, so sind die Produkte aus den Kräften in die zugehörigen Hebelarme (die Momente der Kräfte) einander gleich.

Die Momente sind die doppelten Flächeninhalte der Dreiecke ACQ und BDQ.

179. Kraftarm, Lastarm. — Bezeichnet man jetzt, um zur Anwendung der Gesetze des mathematischen Hebels auf den physischen Hebel zu kommen, wie gewöhnlich die eine Kraft AC mit K (Kraft), die andere BD mit L (Last), den Hebelarm der ersteren mit k (Kraftarm), den Hebelarm der letzteren mit l (Lastarm), so heißt das Gesetz des Hebels für den Zustand des Gleichgewichts

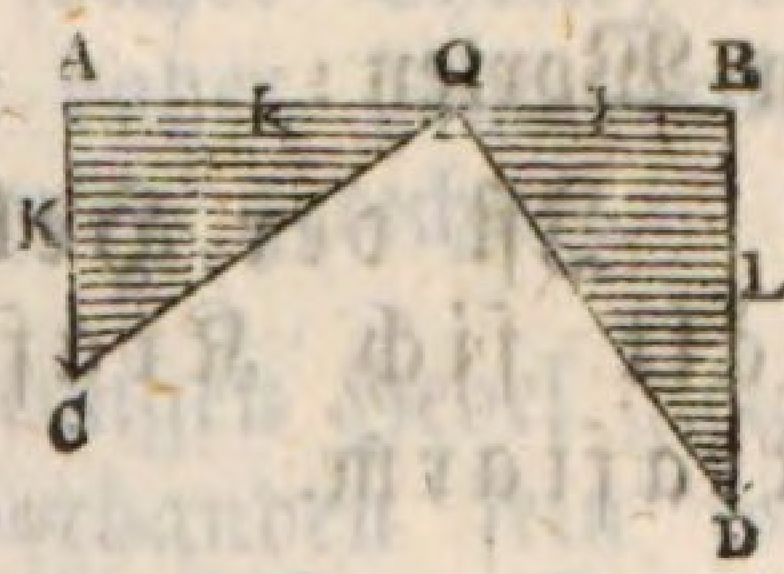
$$K \times k = L \times l.$$

Oder in Worten:

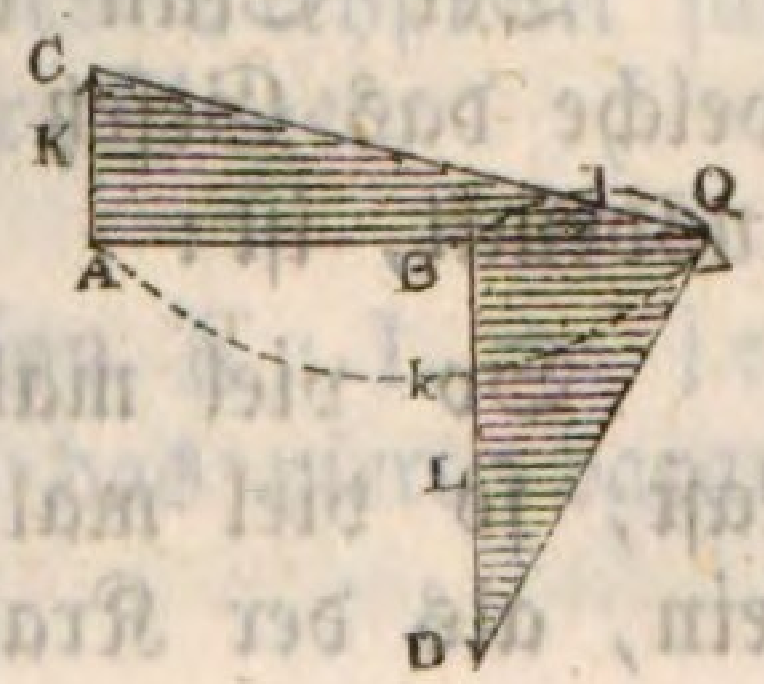
Ist der Hebel im Gleichgewicht, so muß das Moment der Kraft gleich sein dem Moment der Last.

Das Moment der Kraft ist die Kraft multiplizirt mit dem Kraftarm; das Moment der Last ist die Last multiplizirt mit dem Lastarm.

Wirkt Kraft und Last parallel unter sich und senkrecht auf die Linie AB, wie es bei dem physischen Hebel gewöhnlich der Fall ist, so gelten die nämlichen Gesetze. Die Hebelarme oder die Senkrechten aus dem Unterstützungspunkt auf die Richtungen der Kräfte fallen hier nur mit der Linie AB selbst zusammen, weil diese auf der Richtung der Kräfte senkrecht steht.



Stellt also AC die Kraft K vor, so ist AQ der Hebelarm k der Kraft (Kraftarm), und ist BD die Last L, so ist BQ der Hebelarm l der Last (Lastarm).



Für den Zustand des Gleichgewichts am Hebel sind die Dreiecke ACQ und BDQ wieder gleich und ihr doppelter Inhalt gibt die Momente von Kraft und Last. Es ist also

$AC \times AQ = K \times k$ das Moment der Kraft K und

$BD \times BQ = L \times l$ das Moment der Last L.

Für den Zustand des Gleichgewichts müssen beide Momente gleich sein, und es ist daher

$$AC \times AQ = BD \times BQ \quad \text{oder}$$
$$K \times k = L \times l.$$

180. Verhältniß von Kraft und Last am Hebel. — Aus der Gleichheit des Moments der Kraft und des Moments der Last

$$K \times k = L \times l$$

läßt sich aber (vergl. 38.) folgende Proportion bilden:

$$K : L = l : k$$

oder in der Figur

$$AC : BD = BQ : QA;$$

in Worten:

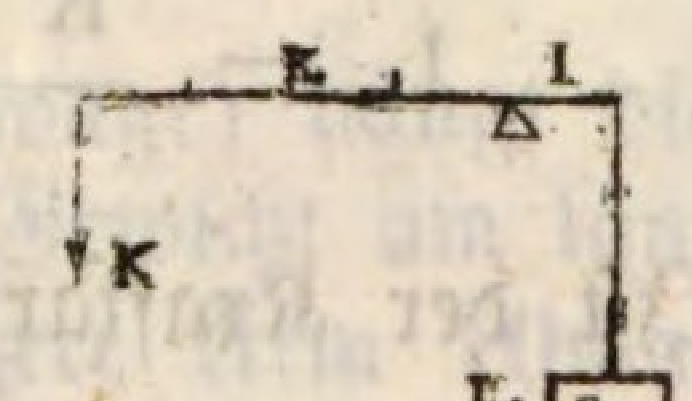
Ist der Hebel im Gleichgewicht, so verhält sich Kraft zu Last, wie Lastarm zu Kraftarm.

Der Sinn der Proportion $K : L = l : k$, welche das Gesetz des Gleichgewichtzustands am Hebel ausdrückt, ist:

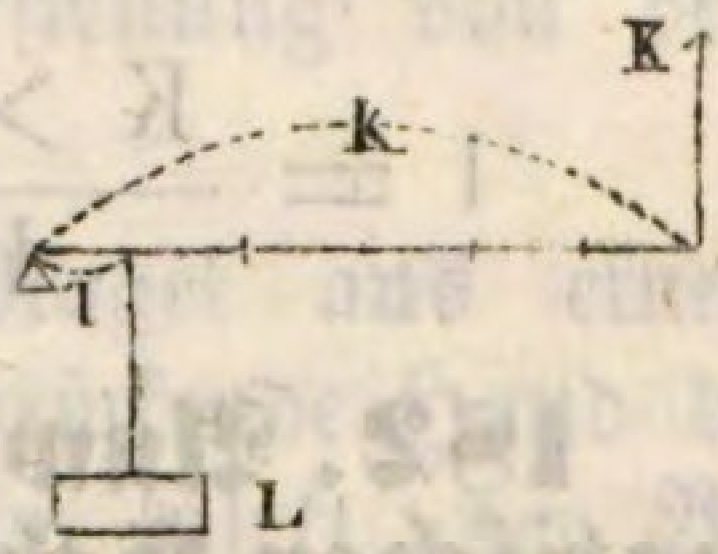
So viel mal die Kraft kleiner ist, als die Last, so viel mal muß auch der Lastarm kleiner sein, als der Kraftarm.

Oder: So viel mal die Last größer ist als die Kraft, so viel mal muß auch der Kraftarm größer sein als der Lastarm.

Soll z. B. bei dem zweiarmigen Hebel die Kraft K der vierte Theil der Last L sein, so muß auch der Lastarm l der vierte Theil des Kraftarms k sein.



Der ganze Hebel muß also hier in 5 gleiche Theile getheilt werden, der Kraftarm erhält 4 solcher Theile und der Lastarm einen Theil, der Drehpunkt liegt daher beim ersten Fünftel von der Last weg gerechnet.



Soll an dem einarmigen Hebel die Last L 6mal größer sein, als die Kraft K, so muß auch der Kraftarm k 6mal größer sein, als der Lastarm l.

Der ganze Hebel wird also in 6 gleiche Theile getheilt, der Kraftarm erhält 6 solcher Theile, der Lastarm 1 Theil, die Last hängt daher beim ersten Sechstel vom Unterstützungspunkt weg gerechnet.

Sind Kraft und Last am 2armigen Hebel gleich, so müssen, wenn Gleichgewicht vorhanden sein soll, auch die Hebelarme gleich sein; der Drehpunkt fällt alsdann in die Mitte, wie bei der Wage.

181. Sind in der Proportion K : L = l : k drei Glieder bekannt, so läßt sich das vierte daraus durch Rechnung finden.

Ist z. B. die Kraft k gesucht, so gibt die Proportion:

$$K = \frac{L \times l}{k} = \frac{\text{Moment der Last}}{\text{Kraftarm.}}$$

Ist die Last L gesucht, so folgt aus der Proportion:

$$L = \frac{K \times k}{l} = \frac{\text{Moment der Kraft}}{\text{Lastarm.}}$$

Ist der Kraftarm k zu suchen, so wird

$$k = \frac{L \times l}{K} = \frac{\text{Moment der Last}}{\text{Kraft.}}$$

Ist endlich der Lastarm unbekannt, so wird

$$l = \frac{K \times k}{L} = \frac{\text{Moment der Kraft}}{\text{Last.}}$$

182. Anwendung der Gesetze des mathematischen Hebels auf den physischen Hebel.

Bezüglich der Anwendung des Hebels in der Praxis, muß man den zweiarmigen Hebel von dem einarmigen unterscheiden, obwohl die Gesetze beider ganz dieselben sind.

a) Der **zweiarmige Hebel**, bei welchem der Drehpunkt zwischen Kraft und Last liegt, heißt auch Druckhebel, weil bei ihm die Kraft allemal abwärts wirkt. Anwendungen davon sind:

Die gewöhnliche Wage, die Decimalwage, Scheren, Zangen, Heb- und Brecheisen, die Schaufel, wenn mit derselben gegraben wird, Pumpenschwengel, Hebebäume, Steuerruder, Schlüssel, eine Kurbel, die Art, wie man eine Last an einem Stock auf der Schulter trägt u. s. w.

Bei der gewöhnlichen Wage sind die beiden Hebelarme gleich, die Wagschalen und die beiden Arme gleich schwer, daher auch die aufgelegten Lasten (Gewicht einerseits und Waaren anderseits) gleich sein müssen. Dieß ist der Fall, wenn der Wagbalken horizontal steht, was durch die vertikale Stellung der Zunge angezeigt wird.

Bei der Decimalwage (Schneppwage) hängt die zu wiegende Waare am kurzen, das Gewicht am langen Hebelarme. Ist z. B. der längere Arm 10mal so lang als der kurze, so kann man einem Pfund Gewicht am Ende des längeren Arms, 10 Pfund Waare am kurzen Hebelarm wiegen. Die Decimalwage gibt eine recht deutliche Vorstellung von dem Gesetz des ungleicharmigen Hebels.

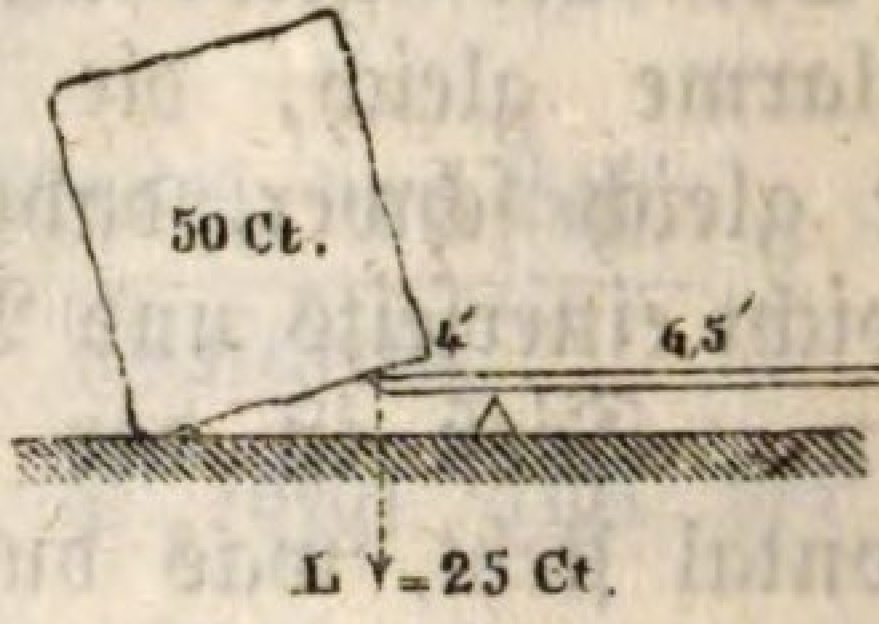
Wird mit einer Zange ein Nagel aus einem Brett gezogen, so bildet die niederdrückende Hand die Kraft, welche am längeren Hebelarm wirkt, der Berührungspunkt der Zange mit dem Brett ist der Drehpunkt des Hebels, der Kopf der Zange ist der kürzere Hebelarm, an welchem die Festigkeit, mit welcher der Nagel im Brett steckt, als Last wirkt.

Wird mit einer Schaufel Erde gegraben, und dieselbe auf dem linken Knie aufgesetzt, so ist dieses der Drehpunkt des Hebels, der rechte Arm die Kraft, die zu grabende Erde die Last.

1. Beispiel. Welche Kraft ist nöthig, um an einem 6,9′ langen Hebeisen, das bei 4″ dec. von seinem untern Ende weg unterstützt ist, ein Quaderstück von 50 Centner Schwere zu heben?

Antwort: Da der Stein nur an einem Ende gehoben wird, so kann man annehmen, daß die

Hälfte seines Gewichts auf das Ende des Hebels treffe, sohin 25 Ctr. als Last am Hebel wirken. Hier ist gegeben: die Last L = 25 Ctr. der Lastarm l = 4″ dec. = 0,4′, und der Kraftarm



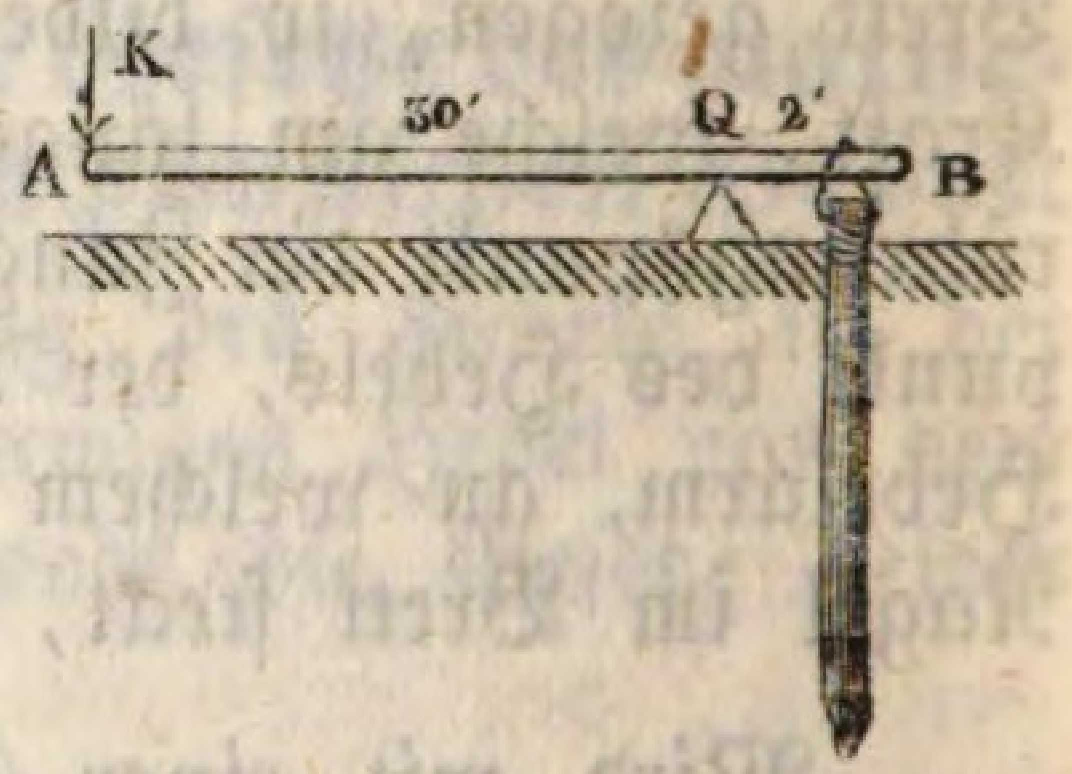
k = 6,9 — 0,4 = 6,5′; die Kraft K wird gesucht. Nun ist also hier:

$$K : L = l : k$$
$$K : 25 = 0{,}4 : 6{,}5$$

woraus

$$K = \frac{25 \times 0{,}4}{6{,}5} = \frac{10}{6{,}5} = 1{,}53 \text{ Ctr.}$$

2. Beispiel. Mit welcher Kraft steckt ein Pfahl im Boden, welcher durch einen Hebebaum AB von 32′ Länge, der bei Q in einer Entfernung von 2′ vom Pfahl unterstützt ist, und an dessen anderem Ende 10 Mann mit ihrem Körpergewicht abwärts drücken, herausgezogen werden kann?



Antwort: Hier ist (das Gewicht eines Mannes zu 150 Pfd. angenommen) gegeben die Kraft K = 10 × 1,5 Ctr. = 15 Ctr., ferner der Kraftarm k = 32 — 2′ = 30′ und der Lastarm l = 2′; gesucht die Last L. Nun ist

$$K : L = l : k$$
$$15 : L = 2 : 30$$

$$L = \frac{15 \times 30}{2} = \frac{450}{3} \text{ Ctr.} = 225 \text{ Ctr.}$$

Sind Kraft und Last und die Länge des Hebels gegeben, und man sucht die Lage des Unterstützungspunktes, damit sich Kraft und Last das Gleichgewicht halten, so erhält man den Kraftarm, wenn man die Länge des Hebels mit der Last multiplizirt, und mit der Summe von Kraft und Last dividirt.

Der Lastarm wird erhalten, wenn man die Länge des Hebels mit der Kraft multiplizirt, und mit der Summe von Kraft und Last dividirt.

Z. B. Es soll an einem Hebel von 8′ Länge eine Kraft von 120 Pfd. einer Last von 6 Ctr. = 600 Pfd. das Gleichgewicht halten, wo muß der Drehpunkt des Hebels sein?

Antwort: Hier ist

$$\left.\begin{array}{l} K = 120 \text{ Pfd.} \\ L = 600 \text{ Pfd.} \end{array}\right\} \text{die Länge des Hebels} = 8'.$$

Also der Kraftarm

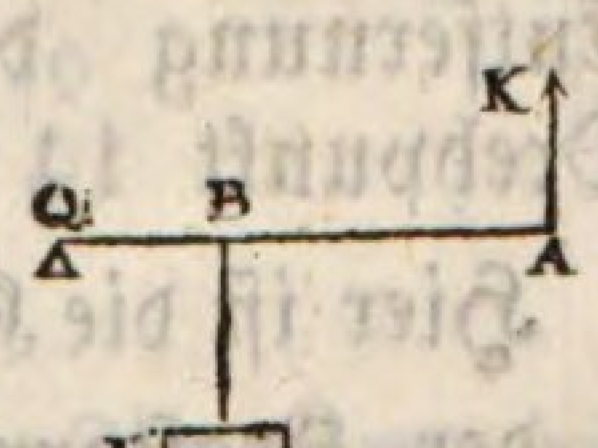
$$k = \frac{8 \times 600}{600 + 120} = \frac{4800}{720} = 6{,}66'\ldots$$

und der Lastarm

$$l = \frac{8 \times 120}{600 + 120} = \frac{960}{720} = 1{,}33'\ldots$$

Kraftarm und Lastarm müssen zusammen die ganze Länge des Hebels geben, also 6,66.. + 1,33.. = 7,99... oder 8′.

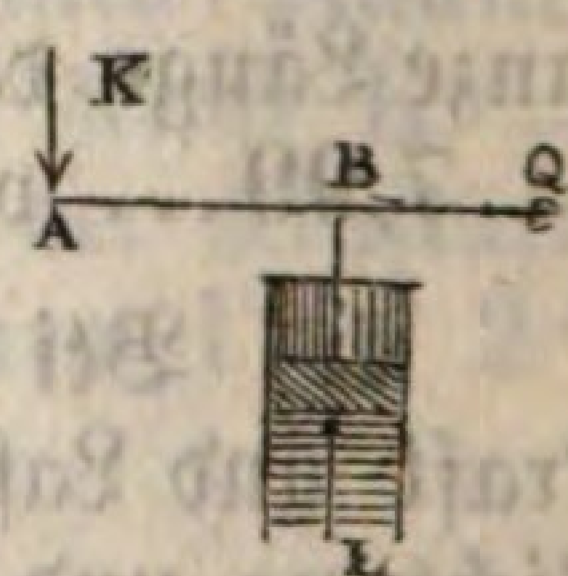
b) Bei dem **einarmigen Hebel** AB wirkt Kraft und Last in entgegengesetzter Richtung und der Drehpunkt Q des Hebels liegt außerhalb beiden, und zwar auf der Seite der Last, wenn die Last größer als die Kraft, und auf der Seite der Kraft, wenn diese



größer ist, als die Last. Er heißt auch **Traghebel**, weil derselbe, wenn die Kraft aufwärts wirkt, zum Tragen von Lasten, wie z. B. bei einem Schubkarren dient.

Anwendungen davon sind: der Schubkarren. Bei diesem ist der Drehpunkt in der Achse des Rads, die abwärts ziehende Last im Kasten, die aufwärts ziehende Kraft am Ende der Handhaben. Weitere Anwendungen sind: das Schneidmesser, das Zuckermesser, die Flachsbreche, der Hebel an einer Feuerspritze. Bei dieser ist der Drehpunkt der Zapfen, die Last ist das unter dem Kolben befindliche Wasser, welches in die Schläuche getrieben wird, die Kraft ist die am Ende des eisernen Hebels abwärts drückende Menschenkraft. Eine Ruderstange ist ebenfalls ein einarmiger Hebel, bei welchem das Wasser den Stützpunkt, das vorwärts zu bewegende Schiff die Last, und das Ende der Stange im Schiff den Angriffspunkt der Kraft bildet. Eine in ihren Angeln sich drehende Thür ist gleichfalls ein einarmiger Hebel. Wo wirkt hier Kraft, wo die Last, und wo ist der Drehpunkt des Hebels?

1. **Beispiel.** Wie groß muß der zu überwindende Druck der Wassersäule unter den beiden Kolben einer doppeltwirkenden Feuerspritze sein, an deren beiderseitigen 6′ langen Hebelarmen auf jeder Seite 6 Mann jeder mit einem Gewicht von 25 Pfund niederdrücken, wenn die Entfernung der Kolbenstange vom Drehpunkt $1\frac{1}{2}$′ beträgt?



Hier ist die Kraft	$K = 6 \times 25$ Pfd.			$= 150$ Pfd.
der Kraftarm	$k = 6'$			$= QA$
der Lastarm	$l = 1\frac{1}{2}'$	$= 1{,}5'$		$= QB$

und die Last L wird gesucht. Nun ist

$$K : L = l : k \text{ oder}$$

$$150 : L = 1{,}5 : 6$$

$$L = \frac{150 \times 6}{1{,}5} = 100 \times 6 = 600 \text{ Pfd.}$$

2. Beispiel. Welches Gewicht hat man an den Handhaben eines Schubkarrens zu heben, wenn die Last im Kasten 2 Ctr., die Entfernung der Last von der Radachse $1\frac{1}{2}'$, die der Handhaben von der Radachse 5′ beträgt?

Hier ist gegeben L = 2 Ctr. = 200 Pfd.,

" " " $l = 1\frac{1}{2}' = 1{,}5'$

" " " $k = 5'$

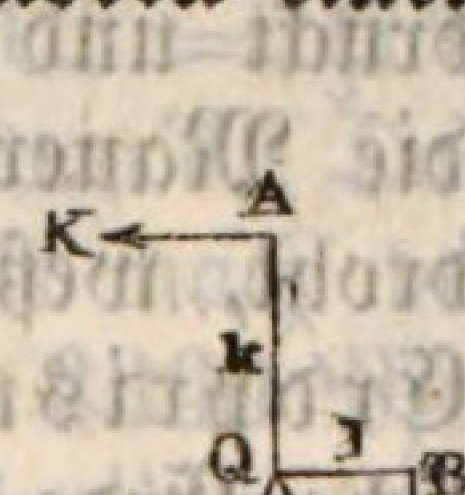
und gesucht K. Nun ist aber

$$K : L = l : k$$

$$K : 200 = 1{,}5 : 5, \text{ woraus}$$

$$K = \frac{200 \times 1{,}5}{5} = 200 \times 0{,}3 = 60 \text{ Pfd.}$$

183. Winkelhebel. — Wenn die beiden Hebelarme nicht in einer geraden Linie liegen, sondern einen Winkel mit einander bilden, in dessen Scheitel der Umdrehungspunkt sich befindet, so heißt der Hebel ein Winkelhebel. Wirken hier Kraft und Last unter rechten Winkeln auf die Enden der Hebelsarme, so verhalten sich auch bei diesem Hebel K : L = QB : QA = l : k.



Die Schellen- oder Glockenzüge in Zimmern und Gängen sind Winkelhebel, bei diesen will man aber

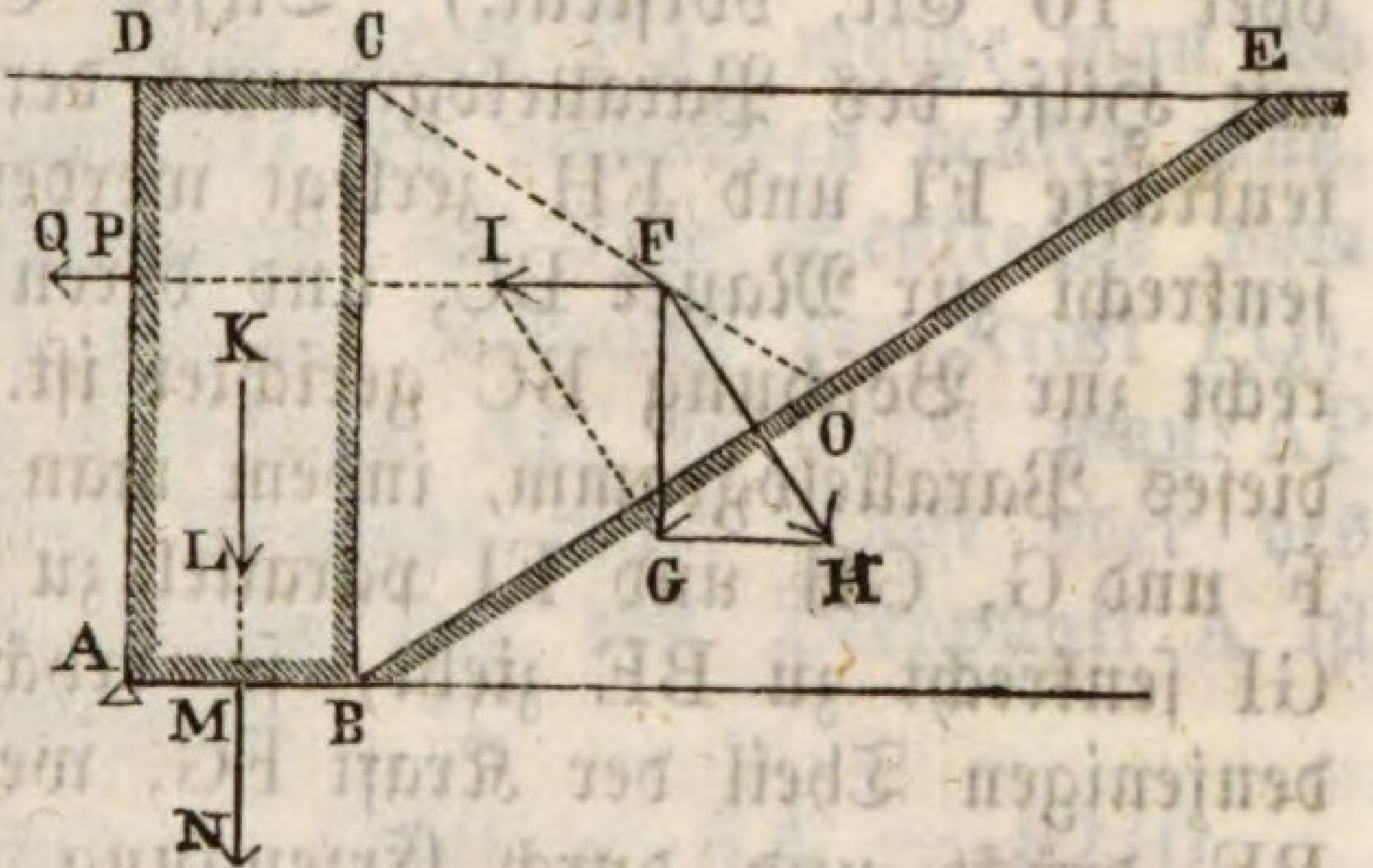
keine Kraftersparniß machen, sondern nur die lothrechte Richtung der Kraft in eine wagrechte verwandeln. Der Winkelhebel kommt auch bei den sogenannten Kunstkreuzen der Bergwerks- und anderer Maschinen vor.

184. Standfähigkeit einer Stützmauer. Ein besonders lehrreiches Beispiel für die Anwendung der Lehre vom Parallelogramm der Kräfte, vom Schwerpunkt und Hebel, gibt die Betrachtung der Standfähigkeit einer Stützmauer, auf welche eine Erdmasse drückend wirkt, und der Kräfte, welche hiebei sich thätig zeigen.

Es sei z. B. ABCD eine 8′ hohe, 3′ starke Stützmauer mit rechtwinkligem Querschnitt, dahinter eine eben so hohe Erdmasse BCE, welche ohne die Mauer nach der Fläche BE abrutschen würde, und es sei BC = 8′, DC = 3′, CE = 12′, so daß BE eine $1\frac{1}{2}$malige Erdböschung vorstellt. (In der Figur ist der Maßstab = $\frac{1}{100}$ der natürl. Größe oder 1 Dec.-Linie bayr. zu 1 Fuß angenommen.) Das Dreieck BCE ist in diesem Fall der Querschnitt des dreieckigen Erdprisma's, welches auf die Mauer drückt und sie abzubrechen, wegzuschieben oder, wenn die Mauer sehr fest ist, um die Kante A umzustürzen droht, weßhalb auch das Prisma BCE das drückende Erdprisma genannt wird. Die unter BE befindliche Erde ist für sich, mit oder ohne Stützmauer, in Ruhe, da sie kein Bestreben hat, abzurutschen.

Es fragt sich nun, wie groß ist der Druck dieses Erdprisma's auf die Mauer, und kann diese dem Erddruck Widerstand leisten?

Um dieß zu finden, denkt man sich Mauer und Erdprisma auf einen Fuß Länge abgeschnitten, d. i. man betrachtet einen laufenden Fuß Mauer mit dem dahinter liegenden Erdprisma auf die gleiche Länge. Der Kubikinhalt des Erdprisma's auf 1 Fuß Länge ist



$$= \frac{BC \times CE}{2} \times 1 = \frac{8 \times 12}{2} \times 1 = 48\ c'$$

und da 1 c′ Erde durchschnittlich 70 Pfd. wiegt (vergl. 152), so ist das Gewicht des drückenden Erdprisma's auf 1′ Länge

$$= 48 \times 70 = 3360 \text{ Pfd.}$$

Dieses Gewicht kann man sich im Schwerpunkt des Prisma's, welcher im Schwerpunkt des Dreiecks BCE liegt, vereinigt denken. Construirt man diesen Schwerpunkt, indem man BE in O halbirt, die Halbirungslinie CO des Dreiecks zieht, und CF $= \frac{2}{3}$CO nimmt, so ist F der Schwerpunkt des Prisma's. Das Gewicht des drückenden Erdprisma's wirkt nach der Vertikalen FG, und da dieses Gewicht = 3360 Pfd. gefunden wurde, so kann man dieses Gewicht (wie in der Figur geschehen ist) durch eine 3,36 Dec.-Linien lange Vertikallinie FG darstellen. (So lassen sich alle Kräfte in Pfunden ausgedrückt durch Linien darstellen, indem man, wie hier eine Kraft von 1000 Pfd. durch 0,01 Fuß oder 1 Dec.-Linie dar-

stellt, und die aus der Construktion sich ergebenden Kräfte mißt, wobei wieder 1 Dec.-Linie 1000 Pfd. oder 10 Ctr. vorstellt.) Dieses Gewicht FG kann mit Hilfe des Parallelogramms der Kräfte in 2 Seitenkräfte FI und FH zerlegt werden, deren eine FI senkrecht zur Mauer BC, und deren andere FH senkrecht zur Böschung BC gerichtet ist. Construirt man dieses Parallelogramm, indem man durch die Punkte F und G, GH und FI parallel zu CE und FH und GI senkrecht zu BE zieht, so erhält man FH als denjenigen Theil der Kraft FG, welcher senkrecht auf BE drückt und durch Erzeugung von Reibung auf der Rutschfläche BE das Abgleiten des Prisma's theilweise verhindert, und FI als denjenigen Theil des Gewichts FG, welcher senkrecht auf die Mauer ABCD drückt und diese umzuwerfen strebt. Mißt man FI, so findet man 2,3 Linien dec. oder ohngefähr 2300 Pfd. Druck, da 1 Linie dec. 1000 Pfd. vorstellt. Dieser Druck kommt indessen nicht ganz zur Anwendung, da die Reibung des abrutschenden Prisma's längs BE und der Zusammenhang der Erdtheilchen unter sich einen Theil dieses Drucks wieder aufhebt. Eine genaue Ermittlung der Größe dieser Hindernisse ist nicht möglich. Man wird sich indessen der Wahrheit nähern, wenn man annimmt, daß ohngefähr die Hälfte des berechneten Drucks FI oder $\frac{2300}{2} = 1150$ Pfd. Druck auf die Mauer wirksam bleiben. Verlängert man daher die Richtung der Kraft FI nach P und macht man PQ $= \frac{1}{2}$ FI $=$ 1150 Pfd., so stellt PQ die Kraft vor, welche die Mauer ABCD umzuwerfen strebt. Der Einfachheit und größeren Sicherheit wegen muß man annehmen, die Mauer ABCD bestehe aus *einer* festen Masse,

welche auf der Unterlage AB aufgestellt ist, und daß bei AB keine Bindekraft des Mörtels wirke, also die Kraft PQ die Mauer ABCD nur um die Kante A umwerfen könne. Diese Kraft PQ, welche man sich mit der Mauerfläche AD fest verbunden denken muß, wirkt an dem Hebelarm AP (die Senkrechte vom Drehungspunkt A auf die Richtung der Kraft PQ). Mißt man diesen Hebelarm AP, so findet man AP = 5,4 Fuß. Das Moment dieser Kraft oder des Erddrucks PQ in Bezug auf den Drehpunkt A ist = Kraft × Hebelarm

$$= PQ \times AP = 1150 \times 5{,}4 = 6210.$$

Diesem Moment muß nun das entsprechende Moment der Stützmauer das Gleichgewicht halten.

Dem Erddruck entgegen wirkt die Schwere der Stützmauer. Der Kubikinhalt der Mauer auf 1′ Länge ist

$$= AB \times AD \times 1 = 8 \times 3 \times 1 = 24 \text{ c}'$$

und da 1 c′ Mauer aus Sandstein ohngefähr 104 Pfd. wiegt, so ist das Gewicht der Stützmauer auf 1′ Länge

$$= 104 \times 24 = 2496 \text{ Pfd.}$$

Dieses Gewicht ist im Schwerpunkt K (Mittelpunkt des Rechtecks ABCD, oder Durchschnittspunkt der Diagonalen BD und AC) als eine nach der Vertikalen KL abwärts wirkende Kraft KL zu denken. Stellt man diese durch eine Linie dar, so ist KL = 2,496 oder 2,5 Dec.-Linien groß aufzutragen. Verschiebt man diese Kraft in ihrer Richtung nach MN und macht man MN = KL, so ist MN das Gewicht der Stützmauer, welches als vertikal wirkende Kraft an dem Hebelarm AM (die Senkrechte vom Dreh-

punkt A auf die Richtung der Kraft MN) dem Umkanten der Mauer Widerstand leistet. Das Moment dieser Kraft ist = Kraft × Hebelarm

$$= MN \times AM$$
$$= KL \times AM = 2496 \times 1{,}5 = 3744,$$

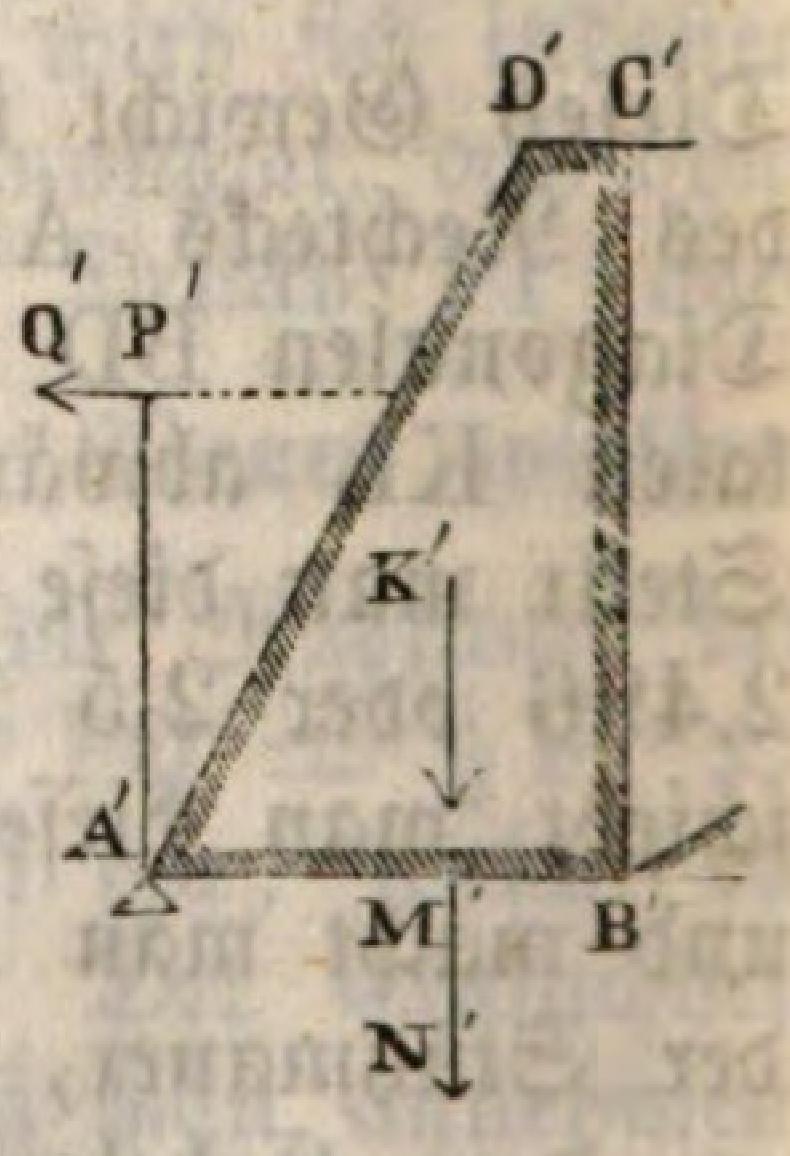
da der Hebelarm $AM = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 3 = 1{,}5$ ist. Soll zwischen dem Erddruck PQ und dem Gewicht KL der Mauer in Bezug auf die Drehung der Mauer um die Kante A Gleichgewicht sein, so müssen an dem Winkelhebel QPAMN die Momente gleich oder es muß

$$QP \times AP = MN \times AM$$

sein. Nun ist aber das Moment des Erddrucks $= QP \times AP = 6210$; das Moment der Stützmauer aber $= MN \times AM = 3744$, also kleiner gefunden worden; die Mauer leistet daher dem Erddruck nicht hinreichend Widerstand und wird von demselben um den Punkt A in der Richtung PQ umgekantet werden.

Gibt man der Stützmauer dagegen bei derselben Höhe oben bei C′D′ nur 1′, unten bei A′B′ 5′ Breite, so ist ihr Kubikinhalt auf 1′ Länge

$$= \left(\frac{5+1}{2}\right) \times 8 \times 1 = 24 \text{ c}'$$



und ihr Gewicht per laufenden Fuß

$$= 24 \times 104 = 2496 \text{ Pfd.},$$

also ebenso groß wie vorhin. Der Schwerpunkt K′ dagegen fällt tiefer nach K′ und der Hebelarm

A′M′ der Kraft M′N′ (= 2496 Pfd.) wird 3,0 Fuß; das Moment der Stützmauer in Bezug auf die Drehung um den Punkt A′ wird daher

$$= M'N' \times A'M' = 2496 \times 3 = 7488$$

während das Moment des Erddrucks

$$= Q'P' \times A'P' = 1150 \times 5{,}4 = 6210$$

dasselbe bleibt, wie früher, da an dem drückenden Erdprisma durch die veränderte Form der Stützmauer Nichts geändert wird. In diesem Fall ist also das Moment der Stützmauer größer, als das des Erddrucks; die Mauer kann daher nicht umgekantet werden und leistet dem Erddruck hinreichenden Widerstand.

Hieraus geht hervor, daß Stützmauern von trapezförmigem Querschnitt bei gleichem Kubikinhalt mehr Widerstandsfähigkeit haben, als solche mit rechtwinkligem Querschnitt.

Erfahrungsgemäß muß die mittlere Stärke von Stützmauern mit Anlauf, wenn sie dem Erddruck auf die Dauer Widerstand leisten sollen, bei geringer Höhe mindestens $1/4$, und wenn sie hoch sind und der Erddruck bedeutend ist, mindestens $1/3$ der Höhe der Mauer über dem Boden betragen.

185. Grundgesetz aller Maschinen: Was an Kraft gewonnen wird, geht an Geschwindigkeit verloren. — Die bisher betrachteten Gesetze des Hebels, so wie auch die folgenden der übrigen Baumaschinen beziehen sich nur auf den Zustand des Gleichgewichts, d. i. wenn der Hebel in Ruhe ist. Sobald aber Bewegung nach irgend einer Seite eintritt, muß außer der Kraft und Last eine neue Größe in Betracht gezogen werden und zwar die Geschwindigkeit von Kraft und Last. Die wirkliche Leistung einer einfachen oder zusam-

mengesetzten in Bewegung befindlichen Maschine kann nehmlich nur dadurch richtig gemessen werden, daß man die Geschwindigkeit in Rechnung bringt, und daher die bewegende Kraft mit ihrer Geschwindigkeit einerseits und die bewegte Last mit ihrer Geschwindigkeit anderseits betrachtet und mit einander vergleicht.

Die Leistung oder die Arbeit einer Kraft ist das Produkt aus der Kraft in den von ihr zurückgelegten Weg.

Hat man z. B. ein 6′ langes Hebeisen, welches bei $\frac{1}{6}$ seiner Länge unterstützt ist, und drückt man den 5′ langen Hebelarm mit einer Kraft von 50 Pfd. durch 2 Fuß abwärts, so wird man an dem andern 1′ langen Hebelarm eine Last von $5 \times 50 = 250$ Pfd. auf $\frac{1}{5}$ von $2' = 0{,}4$ Fuß Höhe aufwärts heben können. In diesem Fall halten im Zustand der Ruhe oder des Gleichgewichts sich wohl eine Kraft 50 Pfd. am 5′ langen und eine Last von 250 Pfd. am 1′ langen Hebelarm das Gleichgewicht, oder man kann mit 50 Pfd. Druck abwärts 250 Pfd. aufwärts heben. Im Zustand der Bewegung ist dagegen mit Rücksicht auf die Geschwindigkeit ein eigentlicher Gewinn an Leistung oder Arbeit nicht erzielt worden. Denn um 50 Pfd. 2 Fuß abwärts zu bewegen, ist eine Arbeit von $50 \times 2 = 100$ nöthig, und um 250 Pfd. Last 0,4 Fuß aufwärts zu bewegen, ist eine Leistung von $250 \times 0{,}4 = 100$ also dieselbe Arbeit aufzuwenden. Man hat also wohl mit der Kraft von 50 Pfd. eine 5mal größere Last von 250 Pfd. gehoben, und das 5fache an Kraft gewonnen. Da aber die Kraft am längeren Hebelarm einen Weg von $2' = 20$ Dec.-Zolle abwärts, die Last in derselben

Zeit aber nur einen Weg von 0,4 Fuß oder 4 Dec.-Zoll aufwärts zurückgelegt hat, so hat sich die Last nur durch $\frac{1}{5}$ des Weges bewegt, welchen die Kraft zurückgelegt hat. Um die Last durch 2′ zu bewegen, müßte die Kraft 5 × 2 oder 10′ zurücklegen. Man hat also genau eben so viel an Geschwindigkeit verloren, was an Kraft gewonnen wurde. Die Gesammtwirkung mit Rücksicht auf die Geschwindigkeit, oder die geleistete „Arbeit" ist dagegen dieselbe geblieben, da das Produkt aus Kraft und ihrem Weg (50 × 2 = 100) und das Produkt aus Last in ihren Weg (250 × 0,4 = 100) gleich groß ist.

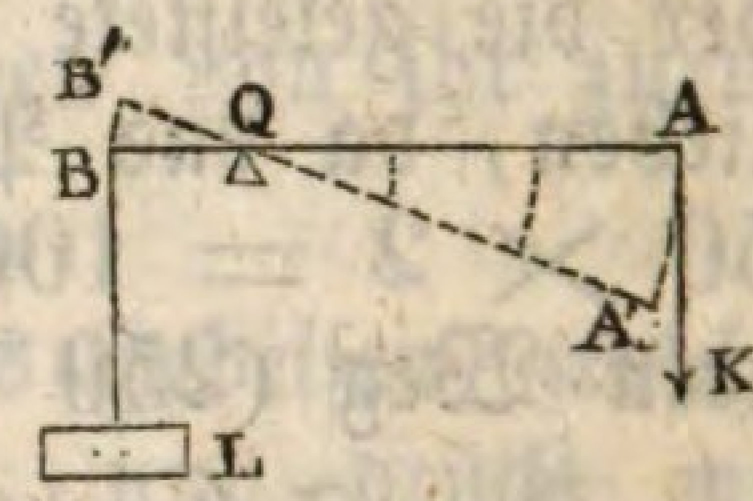
Im Folgenden wird gezeigt werden, daß bei allen einfachen und zusammengesetzten Maschinen ein Gewinn an Kraft nur mit einem genau eben so großen Verlust an Geschwindigkeit, und ein Gewinn an Geschwindigkeit nur mit einem eben so großen Verlust an Kraft erkauft werden kann.

Gleichwohl ist es oft von großem Nutzen, große Krafterſparniß mit Verlust von Geschwindigkeit zu erzielen. Die Baumaschinen z. B. haben alle lediglich den Zweck, große Lasten mit Anwendung von wenig Menschenkraft zu heben. Sie leisten dieß aber nur auf Kosten der Geschwindigkeit oder der Arbeitszeit, und je stärker die angewendete Maschine ist, d. h. je weniger Kraft zur Hebung einer gewissen Last nöthig ist, desto langsamer wird die gehobene Last sich bewegen. Ein durch ein Wasserrad bewegter Schleifstein, eine Drehbank 2c. ist dagegen ein Beispiel des umgekehrten Falles, wie große Geschwindigkeiten nur durch einen Ueberschuß an Kraft gewonnen werden können.

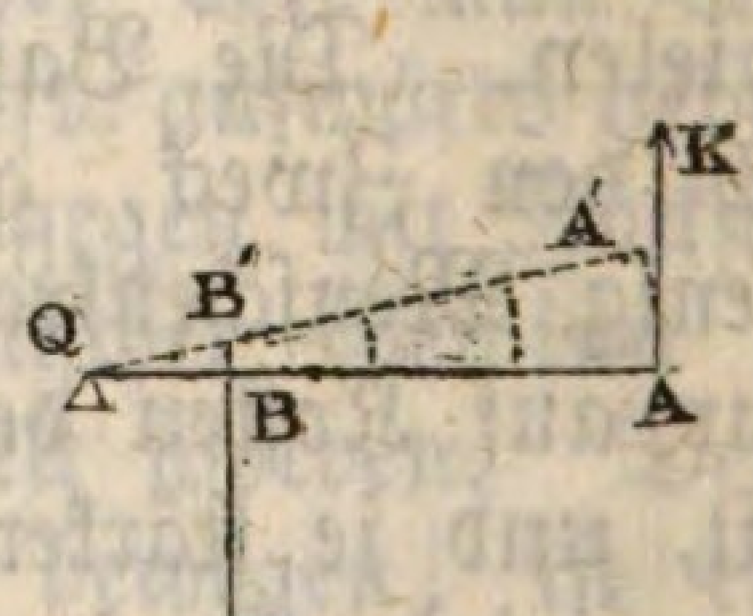
(Vergl. das Kapitel „Kraft und Arbeit".)

186. Daß das Gesetz: „Was an Kraft gewonnen wird, geht an Geschwindigkeit verloren," am Hebel stattfindet, ist leicht zu zeigen.

Ist z. B. der Kraftarm AQ des zweiarmigen Hebels AB 3mal größer als der Lastarm QB, so braucht die Kraft K, welche bei A wirkt, nur der dritte Theil der Last L zu sein, um dieser das Gleichgewicht zu halten. Soll jedoch die Last L an dem Lastarm QB um eine gewisse Größe BB′ z. B. 1 Zoll gehoben werden, so muß der Hebel die Lage A′QB′ einnehmen, also offenbar das Ende A des 3mal längern Kraftarms QA einen 3mal größeren Weg AA′ = 3 × BB′ oder 3 Zoll zurücklegen. Während also die Kraft bei A einen Weg von 3 Zoll zurücklegt, legt die 3mal größere Last einen Weg von nur 1 Zoll zurück. Die Geschwindigkeit der Last ist also 3mal kleiner als die der Kraft.



Dasselbe gilt von dem einarmigen Hebel. Ist der Kraftarm QA 4mal größer als der Lastarm QB, so braucht die Kraft bei A nur der vierte Theil der Last bei B zu sein, um dieser das Gleichgewicht zu halten. Soll aber die Last um eine gewisse Größe BB′ z. B. 1 Zoll gehoben werden, so muß der Hebel die Lage A′Q einnehmen, und das Ende A des 4mal längeren Kraftarms den Weg AA′ zurücklegen, welcher 4mal so groß ist als der Weg BB′, welchen die Last zurücklegt. Die Kraft muß also 4 Zoll zurücklegen, bis die Last 1 Zoll gehoben wird. Die Geschwindig-



keit der Last ist also 4mal kleiner als die der Kraft. Daher das Gesetz:

Es bewegt sich die Last genau ebenso so vielmal langsamer als die Kraft, als die Kraft selbst kleiner ist als die Last, der sie das Gleichgewicht hält.

Mit Hilfe dieses wichtigen Gesetzes, das, wie man sehen wird, auch bei allen andern Maschinen stattfindet, läßt sich auf eine höchst einfache Weise das Verhältniß von Kraft zu Last bei einer zusammengesetzten Maschine finden, deren innere Einrichtung gar nicht bekannt zu sein braucht. Z. B. Man beobachtet an einer Hebmaschine, daß ein aufgezogener Quader in der Minute 3′ hoch gehoben wird, während in derselben Zeit die Kurbel von 1,15′ Radius, an der die Kraft wirkt, 10 Umdrehungen macht. 10 Kreisumfänge von 1,15′ Radius oder 2,3′ Durchmesser sind $= 10 \times 3{,}14 \times 2{,}3' = 72$ Fuß. Da also in derselben Zeit, in welcher die Last 3′ zurücklegt, die Kraft einen Weg von 72′ beschreibt, so schließt man hieraus, daß die Geschwindigkeit der Last $\frac{3}{72}$ oder $\frac{1}{24}$ der Geschwindigkeit der Kraft ist, oder daß durch diese Hebmaschine mit 1 Ctr. Kraft an der Kurbel 24 Ctr. Last gehoben werden können.

In Wirklichkeit muß aber diese Kraft wegen der ebenfalls zu überwindenden Widerstände der Reibung und der Steifheit des Seiles etwas größer sein, wenn die Last gehoben werden soll.

Wenn an einem Flaschenzug 6 Fuß Seil angezogen werden müssen, bis die angehängte Last 1 Fuß steigt, so kann man hieraus bestimmt schließen, daß die Kraft den sechsten Theil der angehängten Last be-

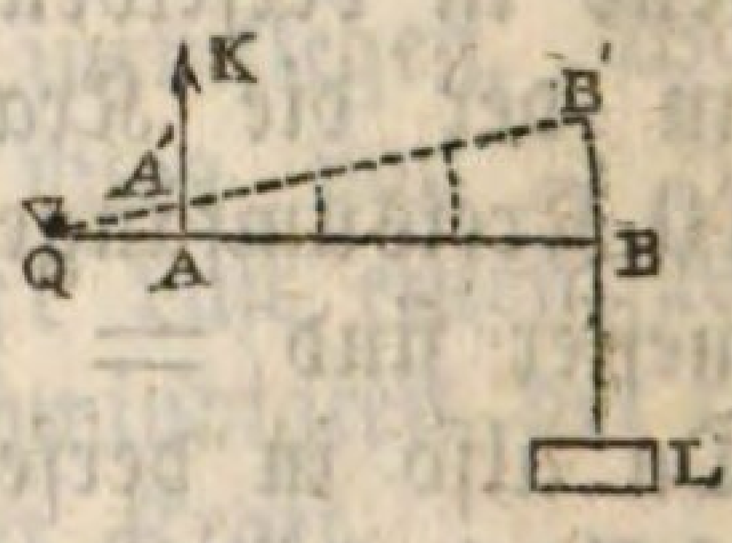
trägt, oder daß 6 Ctr. am Flaschenzug und 1 Ctr. am Zugseil sich das Gleichgewicht halten müssen.

Kehrt man den ausgesprochenen Satz um, so folgt daraus für alle Maschinen:

Was an Geschwindigkeit gewonnen wird, geht an Kraft verloren.

187. Wurfhebel. — Kommt es dagegen beim Hebel nicht darauf an, daß Kraft, sondern daß Geschwindigkeit gewonnen wird, so darf man nur Kraft und Last vertauschen, und dann muß der vorhin ausgesprochene Satz dahin umgekehrt werden:

Was an Kraft verloren geht, wird an Geschwindigkeit gewonnen.



Ist z. B. BAQ ein einarmiger Hebel, an dessen kürzerem Hebelarm AQ die Kraft K und an dessen längerem Hebelarm BQ die Last L angebracht ist, und ist BQ = 4 AQ, so muß, weil die Kraft am einfachen, die Last aber am Ende des 4fachen Hebelarmes wirkt, die Kraft K 4mal so groß sein als die Last L; legt aber die Kraft den Weg AA′ zurück, so beschreibt die Last am Ende des 4mal längeren Hebelarms den 4fachen Weg BB′, die Geschwindigkeit der Last ist also 4mal so groß als die der Kraft. Was also an Kraft verloren geht, wird an Geschwindigkeit gewonnen.

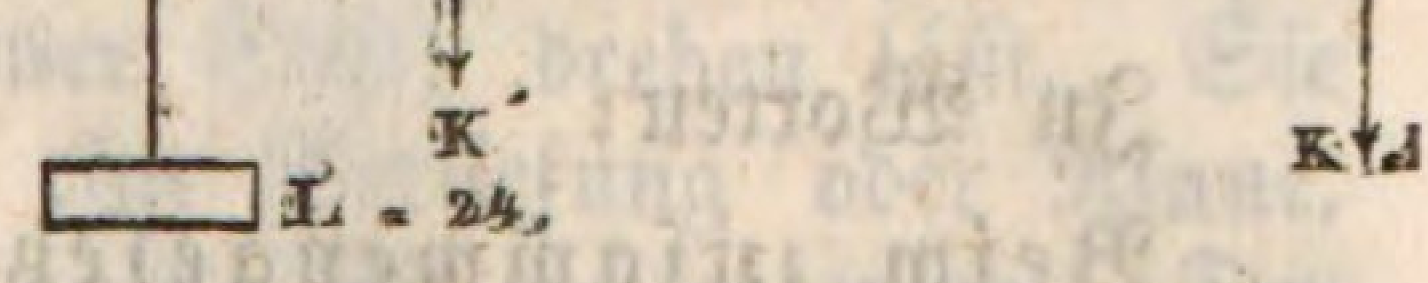
Dieser Hebel kann also nur dazu dienen, die Geschwindigkeit der Last zu vergrößern, wenn ein Ueberfluß von Kraft vorhanden ist.

Dieser Hebel, bei welchem die Kraft am kleineren

Hebelarm wirkt und also größer ist als die Last, heißt auch Wurfhebel. Anwendungen davon sind: die Schaufel, bei welcher, wenn mit derselben geworfen wird, der Drehpunkt in der abwärts drückenden rechten, die Kraft in der aufwärts ziehenden linken Hand, und die Last am Ende der Schaufel zu denken ist; die Sense, der Tritt der Spinnräder und Drehbänke, und der menschliche Arm. Bei letzterem ist der Drehpunkt im Schulterblatt am Ende des halbkugelförmigen Knochens, der nicht weit davon befestigte Muskel ist die aufwärts ziehende Kraft, ein Gewicht auf der Hand die abwärts ziehende Last. Die Entfernung des Angriffspunkts der Muskelkraft vom Drehpunkt ist beim Arm ohngefähr 33mal kleiner als die Länge des Arms. Liegt auf der Hand ein Gewicht von 1 Pfd., so hat der Muskel 33 Pfd. zu heben. Hier wird also an Kraft nichts gewonnen, dieselbe muß sogar 33mal größer sein als die Last auf der Hand; dagegen ist die Geschwindigkeit der letztern auch 33mal größer als die des Muskels.

188. Zusammengesetzter Hebel. — Wenn mehrere Hebel so verbunden werden, daß immer das Ende des Lastarms des einen Hebels auf das Ende des Kraftarms des andern wirkt, so hat man den zusammengesetzten Hebel.

Es seien AB, BC, CD 3 Hebel, welche auf diese Art verbunden sind, bei D hänge die Last L, bei A wirke die Kraft K,



und es seien beispielsweise die Kraftarme AQ = 4′, BR = 3′, CS = 2′; und die Lastarme QB = RC

$= SD = 1'$; welches ist die Bedingung des Gleichgewichts zwischen der Kraft K und der Last L?

Weil der Lastarm SD gleich der Hälfte des Kraftarms CS, so ist die Kraft K′ bei C, welche mit der Last L das Gleichgewicht hält, $K' = \frac{1}{2} L$. Weil ferner der Lastarm $RC = \frac{1}{3}$ vom Kraftarm BR, so ist die Kraft K″ bei B, welche mit K′ bei C das Gleichgewicht hält, $K'' = \frac{1}{3} K'$, oder, da $K' = \frac{1}{2} L$, so ist $K'' = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} L = \frac{1}{6} L$. Weil endlich der Lastarm $QB = \frac{1}{4}$ vom Kraftarm QA ist, so ist die Kraft K, weil bei A mit K″ bei B das Gleichgewicht hält, $K = \frac{1}{4} K''$, oder, da $K'' = \frac{1}{6} L$, so ist $K = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} L = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} L = \frac{1}{24} L$. Die Kraft K, welche bei A mit der Last L bei D das Gleichgewicht hält, ist also $= \frac{1}{24}$ L.

Dasselbe Resultat erhält man, wenn man den zusammengesetzten Hebel als einen *einzigen* Hebel betrachtet, dessen Kraftarm dem Produkt der Kraftarme und dessen Lastarm gleich dem Produkt der Lastarme aller einzelnen Hebel gleich ist.

Bezeichnet man die Kraft am einen Ende des zusammengesetzten Hebels mit K, die Last am andern mit L, die Kraftarme der einzelnen Hebel nach einander mit k′, k″, k‴ u. s. w., die Lastarme in derselben Ordnung mit l′, l″, l‴ u. s. w., so findet für das Gleichgewicht beim zusammengesetzten Hebel die Proportion Statt:

$$K : L = (l' \times l'' \times l''' \times \ldots) : (k' \times k'' \times k''' \times \ldots).$$

In Worten:

Beim zusammengesetzten Hebel verhält sich die Kraft zur Last, wie das Produkt aller Lastarme zum Produkt aller Kraftarme.

Hieraus wird die Kraft K gefunden:

$$K = \left(\frac{l' \times l'' \times l''' \times \ldots}{k' \times k'' \times k''' \times \ldots}\right) \times L.$$

In Worten:

Die Kraft beim zusammengesetzten Hebel wird gefunden, wenn man die Last mit dem Produkt aller Lastarme multiplizirt und mit dem Produkt aller Kraftarme dividirt.

Das vorige Beispiel hiernach berechnet gibt:

$$K : L = (1 \times 1 \times 1) : (4 \times 3 \times 2)$$
$$= 1 : 24$$

also $K = \frac{1}{24}$ L.

Der zusammengesetzte Hebel kommt vor: Beim Räderwerk, bei Buchdruckerpressen, Brücken- und Mauthwagen u. s. w.

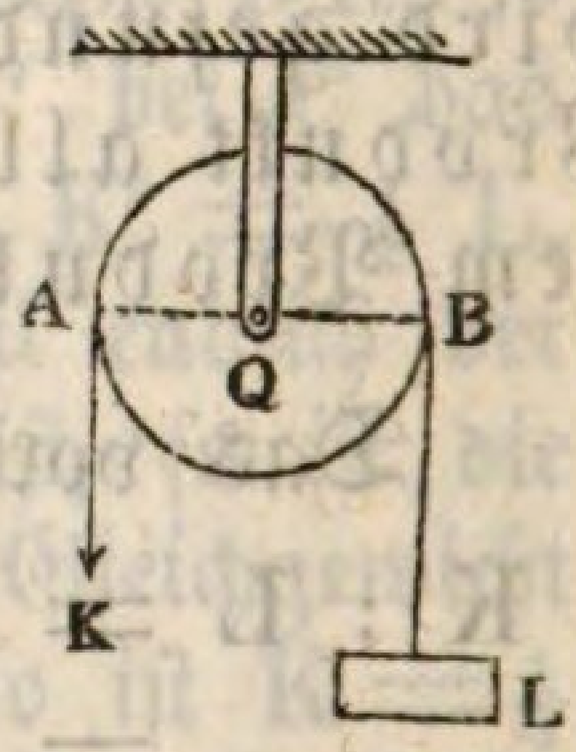
D. Von der Rolle und dem Flaschenzug. — Vom Rad an der Welle und dem Räderwerk.

189. Eine Rolle ist eine kreisrunde Scheibe aus fester Masse (Holz, Metall), die sich um ihre Achse (ein runder eiserner Stift) drehen läßt. Sie hat an ihrem Umfang eine Vertiefung oder Rinne, in welche eine Schnur oder Seil gelegt wird. Der Stift (Ruhenagel) steckt in einer schmalen klammer-

artigen Umgebung, der Kloben genannt, innerhalb welchem sich die Rolle bewegt.

Man unterscheidet die feste und die bewegliche Rolle.

190. Feste Rolle. Hängt bei der festen Rolle an dem einen Seilende eine Last L und zieht an dem andern Ende eine Kraft K, so muß für den Zustand des Gleichgewichts das Moment der Last L $\times$ QB gleich sein dem Moment der Kraft K $\times$ QA; da aber QB $=$ QA, so muß auch K $=$ L sein; d. h.:



Bei der festen Rolle sind Kraft und Last gleich.

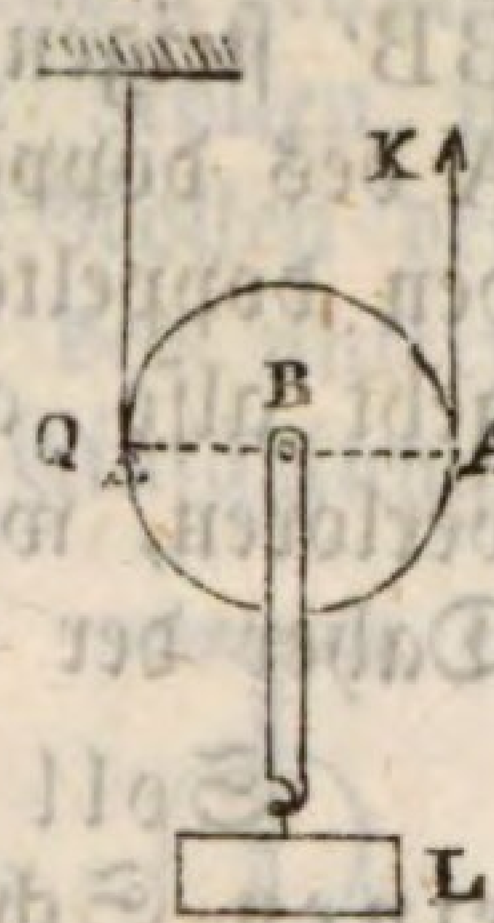
Man gewinnt also bei der festen Rolle nichts an Kraft. Sie verhält sich demnach wie ein gleicharmiger Hebel oder eine Wage. Wendet man diese Rolle zum Emporziehen einer Last an, so muß die Kraft wegen der Reibung und der Steifigkeit des Seiles etwas größer genommen werden. Obgleich die feste Rolle keinen Kraftgewinn leistet, so wird sie doch sehr oft in Fällen gebraucht, wo man einen Ueberschuß von Kraft hat, oder wo man der Zugkraft eine bequeme Richtung verschaffen will.

An Geschwindigkeit wird bei der festen Rolle ebenfalls Nichts gewonnen. Soll die Last einen Fuß steigen, so muß die Kraft auf der andern Seite einen Fuß Seil anziehen.

Das Gesetz: „Was an Kraft gewonnen wird, geht an Geschwindigkeit verloren," gilt also auch hier. Denn da bei der festen Rolle an Kraft Nichts

gewonnen wird, so geht auch an Geschwindigkeit Nichts verloren.

191. Bewegliche Rolle. Bei der beweglichen Rolle ist die Last an der Rolle befestigt, welche mit ihrer Rinne in dem Seile hängt und mit diesem sammt dem Kloben in die Höhe gezogen wird. Das Seil ist an einem Balken oder an irgend einem Gestelltheil befestigt und unter der Rolle weggeführt; an dem andern Seilende zieht die Kraft aufwärts.



Denkt man sich die Kraft K in Wirksamkeit gesetzt, so sieht man, daß diese Rolle wie ein einarmiger Hebel wirkt, der seinen Unterstützungspunkt in Q hat, daß bei B, in der einfachen Entfernung vom Unterstützungspunkte Q, die Last L herabhängt, und in A, der doppelten Entfernung von Q, die Kraft aufwärts wirkt.

Bei der beweglichen Rolle verhält sich also die Kraft zur Last wie bei einem einarmigen Hebel, dessen Lastarm = 1 und dessen Kraftarm = 2 ist, folglich

$$K : L = QB : QA = 1 : 2$$

Hieraus folgt:

$$K = \tfrac{1}{2} L \quad \text{d. h.:}$$

Bei der beweglichen Rolle ist die Kraft gleich der halben Last.



Soll z. B. durch eine bewegliche Rolle eine Last von 100 Pfd. gehoben werden, so muß die aufwärts ziehende Kraft 50 Pfd. betragen.

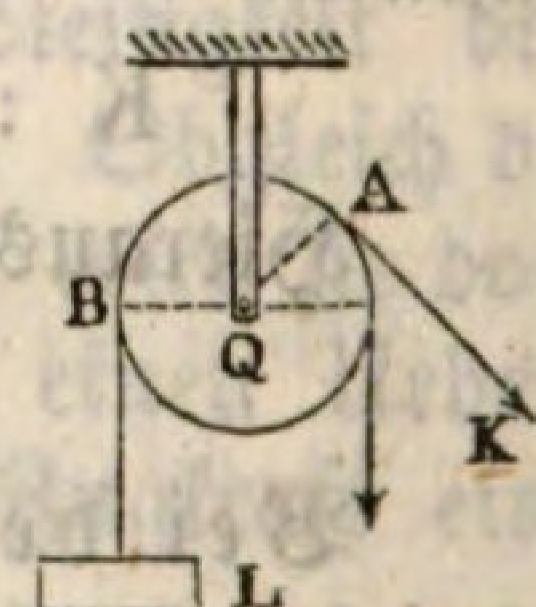
Gewöhnlich schlägt man das Seil, woran die Kraft wirkt, noch-

mals um eine feste Rolle N, um die aufwärts gehende Richtung der Kraft in die bequemere abwärts gehende zu verwandeln, wodurch aber (nach 190) an der Wirksamkeit der beweglichen Rolle nichts geändert wird.



192. Soll bei der beweglichen Rolle die Last L am Ende des einfachen Hebelarmes QB um eine gewisse Größe BB′ steigen, so muß die Kraft am Ende A des doppelten Hebelarms QA offenbar den doppelten Weg AA′ zurücklegen. Es geht also auch hier an Geschwindigkeit verloren, was an Kraft gewonnen wird. Daher der Satz:

Soll bei der beweglichen Rolle die Last einen Schuh steigen, so muß die Kraft zwei Schuh Seil anziehen.



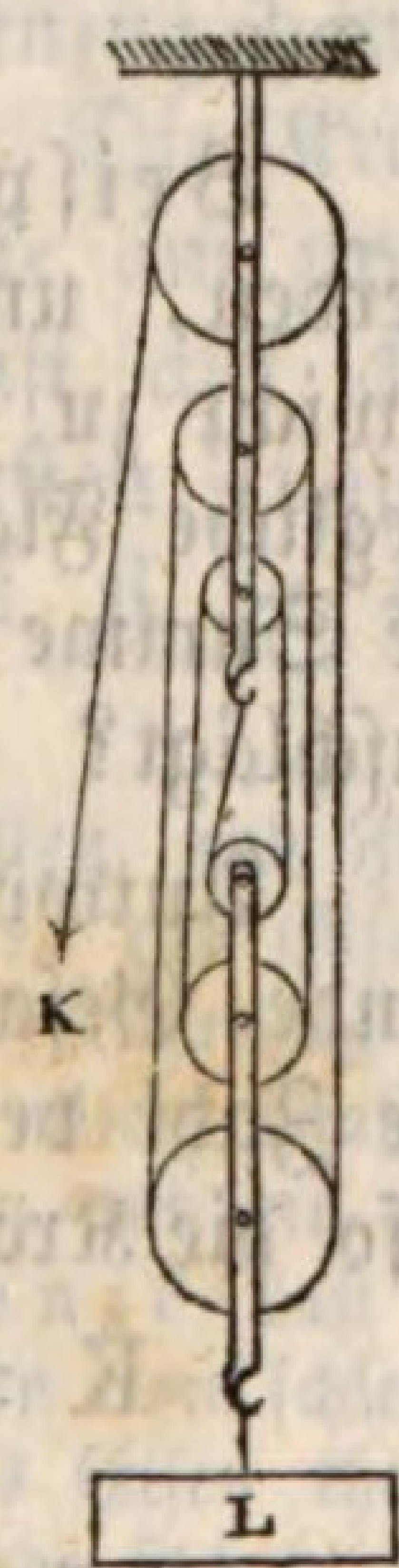
193. Bei der festen Rolle ist die Richtung der Kraft ganz gleichgiltig, weil die Hebelarme von Kraft und Last QA und QB als Radien der Rolle immer gleich bleiben; bei der beweglichen Rolle aber muß die Richtung AK der Kraft parallel sein mit der Richtung der Last L; denn zieht die Kraft nach einer andern Richtung, z. B. nach A′K′, und fällt man vom Drehpunkt Q die Senkrechte QA′ auf die Richtung der Kraft A′K′ und zieht man die Sehne QT zum Berührungspunkt T, so sieht man, daß die Senkrechte QA′, der Hebelarm für die Kraft K′, kleiner ist als die schiefe



Sehne QT, und diese wieder kleiner als der Durchmesser QA oder der Hebelarm der Kraft K. Der Hebelarm QB der Last bleibt dabei einer und derselbe.

Beim schiefen Zug an der beweglichen Rolle geht also an Kraft verloren.

194. Flaschenzug. — Der Flaschenzug besteht aus zwei Kloben (Flaschen), in denen sich Rollen, über oder neben einander, in gleicher Anzahl befinden. Der obere Kloben mit seinen Rollen ist befestigt, am andern hängt die Last. Die Rollen des oberen Klobens sind also feste Rollen, die des untern bewegliche Rollen. Den Gang des Seils (Einfädlung) ersieht man aus der Figur. Die an dem untern oder beweglichen Kloben angebrachte Last wirkt auf alle beweglichen Rollen und wird in gleiche Theile unter dieselben vertheilt. Gewöhnlich haben beide Kloben 2 oder 3 Rollen. Hat der untere Kloben 2 Rollen, so trifft jede die Hälfte der Last, hat er 3 Rollen, so trifft jede $\frac{1}{3}$ der Last. Da aber bei jeder beweglichen Rolle die Kraft nur die Hälfte der Last zu sein braucht, um dieser das Gleichgewicht zu halten, so braucht die Kraft K, welche der Last an einer Rolle das Gleichgewicht zu halten hat, im ersten Fall bei 2 Rollen, nur $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{4}$, im zweiten Fall bei 3 Rollen nur $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{6}$ der Last L zu sein.



Oder: Die Last hängt immer in doppelt so viel Seilen, als der untere Kloben Rollen hat, also bei 2 Rollen in 4, bei 3 Rollen in 6 Seilen. Da aber

alle Seile gleich gespannt sein müssen, so trifft auf ein Seil im ersten Fall $\frac{1}{4}$, im zweiten Fall $\frac{1}{6}$ der angehängten Last L. Die Kraft K, welche am Zugseil wirkt, hat also nur den Theil der Last zu überwinden, welcher auf 1 Seil trifft, das ist im ersten Fall $\frac{1}{4}$, im zweiten Fall $\frac{1}{6}$ der Last.

Die Kraft am Flaschenzug wird also erhalten, wenn man die Last mit der doppelten Anzahl der unteren Rollen, oder mit der Anzahl der Seile, in welchen die Last hängt, dividirt.

Anmerkung. Die Widerstände bei dem Flaschenzuge sind Reibung am Zapfen, Reibung des Seils in den Rinnen der Rollen, und der Widerstand des Seils gegen das Biegen um die Rollen.

Beispiel. Wie groß muß die Kraft genommen werden, um einer Last von 12 Ctr. das Gleichgewicht zu halten, bei einem Flaschenzuge, dessen bewegliche Flasche aus drei Rollen besteht, wenn man die Summe der genannten Widerstände zu $\frac{1}{3}$ der Last anschlägt?

Antwort: $\frac{1}{3}$ von der Last ist 4 Ctr., die zu hebende Gesammtlast ist also $12 + 4 = 16$ Ctr.; die Zahl der Seile, in welchen die Last hängt, ist 6; also die Kraft, welche der Last das Gleichgewicht hält:

$$K = \frac{1}{6} L = \frac{16}{6} \text{ Ctr.} = 2\frac{2}{3} \text{ Ctr.}$$

195. Auch beim Flaschenzug geht an Geschwindigkeit verloren, was an Kraft gewonnen wird.

Soll die Last beim Flaschenzug 1 Schuh steigen, so muß die Kraft am Zugseil so viel Schuh Seil anziehen, als die Anzahl der Seile beträgt, in welchen die Last hängt.

Hat, wie im vorigen Beispiel, die untere Flasche 3 Rollen, so ist die Zahl der Seile, in welchen die Last hängt, 6; die Kraft muß also 6 Schuh Seil anziehen, bis die Last 1 Schuh steigt.

Beispiel: Es soll eine Last von 50 Ctr. durch 2 Flaschenzüge, deren einer in der untern Flasche 2, der andere 3 Rollen hat, auf ein 40′ hohes Gebäude aufgezogen werden, wie groß muß die Kraft an jedem Zugseil sein, und wie viel Schuh Seil muß an jedem Flaschenzug angezogen werden, um die Last auf die angegebene Höhe zu bringen?

Antwort: Die Last vertheilt sich auf beide Flaschenzüge zu gleichen Theilen. Jeder derselben hat also 25 Ctr. zu tragen. Am ersten Flaschenzug hängt die Last in 4, am zweiten in 6 Seilen. Die Kraft am ersten muß also $= \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$ Ctr., die am zweiten $= \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$ Ctr. sein. Um die Last auf 40′ Höhe zu heben, müssen daher auch am ersten Zugseil $4 \times 40 = 160'$, am zweiten Zugseil $6 \times 40 = 240'$ Seil angezogen werden.

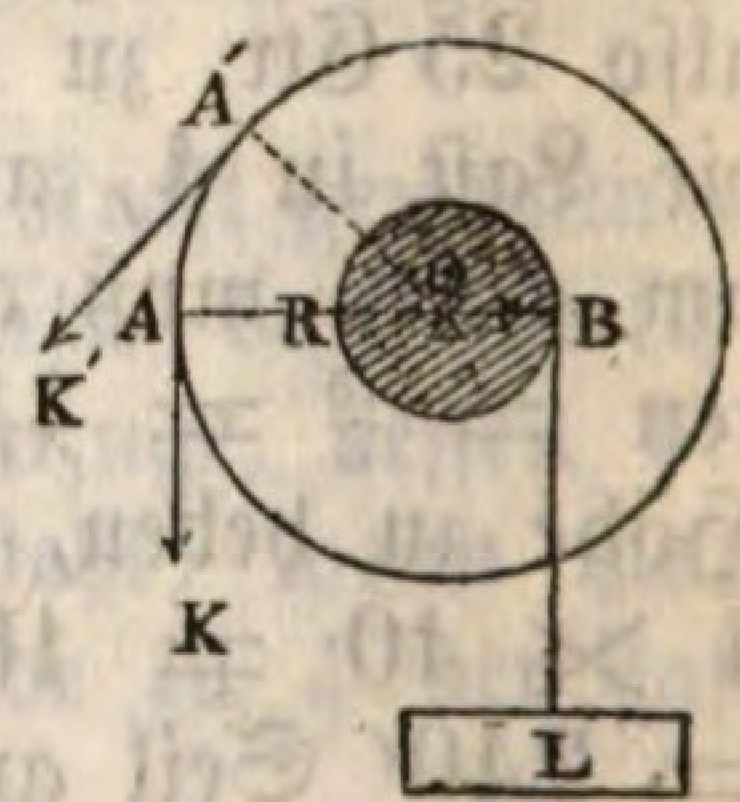
Bemerkung. Der schwächste Theil an Rollen und Flaschenzügen ist gewöhnlich nicht das Seilwerk, sondern das Eisenwerk. In den meisten Fällen hängt die Last am Flaschenzug in einem Hacken, welcher mit einer Schraube an die untere Flasche befestigt, und in dieser drehbar ist. Dieser Hacken und die wenigen Gewinde dieser Schraube haben aber die ganze Last zu tragen. Gar oft sind diese Hacken unrichtig gebogen von schlechtem Eisen, die Schraubenmutter ist zu schwach, das Eisen theilweise abgerostet, oder die wenigen Schraubengewinde schlecht geschnitten. Alsdann ist die größte Gefahr vorhanden, und durch Nichtbeachtung dieser scheinbar unbedeutenden Dinge sind häufig große Unglücksfälle entstanden, daher auf diesen Umstand aufmerksam gemacht wird. (Vergl. das Kapitel über die Schraube.)

196. Rad an der Welle. — Ein massiver Cylinder, der an den Enden seiner Achse cylindrische

Zapfen hat, womit er sich, in Löchern (Lagern oder Pfannen) um seine Achse drehen kann, wird Welle oder Wellbaum genannt. Ist mit ihm irgend ein Rad oder eine Scheibe oder auch nur ein Stock, welche beim Umdrehen einen Kreis beschreiben, oder eine Kurbel, verbunden, so hat man das Rad an der Welle.

Auf dem Umfang der Welle wickelt sich ein Seil auf, an welchem die Last hängt; an dem Umfang des Rades, der Scheibe, oder an der Kurbel wirkt die Kraft.

Das Rad an der Welle ist ein zweiarmiger Hebel, dessen längerer Hebelarm der Radius QA des Rades, und dessen kürzerer Hebelarm des Radius QB der Welle ist. Am Ende A des längeren Hebelarms (Kraftarms) QA wirkt die Kraft K, am Ende B des kürzern Hebelarms (Lastarms) QB wirkt die Last L. Soll zwischen Kraft und Last Gleichgewicht sein, so muß das Moment der Kraft $K \times QA$ gleich sein dem Moment der Last $L \times QB$. Bezeichnet man den Radius QA des Rades mit R, den der Welle QB mit r, so muß für den Zustand des Gleichgewichts



$$K \times R = L \times r$$

sein. Hieraus folgt die Proportion:

$$K : L = r : R$$ d. h.

Beim Rad an der Welle verhält sich die Kraft zur Last, wie der Radius der Welle zum Radius des Rades.

Wirkt die Kraft am Umfang des Rades nicht parallel zur Last, sondern nach einer andern Richtung, z. B. A′K′, so ist der Hebelarm der Kraft = QA′, also wieder dem Radius des Rades gleich, folglich wird das Verhältniß von Kraft zu Last durch Veränderung der Richtung der Kraft nicht geändert. Beim Rad an der Welle kann also die Kraft an einem beliebigen Punkt des Radumfangs wirken.

Beispiel. Welche Kraft muß am Umfang eines Rades von 10′ Durchmesser wirken, an dessen Wellbaum von 1′ Durchmesser eine Last von 1 Ctr. gehoben werden soll?

Antwort: Hier ist L = 10 Ctr., R = 5′, r = 0′,5 und K gesucht; daher

$$K : 10 = 0{,}5 : 5 \quad \text{woraus}$$

$$K = \frac{10 \times 0{,}5}{5} = 1 \text{ Ctr.}$$

197. Wenn beim Rad an der Welle die Kraft eine ganze Umdrehung des Rades bewirkt, also den Umfang des Rades zurücklegt, so wird die Last nur auf eine Höhe gleich dem Umfang der Welle gehoben. Da aber die Umfänge zweier Kreise sich verhalten, wie ihre Durchmesser oder wie ihre Radien, so wird auch, wenn die Kraft einen Weg gleich dem Halbmesser QA des Rades zurücklegt, die Last nur um die Größe des Halbmessers QB der Welle gehoben. Daher der Satz:

Die Geschwindigkeit der Last beim Rad an der Welle ist so viel mal kleiner als die der Kraft, als der Halbmesser der Welle in dem des Rades enthalten ist.

Im vorigen Beispiel war der Halbmesser des Rades 5′, jener der Welle 0,5′; der Halbmesser der Welle ist also $\frac{5}{0,5} = \frac{50}{5} =$ 10mal kleiner als der des Rades. Soll also die Last 1′ steigen, so muß die Kraft am Umfang des Rades 10′ zurücklegen.

Es geht also auch beim Rad an der Welle an Geschwindigkeit verloren, was an Kraft gewonnen wird.

Wirkt aber umgekehrt die Kraft am Umfang der Welle, so bewegt sich der Umfang des Rades so viel mal schneller als die Kraft, als der Radius der Welle in dem des Rades enthalten ist.

Ist z. B. der Kurbel-Halbmesser des Schwungrades einer Drehbank 1,5′, der Halbmesser des Rades 4,5′, so ist die Geschwindigkeit des Radumfangs $\frac{4,5}{1,5} = \frac{45}{15} =$ 3mal größer als die der Kurbel.

Was aber hier an Geschwindigkeit gewonnen wird, geht an Kraft verloren. Läßt man also, um eine größere Geschwindigkeit zu erzeugen, die Kraft am Umfang der Welle wirken, so muß ein Ueberfluß von Kraft vorhanden sein. Eine Anwendung hievon findet bei dem Gewicht statt, welches eine Uhr treibt.

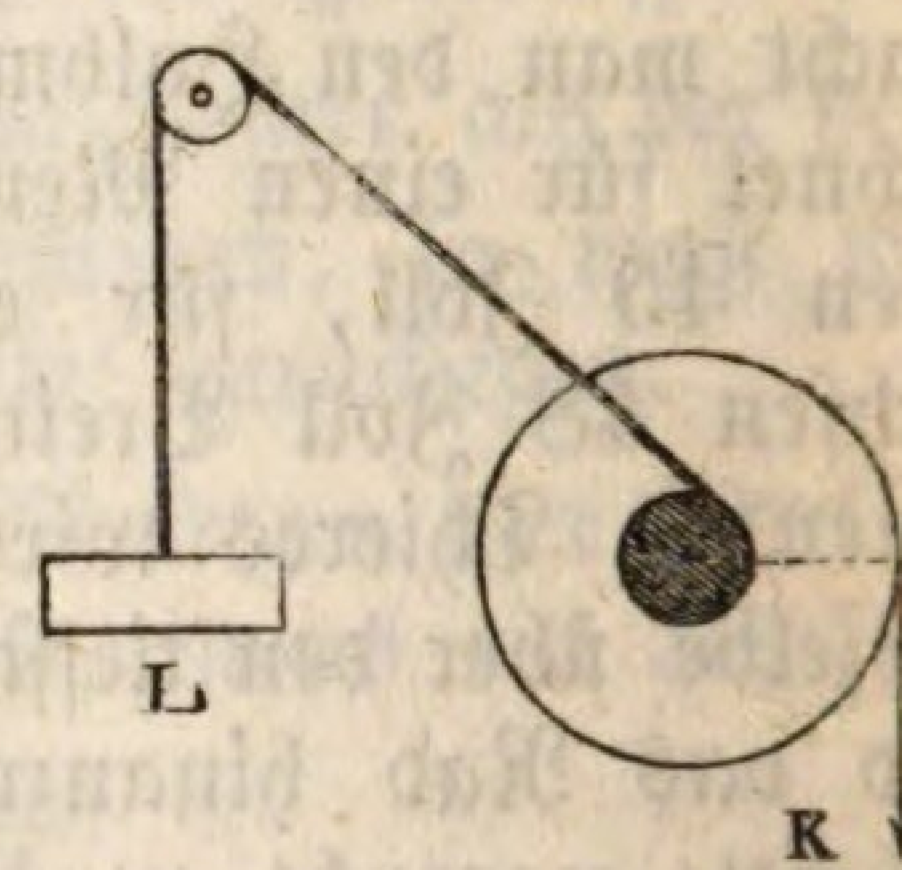
Die hauptsächlichsten Anwendungen des Rades an der Welle sind: das Laufrad, der Krahn, das Tretrad, der Haspel, die Erdwinde, die Fuhrmannswinde, das Räderwerk.

198. Das Laufrad. — Das Laufrad ist ein an einer horizontalen Welle befestigtes hölzernes Rad mit zwei Kränzen, welche am äußern Umfange einen Boden haben, an dessen innerer Seite Leisten aufgenagelt sind. Wird es von einem Menschen be-

wegt, so soll es einen Halbmesser von 8′ haben; wird es aber von Thieren in Bewegung gesetzt, so macht man den Halbmesser 12 und mehr Fuß. Man rechnet für einen Menschen 20 Zoll, für zwei Menschen 45 Zoll, für ein Pferd 36 Zoll, für einen Ochsen 48 Zoll Breite. Das Gewicht des im Rade tretenden Thieres wird um so mehr wirken, je mehr dasselbe über den tiefsten Punkt des Rades heraustritt und das Rad hinanzusteigen strebt, oder je größere Schritte gemacht werden. Weil aber weite Schritte immer langsamer gemacht werden, als kürzere, so muß man daher diejenige Schrittweite auszumitteln suchen, bei welcher die Wirkung am größten ist. Als solche findet man für Menschen $11\frac{1}{2}$ Grad, für Ochsen und Pferde $7\frac{1}{2}$ Grad; es treffen demnach auf ein für einen Menschen bestimmtes Laufrad im Innern 31 Leisten, für Thiere 48 in den Kreisumfang. Für ein 16schuhiges, für Menschen eingerichtetes Laufrad beträgt dann die Stufenweite $\frac{16 \times 3,14}{31} = 1,6$ Schuh; für ein Thier $= \frac{16 \times 3,14}{48} = 1,0$ Schuh. Für ein Laufrad, welches von Thieren bewegt werden soll, und daher 24′ im Durchmesser erhält, werden die Leisten am Umfang $\frac{24 \times 3,14}{48} = \frac{75}{48} = 1,5$ Fuß Entfernung erhalten müssen. Bei dem Laufrad kann nur $\frac{1}{2}$ des Gewichtes eines Mannes, sohin 60 Pfund und nur $\frac{1}{5}$ des Gewichts eines Thieres als an dem Ende des horizontalen Radhalbmessers oder am Umfang des Laufrades senkrecht abwärts wirkend angenommen werden.

199. Der Krahn. — Das Laufrad wird hauptsächlich als Krahn angewendet. Der gewöhnliche (hölzerne) Krahn, wie er zum Aufziehen der Lasten aus Schiffen benützt wird, besteht aus einem

Laufrad, welches durch Menschen getreten wird und aus einer festen Rolle, welche an einem über das Ufer hinausreichenden schief aufwärts gerichteten Balken befestigt ist. Das Seil, woran die Last hängt, wird um die Rolle geschlagen, und auf der Welle des Laufrades aufgewickelt.



Beim Krahn verhält sich die Kraft K zur Last L, wie der Halbmesser r der Welle zum Halbmesser R des Laufrades.

Oder: $K : L = r : R$.

Beispiel. Welche Last können zwei im Laufrad eines Krahns gehende Männer aufziehen, wenn der Halbmesser der Welle 7″, jener des Laufrades 7′ 6″ = 90″ ist?

Antwort: Rechnet man das am Umfang des Rades wirkende Gewicht eines Mannes zu 60 Pfd., so ist $K = 2 \times 60 = 120$ Pfd.; da ferner

$R = 90''$; $r = 7''$ und

$K : L = r : R$, so ist

$120 : L = 7 : 90$, woraus

$$L = \frac{120 \times 90}{7} = \frac{10800}{7} = 1543 \text{ Pfd.}$$

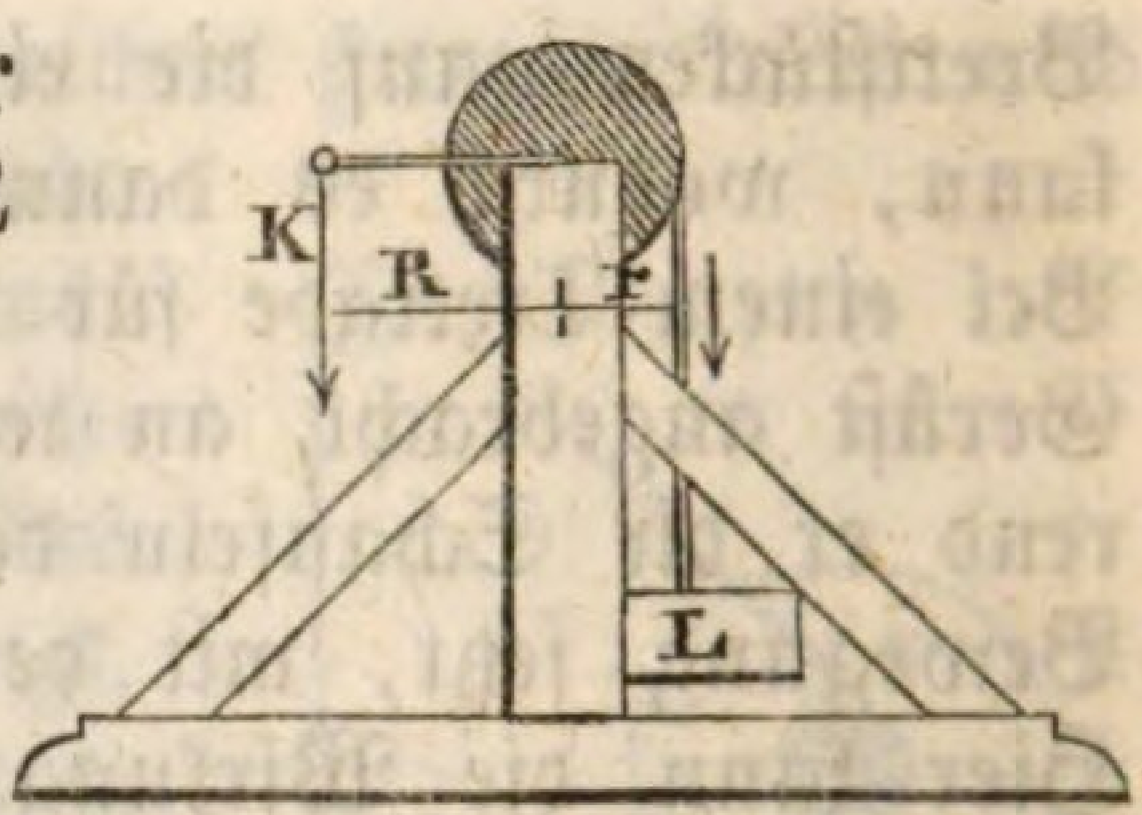
Wegen der Reibung des Rades und der Rolle und der Steifheit des Seils ist hievon ohngefähr $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{4}$ abzurechnen, so daß die gehobene Last in Wirklichkeit nur 1029 bis 1157 Pfund beträgt.

200. Das Tretrad. — Ein Tretrad besteht aus zwei Kränzen und dazwischen angebrachten

Brettstücken, auf die ein Mensch oder Thier treten kann, wodurch es dann zum Drehen gebracht wird. Bei einem Tretrade für Menschen wird seitwärts ein Gerüst angebracht, an welchem sich der Arbeiter, während er die Schaufeln des Rades mit den Füßen in Bewegung setzt, mit den Händen fest halten kann. Hier kann die Wirkung eines Mannes zu $\frac{7}{8}$ seines Gewichtes in senkrechter Richtung auf das Ende des Radhalbmessers angesetzt werden. Das Thier kann auf ein solches Rad nur mit den Vorder- oder Hinterfüßen wirken; deßhalb wird über dem Rade ein Gerüst angebracht, an welchem sich eine Oeffnung befindet, durch welche das Thier mit zwei Füßen auf das Rad gelangen kann, während es mit den zwei andern einen festen Stand hat. Man kann bei dieser Einrichtung kaum die Hälfte vom Gewichte des Thiers als wirksam annehmen.

201. Der Haspel. — Der Haspel hat eine horizontale Welle, um welche das Seil geschlungen wird, woran die Last hängt. Diese Welle dreht sich um 2 eiserne Zapfen, welche in eisernen Lagern liegen, und wird entweder mit 2 Kurbeln oder mit 2 über Kreuz durch die Welle geschobenen Hebeln umgedreht. Im ersten Fall hat man den Hornhaspel, im zweiten den Kreuzhaspel. Beide beruhen auf dem Rad an der Welle, und haben die gleiche Einrichtung, nur ist beim Kreuzhaspel die Kurbel durch den längeren Hebel ersetzt, weßhalb bei demselben Durchmesser der Welle mit dem Kreuzhaspel eine größere Wirkung erzielt werden kann, wogegen die Handhabung des Hornhaspels wegen der Kurbel bequemer ist.

Beim Hornhaspel verhält sich die an der Kurbel wirkende Kraft K zu der am Seil hängenden



Last L, wie der Radius r der Welle zum Radius R der Kurbel.

Es verhält sich also

$$K : L = r : R.$$

Beispiel. Es soll mit einem Hornhaspel, dessen Kurbel 18″ dd. Länge und dessen Welle 9″ dd. Durchmesser hat, ein Stein von 5 c′ oder 5 Ctr. Gewicht auf ein Gerüst gezogen werden, wie stark muß die Kraft an der Kurbel sein?

Antwort: Hier ist K gesucht, L = 500 Pfd., $r = \frac{9}{2} = 4,5$ und R = 18; daher

$$K : 500 = 4,5 : 18 \quad \text{woraus}$$

$$K = \frac{500 \times 4,5}{18} = 125 \text{ Pfund.}$$

Es müssen sohin an jeder der beiden Kurbeln $62\frac{1}{2}$ Pfd., mit Rücksicht auf die Reibung und Steifigkeit des Seils noch um $\frac{1}{4}$ mehr, also 78 Pfd. wirken, an jeder Kurbel folglich mindestens 2 Mann arbeiten, um den Stein zu heben.

Die Welle des Haspels darf nur $2\frac{1}{2}$′—3′ vom Boden entfernt und die Kurbel höchstens 18″ dd. lang sein, weil sonst der Umfang des Kreises, welchen die Kurbel beschreibt, zu groß wird, und der Arbeiter nicht mehr mit der gehörigen Kraft die Kurbel in ihrem tiefsten und höchsten Stand bewegen kann. Gewöhnlich hat die Kurbel 18″ dd., die Welle 9″ dd. Durchmesser. Hieraus ergibt sich

$$K : L = 4,5 : 18 = 1 : 4$$

d. h. die Kraft muß $\frac{1}{4}$ der Last sein. Da nun ein Mann auf die Dauer an der Kurbel nur 25 Pfund Kraft äußert, so kann ein Mann mit dem gewöhnlichen Hornhaspel 4 × 25 oder 100 Pfund Last heben.

Die beiden Kurbeln am Haspel sollen einen stumpfen Winkel von 172° zu einander bilden, damit der Punkt der schwächsten

Leistung an der einen Kurbel mit dem der stärksten an der andern Kurbel zusammentrifft. Zur Verhütung der plötzlichen Rückwirkung der Last ist an der Welle ein Sperrrad angebracht, in welches ein am Gestell befestigter Sperrhacken einfällt.

Sollen größere Lasten mit dem Haspel gehoben werden, so verbindet man denselben mit dem Flaschenzug, dessen Zugseil um die Welle des Haspels geschlagen und mit der verstärkten Kraft des letztern angezogen wird. Man erhält die Leistung beider Maschinen zusammen, wenn man das Verhältniß von Kraft zu Last der beiden einzelnen Maschinen mit einander multiplizirt.

Beispiel. Das Zugseil eines Flaschenzugs mit 2 Flaschen zu je 3 Rollen ist um die 9 Zoll dd. starke Welle eines Haspels gewickelt, dessen Kurbel 18 Zoll dd. Radius hat; wie viel Pfund Last wird man mit 1 Pfund Kraft an der Kurbel ziehen können?

Antwort: Am Flaschenzug verhält sich, da die Last in 6 Seilen hängt (Nr. 194)

$K : L = 1 : 6$ oder es ist

$K = \frac{1}{6} L$

und an dem Haspel ist

$K : L = 4{,}5 : 18 = 1 : 4$ oder

$K = \frac{1}{4} L$

folglich ist bei der Vereinigung beider Maschinen

$K : L = 1 \times 1 : 6 \times 4$ oder es ist

$K = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} L = \frac{1}{24} L$

d. h. mit einem Pfund an der Kurbel können (Reibung ungerechnet) 24 Pfund am Flaschenzug gehoben werden. —

Beim Kreuzhaspel gelten ganz dieselben Regeln, nur ist statt des Radius der Kurbel die Länge des Hebelarms vom Mittelpunkt der Welle aus in Rechnung zu nehmen.

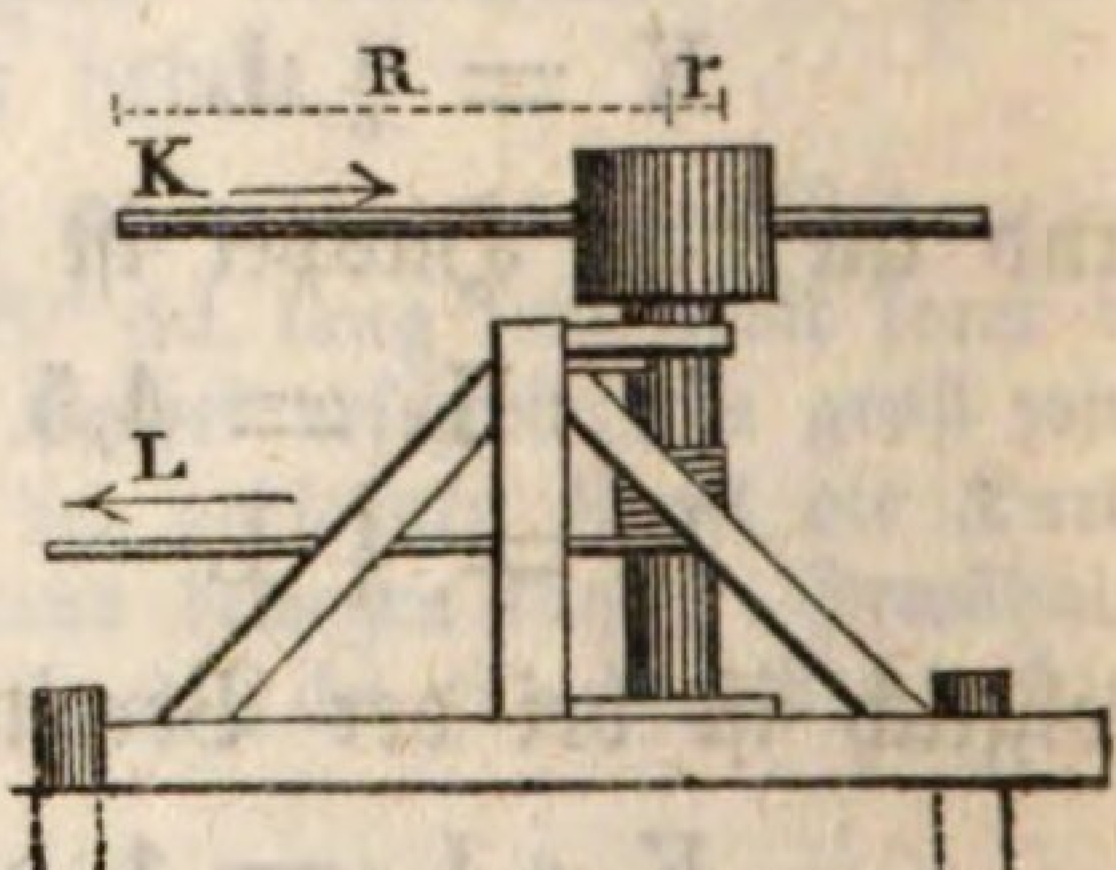
Beispiel. Bei einem Kreuzhaspel sei die Welle 9″ dd. stark, der Hebel (vom Mittelpunkt der Welle an) 3′ lang, wie verhält sich Kraft zu Last?

Antwort:

$$K : L = r : R$$
$$= 4{,}5 : 3 \times 12 = 4{,}5 : 36$$
$$= 1 : 8$$

d. h. die Kraft ist $\frac{1}{8}$ der angehängten Last. —

202. Die Erdwinde. — Die Erdwinde besteht aus einer starken vertikalen Welle, um welche sich das Seil schlingt, mit einem starken Kopf, durch welchen die Hebel gesteckt werden, an deren äußerstem Ende die Kraft wirkt. Die Welle läuft oben in einem eisernen Band, unten geht der hölzerne Zapfen in einer mit einem Loch versehenen Diele. Die Welle ist häufig in der Mitte dünner als am Rande, damit das Seil sich gegen die Mitte zu aufwickelt. Das Gestell der Erdwinde wird am Boden durch 4 starke eingeschlagene Pfähle befestigt.



Bei der Erdwinde verhält sich die Kraft K am Ende des Hebels zur Last L am Seil, wie der Radius r der Welle, wo sich das Seil aufwickelt, zum Radius R des Hebels, woran die Kraft wirkt (d. i.

zur Länge des Hebels vom Mittelpunkt des Kopfes an gerechnet). Es ist also

$$K : L = r : R$$

Da nun gewöhnlich die Welle 10″ dd. Durchmesser, der Hebel aber 4—5′ lang ist, so ist das Verhältniß der Kraft zur Last, bei R = 5′

$$K : L = 5'' : 5' = 5'' : 60''$$
$$= 1 : 12$$

d. h. die Kraft muß $\frac{1}{12}$ der Last sein, oder die Last ist das 12fache der Kraft. Ein Mann, welcher mit 25 Pfd. Kraft am Ende des 5′ langen Hebels umtreibt, zieht daher das auf die Welle sich wickelnde Zugseil mit einer Kraft von 12 × 25 = 300 Pfd. an. Man sieht daher, daß mit der Erdwinde sich eine sehr bedeutende Wirkung ausüben läßt. Doch geht auch bei dieser Maschine ohngefähr $\frac{1}{4}$ des Effekts durch Reibung und Steifigkeit des Seils verloren.

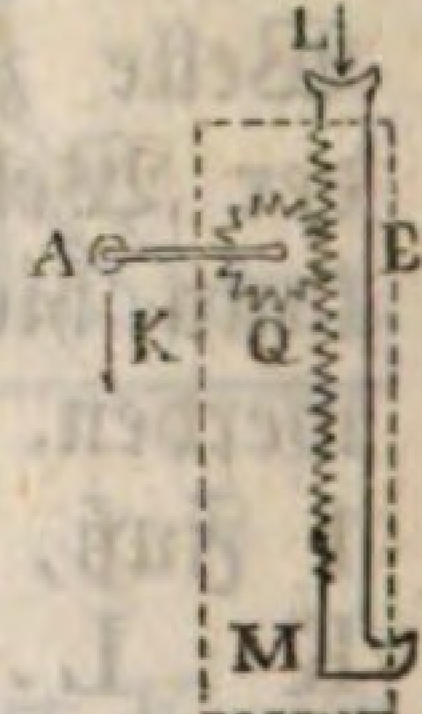
Eine Anwendung der Erdwinde ist auch der sogenannte Aufzug (stehender Haspel, Tummelbaum), wie man ihn auf Dachböden zum Aufziehen des Getreides, Holzes ꝛc. angewendet sieht. Auch an ihm verhält sich die Kraft zur Last, wie der Radius der Welle zur Länge des Hebelarms (vom Mittelpunkt der Welle an gerechnet). Die Kraft eines Mannes kann hier gleichfalls nur zu 25 Pfund angeschlagen werden. Ist der Durchmesser der stehenden Welle 1 Fuß, der Hebel 6′ lang, so verhält sich auch hier K : L = 0,5 : 6 = 1 : 12, d. h. es ist die Kraft = $\frac{1}{12}$ der Last. Ein Mann wird daher mit 25 Pfd. Kraftanwendung 12 × 25 oder 300 Pfd. aufzuziehen im Stande sein.

Eine weitere Anwendung des stehenden Rades an der Welle ist der Pferdegöpel, welcher bei größeren Kraftäußerungen und beim Betrieb von Maschinen zur Anwendung kommt. Er besteht aus einer vertikalen Welle und aus einem damit verbundenen 10—12′ langen Hebel, an dessen Ende ein Pferd ziehend im Kreis geht. Auch hier verhält sich die Zugkraft des Pferdes zur Last am Umfang der Welle wie der Halbmesser der Welle zur Länge des Hebels, an welchem das Pferd zieht. Denkt man sich ein Seil um die einen Fuß im Durchmesser haltende Welle eines Pferdgöpels geschlungen, und nimmt man die Zugkraft des Pferdes am Ende des 10′ langen Hebels zu 80 Pfd. (für die Dauer) an, so ergibt sich aus

$$K : L = r : R$$
$$K : L = 0{,}5 : 10 = 1 : 20$$
$$K = \tfrac{1}{20}\ L \text{ und } L = 20\ K$$

die am Zugseil das Gleichgewicht haltende Last zu $20 \times 70 = 1400$ Pfd.

203. Die einfache Fuhrmannswinde besteht aus einem kleinen Zahnrad oder Getriebe QB, welches in eine gezahnte Stange BM eingreift, und durch eine Kurbel QA umgetrieben wird. Die Kurbel QA und der Radius QB des Getriebes bilden einen ungleicharmigen Hebel, dessen Drehpunkt in Q ist; am Ende A des längeren Hebelarmes QA wirkt die Kraft K, am Ende B des kürzeren Hebelarmes QB die Last L.



Es verhält sich daher bei der Fuhrmanns-

winde die Kraft zur Last, wie der Radius des Getriebes zum Radius der Kurbel; oder

$$K : L = QB : QA.$$

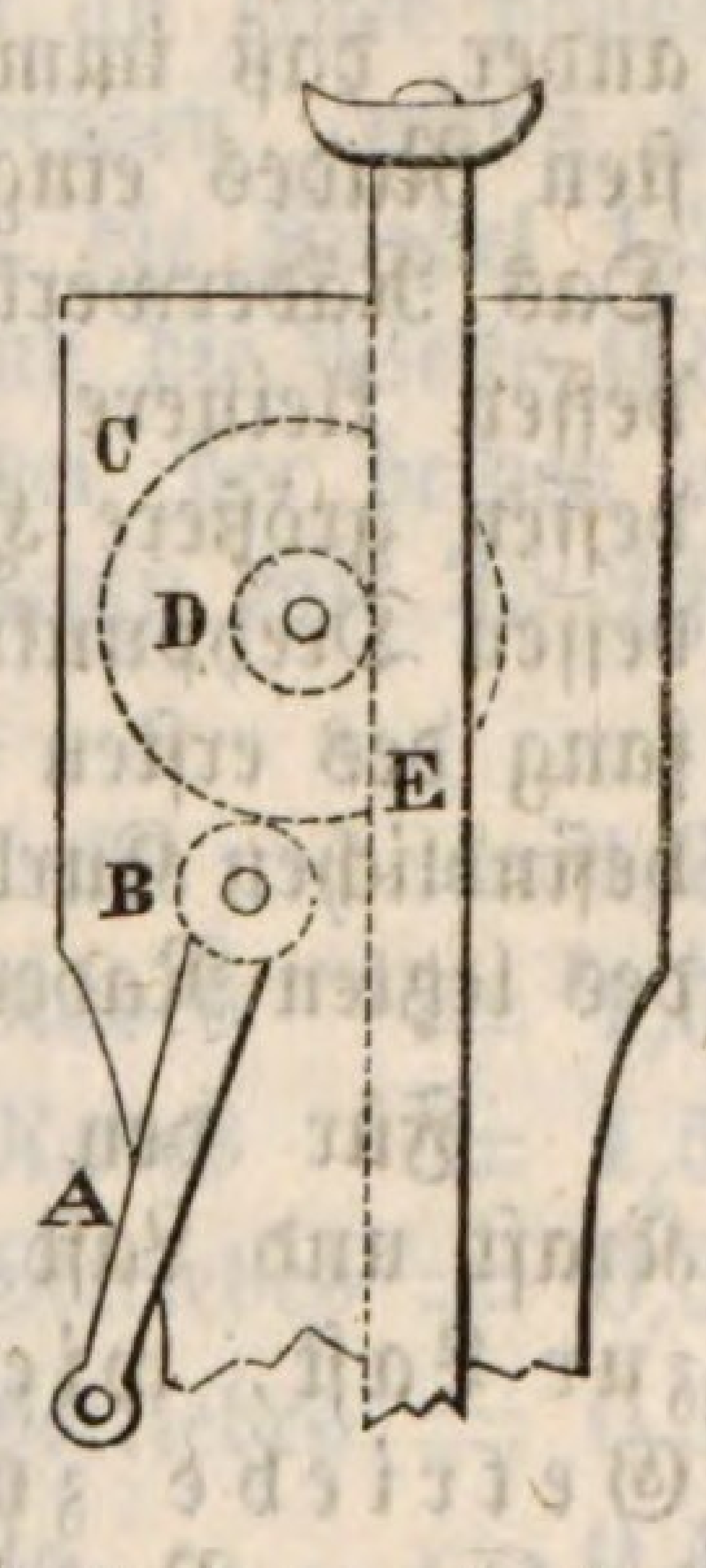
Z. B. Welche Last kann an einer Winde gehoben werden, deren Kurbel 14″ und deren Getriebe 2″ Radius hat, wenn die Kraft an der Kurbel 50 Pfund beträgt?

Antwort:

$$50 : L = 2'' : 14'' \quad \text{woraus}$$

$$L = \frac{50 \times 14}{2} = 350 \text{ Pfd.}$$

Die **zusammengesetzte Fuhrmannswinde** hat zwei Getriebe und ein kleines Rad. Mit der Kurbel A wird das Getriebe B umgetrieben; dieses greift in das kleine Zahnrad C, an dessen Axe ein zweites Getriebe D sitzt, welches die Zahnstange E bewegte. In der Figur sind die Zähne der Getriebe des Rades und der Zahnstange durch punktirte Kreise und Linien dargestellt. In diesem Fall verhält sich die an der Kurbel A wirkende Kraft zur Last an der Zahnstange E wie das Produkt der Radien der Getriebe B und D zum Produkt aus den Radien der Kurbel A und des Rades C. Bezeichnet man den Radius der Kurbel A mit R, den des Rades C mit R′, die Radien der Getriebe B und D mit r und r′, so verhält sich



$$K : L = r \times r' : R \times R'.$$

Gewöhnlich ist der Radius der Kurbel 8 Zoll,

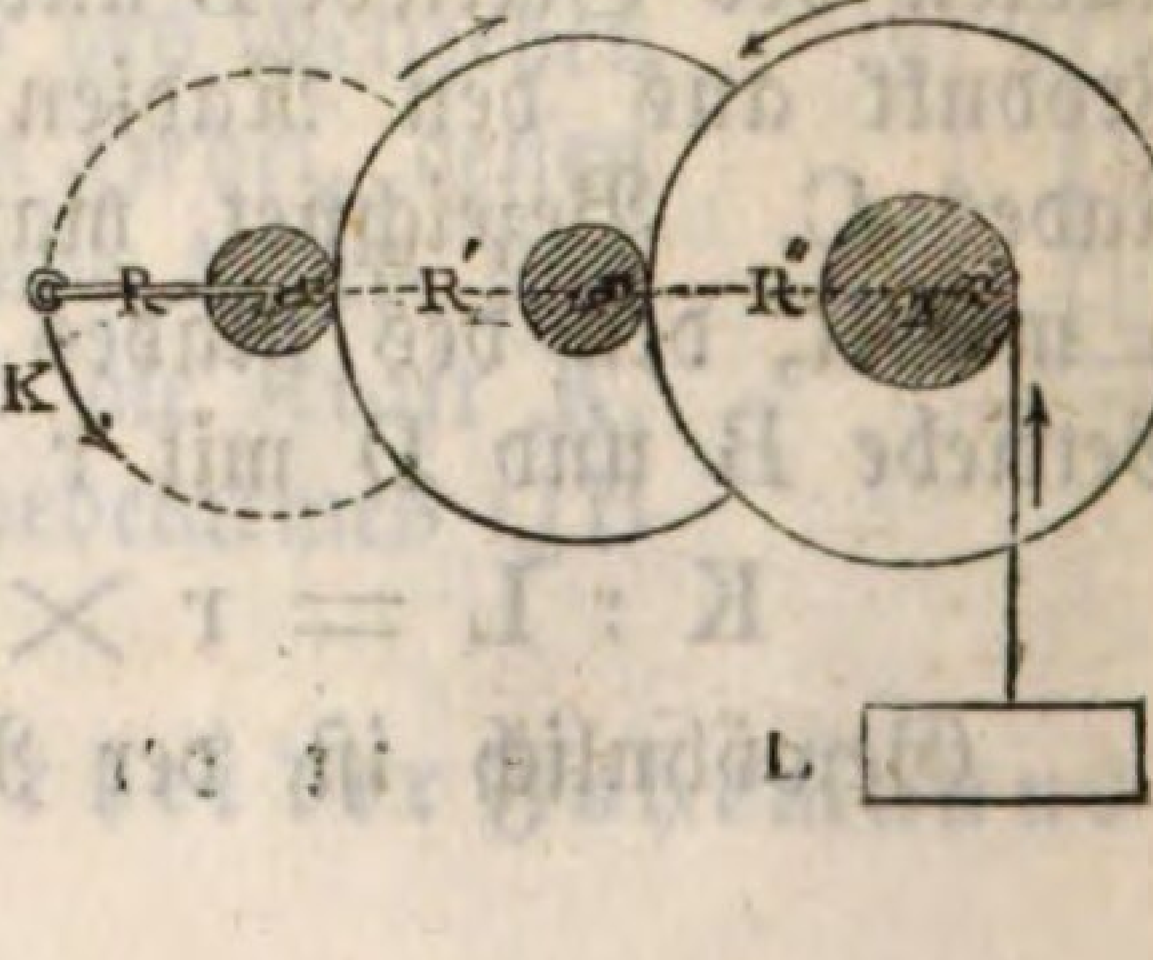
der des Rades $4\frac{1}{2}$ Zoll, der Radius eines jeden Getriebes $1\frac{1}{2}$ Zoll. In diesem Fall verhält sich

$$K : L = 1\tfrac{1}{2} \times 1\tfrac{1}{2} : 8 \times 4\tfrac{1}{2}$$
$$= \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} : 8 \times \frac{9}{2}$$
$$= \frac{9}{4} : \frac{72}{2} = \frac{9}{4} : \frac{144}{4}$$
$$= 1 : 16$$

d. h. die Kraft ist $\frac{1}{16}$ der Last, oder die Last das 16fache der Kraft. Mit 25 Pfd. Kraft an der Kurbel können also $16 \times 25 = 400$ Pfd. Last gehoben werden.

204. Das Räderwerk. — Bringt man mehrere Paare von Rädern und Getrieben so aneinander, daß immer ein Rad in das Getriebe des nächsten Rades eingreift, so hat man ein Räderwerk. Das Räderwerk bildet einen zusammengesetzten Hebel, dessen kleinere Hebelarme die Radien der Getriebe, dessen größere Hebelarme die Radien der Räder, und dessen Drehpunkte die Achsen der Räder sind. Am Umfang des ersten Rades oder an der an der ersten Achse befindlichen Kurbel wirkt die Kraft, an dem auf der Welle des letzten Rades aufgewickelten Seile hängt die Last.

Für den Zustand des Gleichgewichts zwischen Kraft und Last am Räderwerk verhält sich die Kraft zur Last, wie das Produkt der Radien aller Getriebe zum Produkt der Radien aller Räder. Hat man z. B. ein Räderwerk mit 2 Rädern, 1 Kurbel, 2 Getrieben und einer Welle, und bezeichnet man den Radius der Kurbel, woran die



Kraft K wirkt, mit R, die Radien der zwei Räder mit R′ und R″, die Radien der zwei ersten Getriebe mit r und r′ den Radius der Welle, woran die Last hängt, mit r″, so verhält sich für den Zustand des Gleichgewichts

$$K : L = (r \times r' \times r'') : (R \times R' \times R''.)$$

Mit Worten: Die Kraft ist so viel mal kleiner als die Last, als das Produkt der Radien aller Getriebe kleiner ist als das Produkt der Radius aller Räder. Hiebei ist die Welle als ein Getriebe, die Kurbel als ein Rad zu rechnen.

Beispiel. Welche Last kann an einer doppelt übersetzten Hebmaschine gehoben werden, wenn die beiden Räder 3′ im Durchmesser, die Kurbel 1,2′ Radius, die beiden Getriebe 0,6′ und die Welle 0,8′ im Durchmesser haben und an jeder der beiden an der Achse befindlichen Kurbeln 1 Mann mit 25 Pfd. Kraft arbeitet? Antwort:

Hier ist R	der Radius	der Kurbel	=	1,2
R′	" "	des 1. Rades	=	1,5
R″	" "	des 2. Rades	=	1,5
r	" "	des 1. Getriebes	=	0,3
r′	" "	des 2. Getriebes	=	0,3
r″	" "	der Welle	=	0,4;

ferner K = 2 × 25 = 50 Pfd. und L gesucht.

Nun ist

$$K : L = (r \times r' \times r'') : (R \times R' \times R'')$$

$$50 : L = (0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}4) : (1{,}2 \times 1{,}5 \times 1{,}5)$$

$$50 : L = 0{,}036 : 2{,}7 \quad \text{hieraus}$$

$$L = \frac{50 \times 2{,}7}{0{,}036} = \frac{2700 \times 50}{36}$$

$$= 3750 \text{ Pfd.} = 37{,}5 \text{ Ctr.},$$

wobei jedoch auf die Reibung der Maschine an den Zapfen und Zähnen und auf die Steifheit des Seiles keine Rücksicht genommen ist.

Bei diesen Dimensionen der Hebemaschine verhält sich allgemein

$$K : L = 0{,}036 : 2{,}7$$

$$= 1 : 75$$

d. h. die Kraft ist $\frac{1}{75}$ der Last, oder mit 1 Pfd. Kraft können 75 Pfd. Last gehoben werden.

205. Geschwindigkeit von Kraft und Last am Räderwerk. — Auch beim Räderwerk geht an Geschwindigkeit verloren, was an Kraft gewonnen wird.

Soll die Last 1 Schuh steigen, so muß die Kraft am Umfang des letzten Rades oder an der Kurbel so viele Schuhe zurücklegen, als das Produkt der Radien aller Getriebe in dem Produkt der Radien aller Räder enthalten ist.

Im vorigen Beispiel war das Produkt der Radien der Getriebe $0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}036$, und das der Räder $= 1{,}2 \times 1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}7$; die Kraft an der Kurbel muß also $\frac{2{,}7}{0{,}036} = 75$ Schuh zurücklegen, bis die Last 1 Schuh steigt. Die Geschwindigkeit der Last ist also 75mal kleiner, als die der Kraft.

Nun ist gerade gezeigt worden, daß bei dieser Maschine die Last 75mal größer ist als die Kraft;

das Verhältniß der Geschwindigkeiten von Kraft und Last ist daher gerade das umgekehrte des Verhältnisses von Kraft und Last selbst.

Der Umfang der Welle, woran die Last hängt, ist $= 0{,}8 \times 3{,}14 = 2{,}512'$; soll also die Last eben so viel steigen, oder die Welle eine Umdrehung machen, so muß die Kurbel $75 \times 2{,}512 = 188{,}4'$ zurücklegen. Der Umfang des Kreises, welchen die Kurbel beschreibt, ist aber $= 2{,}4 \times 3{,}14 = 7{,}536'$, die Kurbel muß also $\frac{188{,}4}{7{,}536} = 25$ Umdrehungen machen, bis die Welle eine Umdrehung macht.

Umgekehrt: Wirkt die Kraft am Umfang der Welle, oder stellt das an der Welle hängende Gewicht L die Kraft vor, und sinkt das Gewicht um einen Schuh, so muß in derselben Zeit der Umfang des letzten Rades oder der Kurbel 75 Schuh zurücklegen, die Geschwindigkeit der Kurbel ist alsdann 75mal größer als die des Gewichts; und macht die Welle eine Umdrehung, so muß die Kurbel oder das letzte Rad in derselben Zeit 25 Umdrehungen machen.

Will man also beim Räderwerk an Kraft gewinnen, so muß die Kraft am Umfang des ersten Rades, die Last am Umfang der letzten Welle wirken; will man aber bei einem zu Gebot stehenden Ueberfluß von Kraft an Geschwindigkeit gewinnen, so muß die Kraft am Umfang der ersten Welle (oder am ersten Getrieb) wirken, die Last aber am Umfang des letzten Rades angebracht sein.

Das letztere ist bei allen durch ein Gewicht in Bewegung gesetzten Uhren, beim Schwungrad in Verbindung mit einer Drehbank rc. der Fall.

206. Bestimmung der Kraft und der Geschwindigkeit zweier ineinander greifenden Zahnräder aus der Zahl der Zähne. Wenn zwei Zahnräder in einander greifen sollen, so müssen die einzelnen Zähne der beiden Räder, auch wenn diese verschiedene Durchmesser haben, offenbar gleich groß sein. Hieraus folgt, daß die Zahl der Zähne zweier in einandergreifenden Zahnräder ganz genau das Verhältniß der Umfänge und folglich auch der Durchmesser beider Zähnräder gibt. Hat z. B. ein Zahnrad 12 Zähne, das in dasselbe eingreifende Zahnrad 24 Zähne, so muß, da die Zähne beider Räder gleich stark sind, der Umfang des größeren Rades genau doppelt so groß sein als der Umfang des kleineren Rades. Was von den Umfängen gilt, gilt aber auch von den Durchmessern. Das größere Rad wird also genau einen doppelt so großen Durchmesser haben, als das erste. Ist der Durchmesser des ersten Rades 1, 2, 3 .. Fuß, so ist jener des zweiten 2, 4, 6 . . . Fuß.

Hiedurch hat der Mechaniker und Mühlarzt ein sehr einfaches Mittel, das Verhältniß der Durchmesser der verschiedenen in einander greifenden Zahnräder einer Maschine, und hieraus das Verhältniß von Kraft und Last, sowie der Umdrehungsgeschwindigkeit der einzelnen Räder zu finden, ohne daß die einzelnen Raddurchmesser gemessen zu werden brauchen, was in den meisten Fällen auch sehr schwierig und häufig mit Ungenauigkeit verbunden sein würde.

1. Beispiel. Eine eiserne Hebmaschine, wie sie zum Aufziehen von schweren Steinen bei großen Bauten gebraucht wird, habe eine Kurbel von 18″ Länge, 2 Getriebe von 8 und 10 Zähnen, 2 in diese

eingreifende Zahnräder von 48 und 72 Zähnen, und eine Welle von 12″ Durchmesser oder 6″ Radius, welches ist das Verhältniß zwischen Kraft und Last, und der Geschwindigkeit beider?

Antwort: Setzt man in das in Nr. 204 angegebene Verhältniß von Kraft und Last statt des unbekannten Durchmesser der Räder und Getriebe die entsprechende Zahl der Zähne, so findet man

$$K : L = 8 \times 10 \times 6 : 18 \times 48 \times 72$$
$$= 1 : 69{,}6 \quad \text{oder rund}$$
$$= 1 : 70.$$

Hieraus folgt, daß an dieser Maschine mit 1 Pfd. Kraft 70 Pfd. Last gehoben werden können, daß aber auch umgekehrt die Last sich 70mal langsamer bewegt, als die an der Kurbel wirkende Kraft.

2. Beispiel. An der horizontalen Welle A eines Wasserrades sei ein vertikales conisches Rad B mit 90 Zähnen angebracht, in dieses greife ein zweites horizontales conisches Rad (Kumpf) C mit 30 Zähnen; an derselben Axe des Rades C sei ein großes horizontales Stirnrad D mit 108 Zähnen angebracht, welches zwei horizontale Räder (Trillinge, Geschirre) E und F von 18 und 20 Zähnen in Bewegung setzt, durch welche die Mühlsteine umgetrieben werden. Wie oft werden die letzteren sich bei jeder Umdrehung des Wasserrades A umdrehen?

Antwort: Da jedes größere Rad in ein kleineres eingreift, also die Geschwindigkeit bei jedem Rad im umgekehrten Verhältniß der Zahl der Zähne zunimmt, so verhält sich die Zahl der Umgänge der Wasserrades A zur Zahl der Umgänge des Trillings (Mühlsteins) E oder

$$A : E = 30 \times 18 : 90 \times 108 = 1 : 18$$

und für den andern Trilling (Mühlstein) F ist

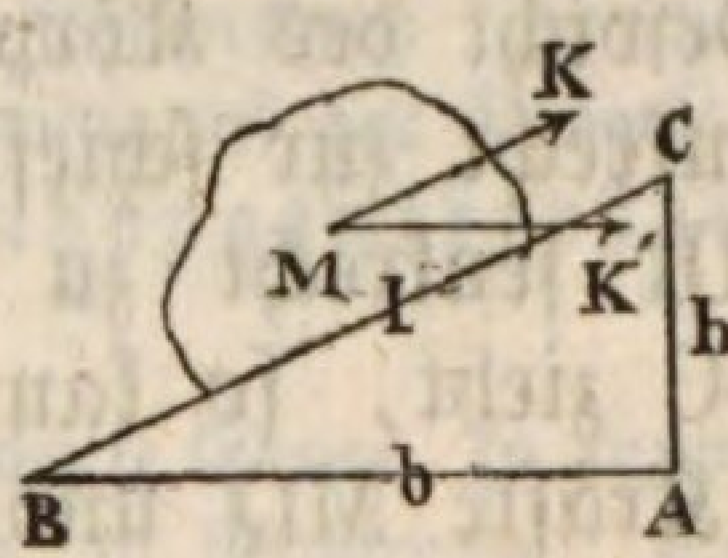
$$A : F = 30 \times 20 : 90 \times 108 = 1 : 16{,}2.$$

Bei jedem Umgang des Wasserrades A oder des daransitzenden conischen Rades B macht also der Stein am Trilling E 18, der andere F 16,2 Umgänge. Macht das Wasserrad in der Minute 8 Umgänge, so macht der Stein E = 18 × 8 oder 144 und der Stein F = 16,2 × 8 = 129,6 oder 130 Umgänge in der Minute.

Aus der angegebenen Zahl der Zähne ergeben sich die Durchmesser aller Räder, sobald der Durchmesser eines Rades bekannt ist. Hat z. B. das Rad B (mit 90 Zähnen) 6′ Durchmesser, so hat das Rad C (mit 30 Zähnen) $\frac{30}{90} \times 6$ oder 2′ Durchmesser; das Rad D (mit 108 Zähnen) $\frac{108}{30} \times 2$ oder 7,2′; das Rad E (mit 18 Zähnen) $\frac{18}{108} \times 7{,}2'$ oder 1,2′ Durchmesser. Hat das Wasserrad A einen Durchmesser von 24′ und macht dasselbe eine ganze Umdrehung, so legt ein Punkt an dessen Umfang in derselben Zeit einen Weg von 24 × 3,14 Fußen zurück. Ein Punkt des Umfangs am Rad E legt in derselben Zeit 18mal den Umfang dieses Rades oder 18 × 3,14 × 1,2 Fuße zurück. Die Geschwindigkeit der Kraft am Umfang des Wasserrades A verhält sich daher zur Geschwindigkeit der Last am Umfang des Trillings E wie 24 × 3,14 : 18 × 3,14 × 1,2 oder wie 24 : 18 × 1,2 = 8 : 6 × 1,2 = 8 : 7,2. Umgekehrt verhält sich daher die Kraft am Umfang des Wasserrades A zur Last am Umfang des Trillings E wie 7,2 : 8 oder wie 9 : 10; wobei jedoch die Reibungswiderstande außer Betracht geblieben sind.

E. Von der schiefen Ebene, dem Keil und der Schraube.

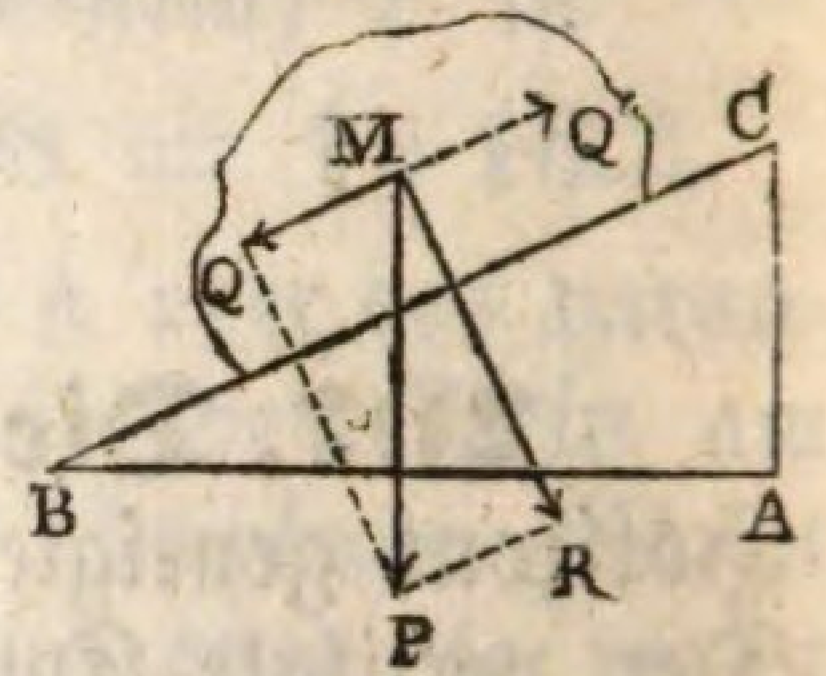
207. Die schiefe Ebene. — Eine gegen den Horizont geneigte Ebene heißt eine schiefe Ebene. Der vertikale Durchschnitt einer schiefen Ebene bildet ein rechtwinkliges Dreieck, dessen horizontale Kathete AB die Grundlinie oder Basis b, die Senkrechte AC die Höhe h, die Hypothenuse BC die Länge l heißt. Der Winkel ABC heißt der Neigungswinkel der schiefen Ebene.



Es ist offenbar, daß man eine Last leichter über eine solche Fläche auf eine bestimmte Höhe hinaufbringen kann, als wenn man sie senkrecht auf die nämliche Höhe hinaufheben wollte, weil ein großer Theil der Last während des Hinaufschiebens auf der Fläche ruht oder von ihr getragen wird. Die Wirkung der schiefen Ebene folgt aus dem Parallelogramm der Kräfte. Es müssen hiebei aber zwei Fälle unterschieden werden: 1) wenn die Kraft MK, welche einen Körper M auf der schiefen Ebene zu halten hat, parallel mit der schiefen Ebene BC, und 2) wenn die Kraft nach der Richtung MK′ oder parallel zur Grundlinie AB wirkt. Der erste Fall findet z. B. statt bei jedem bergan fahrenden Wagen, oder dem Hinaufwälzen einer Last auf einer Schrotleiter; der zweite Fall tritt ein bei der Schraube.

208. Erster Fall. Die Kraft wirkt parallel zur schiefen Ebene. Es sei M ein auf der schiefen

Ebene liegender Körper, dessen Gewicht man sich in seinem Schwerpunkt M vereinigt denken und durch die vertikale Linie MP vorstellen kann. Gleitet der Körper die schiefe Ebene CB hinab, so bewegt sich der Schwerpunkt M des Körpers in einer Linie parallel mit CB. Zerlegt man daher die vertikal abwärts wirkende Kraft MP oder das Gewicht des Körpers in 2 Seitenkräfte parallel und senkrecht zur schiefen Ebene BC, indem man PQ und MR senkrecht zu BC und PR und MQ parallel zu BC zieht, so kann man statt des Gewichts MP die 2 Kräfte MQ und MR setzen. MQ ist nun die Kraft mit welcher der Körper die schiefe Ebene hinabzugleiten sucht, oder die **Gleitungskraft**; MR der **Druck**, welcher von dem Körper senkrecht zur schiefen Ebene ausgeübt und von dieser aufgehoben wird. Bei eintretender Bewegung ist es dieser senkrechte Druck MR, welcher die Reibung verursacht. Vernachlässigt man diese, so muß, wenn der Körper auf der schiefen Ebene in Ruhe bleiben soll, der Gleitungskraft MQ eine gleich große Kraft MQ′ entgegengesetzt werden. Nun verhält sich in den ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken MQP und ABC



$$MQ : MP = AC : BC$$

oder wenn man das Gewicht des Körpers MP mit L (Last), und die Gleichgewicht herstellende Kraft MQ′ = MQ mit K (Kraft) bezeichnet:

$$K : L = h : l \qquad \text{d. h.}$$

Die Kraft, welche parallel zur schiefen Ebene wirkt, verhält sich zur Last, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge.

Mit andern Worten: die Kraft ist so viel mal kleiner als die Last, als die Höhe der schiefen Ebene kleiner ist, als ihre Länge. Die schiefe Ebene ist also um so wirksamer, je kleiner der Neigungswinkel derselben ist.

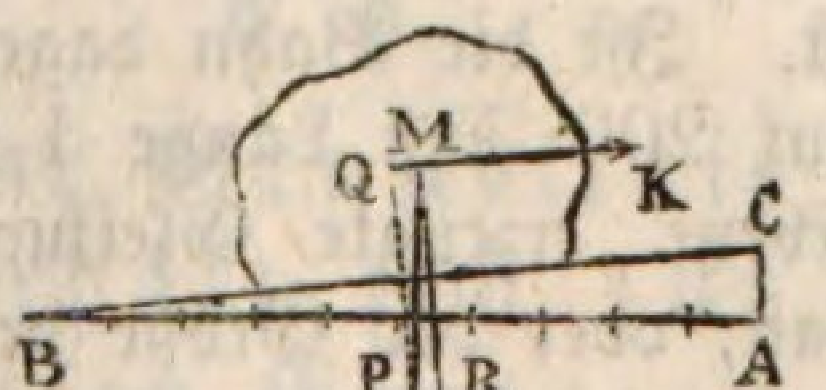
Hierher gehört der Transport auf Straßen und Eisenbahnen. Um über den mechanischen Vorgang bei Bewegung einer Last auf einer Straße oder Eisenbahn klar zu werden, muß man vor Allem festhalten, daß zur Bewegung eines Wagens auf einer horizontalen Unterlage nicht das ganze Gewicht desselben, sondern nur der Widerstand zu überwinden ist, welchen das Gewicht des Wagens auf der Unterlage verursacht, und welcher Reibung oder Reibungswiderstand heißt. (Vergl. 227).

Ist die Unterlage geneigt, oder eine schiefe Ebene, so kommt außer der Reibung noch die Gleitungskraft in Rechnung. Soll ein Körper eine schiefe Ebene hinaufgezogen werden, so hat die Zugkraft zu überwinden: 1) die Gleitungskraft; 2) die Reibung. Beide wirken der Zugkraft direkt entgegen. Soll aber ein Körper die schiefe Ebene hinabgezogen werden, so ist nur die Reibung zu überwinden, da die Gleitungskraft der Zugkraft zu Hilfe kommt.

Ein Paar Beispiele werden diese Gesetze vollends klar machen.

1. Beispiel: Ein Wagen von 80 Ctr. Schwere soll auf einer Straße von 10 Proz. Steigung (alle 100′ horizontale Länge 10′ Steigung) hinaufbewegt werden, wie groß muß die nöthige Zugkraft sein, wenn die Reibung zwischen den Rädern und der Straße zu $\frac{1}{8}$ des senkrechten Drucks angenommen wird?

Antwort: Construirt man die Neigung der Straße, indem man AB = 10 Theile und AC = 1 Theil macht, und stellt man das Gewicht des Wagens = 80 Ctr. durch die Linie MP = 8 Linien dar, zieht man PQ und MR senkrecht zu BC, und MQ und PR parallel zu BC, so findet man die Kraft,



welche den Wagen auf der schiefen Ebene abwärts treibt oder die Gleitungskraft des Wagens QM = 0,8 Linien oder = 8 Ctr. (da 1 Linie 10 Ctr. vorstellt) und den Druck des Wagens senkrecht zur Straße = MR oder beinahe 80 Ctr. Da nun die

Reibung $\frac{1}{8}$ des Drucks oder der Kraft MR, sohin $\frac{1}{8}$ von 80 = 10 Ctr. beträgt, und immer der Kraft direkt entgegenwirkend gedacht werden muß, so ist die nöthige Zugkraft aufwärts (Gleitungskraft + Reibung) = 8 + 10 = 18 Ctr. Soll Bewegung eintreten, so muß die Zugkraft noch etwas größer sein.

Beim Bergabfahren ist, da die Reibung 10 Ctr., die Gleitungskraft aber nur 8 Ctr. beträgt, noch eine Zugkraft abwärts (Reibung — Gleitungskraft) von 10 — 8 = 2 Ctr. nöthig.

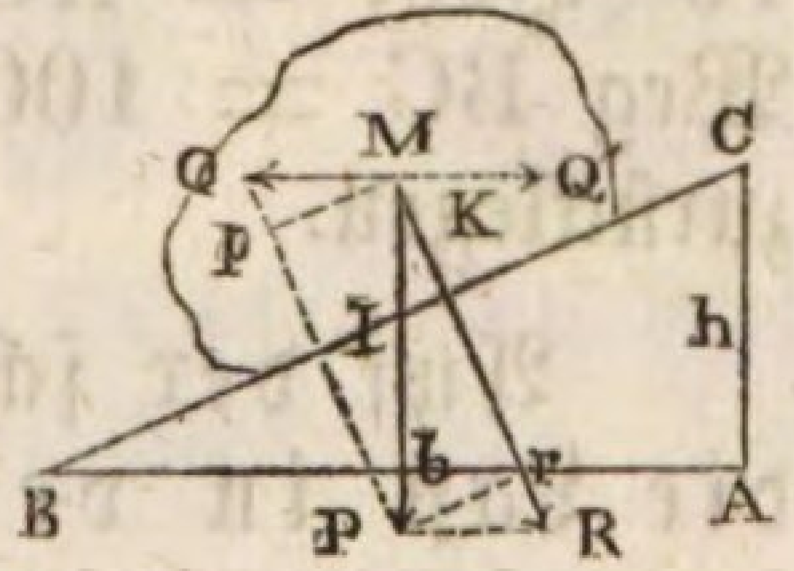
Wäre die Steigung der Straße $12\frac{1}{2}$ Proz. (auf 100′ horizontale Länge $12\frac{1}{2}$′ Steigung oder $\frac{1}{8}$ der Länge, so würde die Gleitungskraft $\frac{1}{8}$ von 80, also 10 Ctr. betragen, die Reibung bliebe so ziemlich dieselbe oder ebenfalls 10 Ctr. Der Wagen würde also bei dieser Steigung in Folge der Reibung gerade noch in Ruhe bleiben, die geringste Kraft aber hinreichen, ihn in Bewegung zu setzen.

Wäre endlich die Steigung 25 Proz. (oder $\frac{1}{4}$), so würde die Gleitungskraft ohngefähr $\frac{1}{4} \times 80 = 20$ Ctr., dagegen der vertikale Druck ohngefähr 76 Ctr., also die Reibung nur $= \frac{76}{8} = 9\frac{1}{2}$ Ctr. betragen. Es würde also in diesem Fall der Wagen noch mit einer Kraft von $20 - 9\frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}$ Ctr. von selbst bergab laufen; um ihn im Zustand der Ruhe zu erhalten, müßte die gleiche Kraft entgegengesetzt wirken, oder mit der gleichen Kraft gebremst werden.

2. Beispiel. Noch schärfer tritt dieß Gesetz beim Transport auf einer Eisenbahn hervor. Die Reibung auf einer Eisenbahn ist durchschnittlich $\frac{1}{200}$ der Last, gleichviel ob die Bahn horizontal oder etwas weniges geneigt ist. Zum Fortziehen eines Wagens von 200 Ctr. Gewicht ist daher auf einer horizontalen Bahn eine Zugkraft von 1 Ctr. nöthig, da zur Fortbewegung nur der Widerstand der Reibung zwischen den Rädern und Schienen, welchen der Wagen durch sein Gewicht verursacht, zu überwinden ist. Ist die Bahn dagegen mit $\frac{1}{200}$ geneigt, d. h. hat dieselbe auf 200 Fuß Länge 1 Fuß Fall, so ist die auf dieser schiefen Ebene erzeugte Gleitungskraft $MQ = \frac{1}{200}$ MP oder $\frac{1}{200}$ der Last, oder der Größe der Reibung gleich. Auf einer Eisenbahn von $\frac{1}{200}$ Neigung bewirkt also die Anziehungskraft der Erde in einem Wagen genau eben so viel Gleitungskraft, als dieser durch sein Gewicht Reibungs-Widerstand an den Schienen erzeugt. Der Wagen wird also, da die Gleitungskraft durch den Reibungswiderstand aufgehoben wird, gerade noch stehen bleiben. Die ge-

ringste Kraft, z. B. der Wind, wird aber im Stand sein, den Wagen abwärts in Bewegung zu setzen. Ist die Neigung der Bahn geringer als $\frac{1}{200}$, so ist auch die Gleitungskraft geringer als $\frac{1}{200}$ der Last, während der Reibungswiderstand sich gleich bleibt. Der Wagen wird also, sich selbst überlassen, stehen bleiben. Ist dagegen die Neigung der Bahn größer als $\frac{1}{200}$, oder fällt die Bahn auf 200 Fuß Länge mehr als 1 Fuß, so ist die Gleitungskraft größer als die (noch immer $\frac{1}{200}$ der Last betragende) Reibung. Der Wagen wird daher von selbst in Bewegung gerathen und die Bahn hinablaufen.

209. Zweiter Fall. Die Kraft wirkt parallel zur Grundlinie der schiefen Ebene. Macht man die Construktion wie früher, zerlegt aber die Last MP nach der Richtung MQ parallel zur Grundlinie AB, und nach der Richtung MR senkrecht zu BC, indem man MQ und PR parallel zu AB, und PQ und MR senkrecht zu BC zieht, so kann man für das Gewicht MP des Körpers die zwei Seitenkräfte MQ und MR setzen. Der senkrechte Druck MR wird von der schiefen Ebene aufgehoben, MQ bringt die Gleitungskraft hervor. Damit der Körper in Ruhe bleibt, muß also die Kraft MQ′ = MQ angebracht werden. Nun verhält sich in den ähnlichen Dreiecken ABC und MQP



$$QM : MP = AC : AB \quad \text{oder}$$

$$K : L = h : b \quad \text{d. h.}$$

Die Kraft, welche parallel zur Grundlinie der schiefen Ebene wirkt, verhält sich zur Last, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Grundlinie.

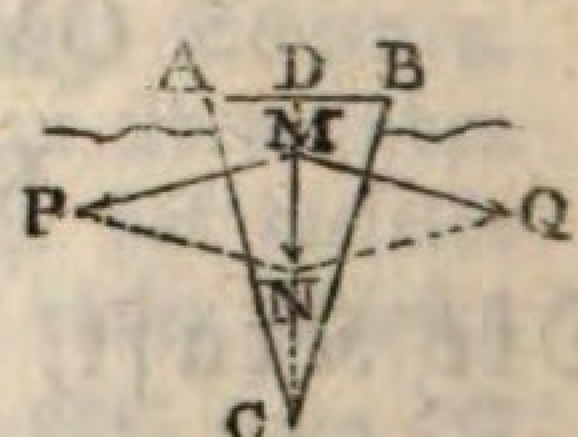
Zieht man Mp und Pr parallel zu BC, so ist Mp die Gleitungskraft im ersten Fall und Mr der

entsprechende Druck auf die schiefe Ebene, welcher Reibung verursacht. Im zweiten Fall ist also sowohl die Kraft MQ′ = MQ, als auch der Druck MR und folglich auch die Reibung größer als im ersten Fall, wo die Kraft parallel zu BC wirkte.

210. Auch bei der schiefen Ebene geht an Geschwindigkeit verloren, was an Kraft gewonnen wird. Soll die Last M auf die Höhe AC gehoben werden, so muß im ersten Fall die Kraft den Weg BC, im zweiten den Weg BA durchlaufen. Im vorigen Beispiel war die Kraft bei 10% Steigung der Straße = 8 Ctr. = $\frac{1}{10}$ der Last; damit aber die Last auf 10′ Höhe = AC gehoben wird, muß die Kraft den Weg BC = 100′ also den 10fachen Weg der Last zurücklegen.

Auf der schiefen Ebene bewegt sich daher die Last in vertikaler Richtung so viel mal langsamer als die Kraft, als die Höhe der schiefen Ebene im ersten Fall in der Länge, im zweiten Fall in der Grundlinie enthalten ist.

211. Der Keil ist ein senkrechtes dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche ein schmales gleichschenkliges Dreieck ABC ist. Man nennt AB den Rücken, AC und BC die Seiten des Keils. Denkt man sich die Kraft, wodurch derselbe in einen Körper eingetrieben wird, durch die Linie MN vorgestellt, und zerlegt man diese Kraft mittelst des Parallelogramms der Kräfte senkrecht zu den Seitenflächen AC, BC des Keils in zwei Seitenkräfte MP und MQ, so stellen diese die Wirkung des Keils



oder den Seitendruck vor, mit welchem der Keil nach beiden Seiten die Theile des Körpers zu trennen sucht.

Nennt man den Widerstand, welchen die Theile des Körpers auf jeder Seite des Keils der Seitenkraft MQ = MP entgegensetzen, die Last L, so muß für den Zustand des Gleichgewichts die Wirkung MP = MQ der Last L gleich sein. Für den Zustand des Gleichgewichts ist also MP = MQ = Wirkung des Keils = Last L.

Das Verhältniß zwischen MP oder MQ und MN oder zwischen Kraft und Last folgt aus den ähnlichen Dreiecken MNP und ABC

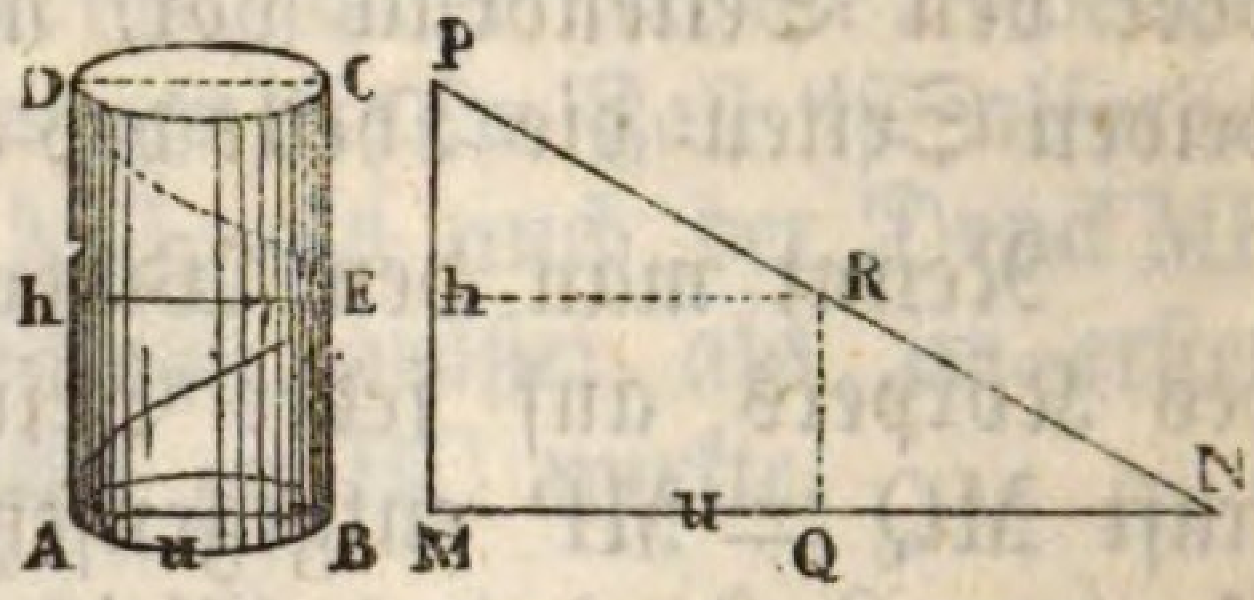
$$MN : MP = AB : AC \quad \text{oder}$$
$$K : L = AB : BC \quad \text{d. h.}$$

Beim Keil verhält sich die Kraft zur Last (Wirkung des Keils nach jeder Seite) wie der Rücken zur Seite desselben.

Je spitzer der Winkel C des Keils ist, desto größer fallen bei derselben Größe der Kraft MN die beiden Seitenkräfte MP und MQ aus. Die Wirkung des Keils ist also um so größer, je scharfkantiger derselbe ist.

Der Keil wird angewendet nicht nur zum Spalten der Körper (Messer, Aexte, Pickel, Nägel rc.), sondern auch zum Feststellen, zum Heben und Senken von Lasten, z. B. als Unterlage bei Leergerüsten großer Gewölbe, zum Auspressen von Flüssigkeiten, (bei Oelmühlen) rc. —

212. Die Schraube. — Nimmt man einen senkrechten Kreiscylinder ABCD und construirt man ein rechtwinkliges Dreieck MNP so, daß seine

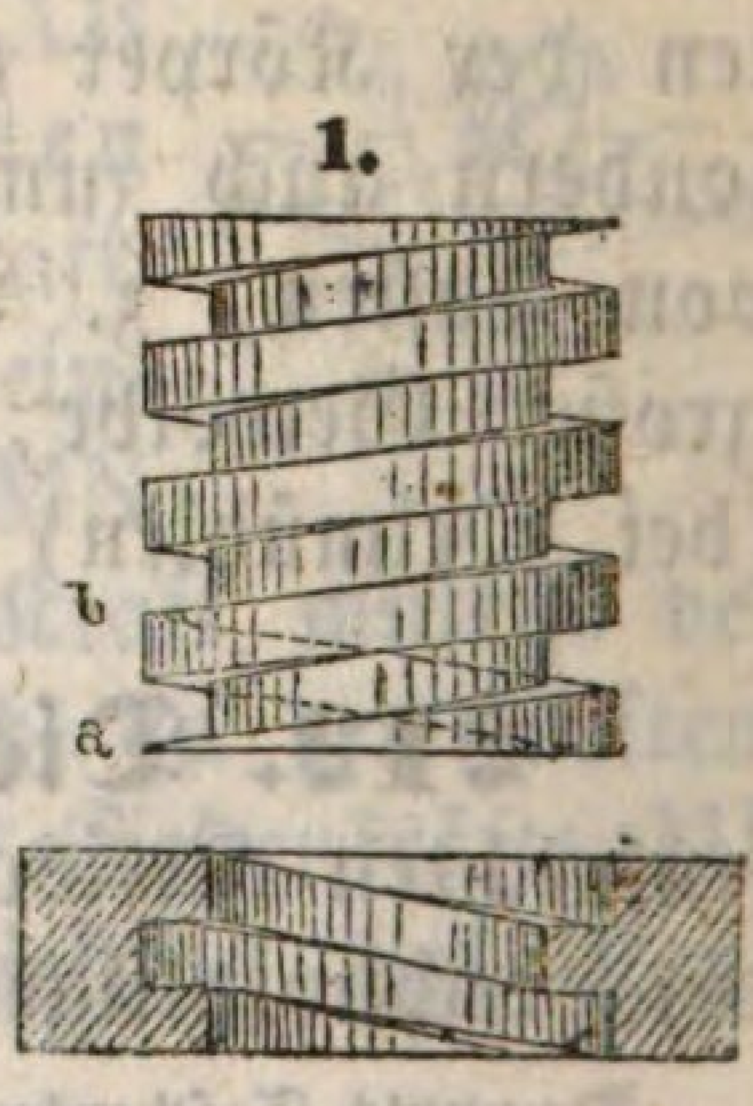


Grundlinie MN gleich dem Umfang, und seine Höhe MP gleich der Höhe des Cylinders ist, und wird dasselbe, in Papier ausgeschnitten, so um den Cylinder gewickelt, daß seine Grundlinie MN in den Umfang der Grundfläche AB des Cylinders fällt, so müssen die beiden Punkte M und N in einem Punkte A des Umfangs zusammentreffen, und die Höhe MP muß in die Kante AD des Cylinders fallen. Die dritte Seite PRN des Dreiecks bildet alsdann auf der Cylinderoberfläche eine krumme Linie DEA, welche die Schraubenlinie heißt. Denkt man sich statt des Papiers ein biegsames Brettchen von einer gewissen Dicke um den Cylinder gewickelt, so bildet die schmale Fläche des Brettchens längs der Hypothenuse NRP am Cylinder längs AED eine schmale windschiefe Fläche, welche die Schraubenfläche heißt.

Die obere Fläche der Wange an einer Wendeltreppe, die gewundenen Brettchen in einer archimedischen Wasserschnecke, die gewundenen Flächen an einer Schraubenspindel sind solche Schraubenflächen.

Die Schraubenfläche ist also eine um den Cylinder gewundene schiefe Ebene.

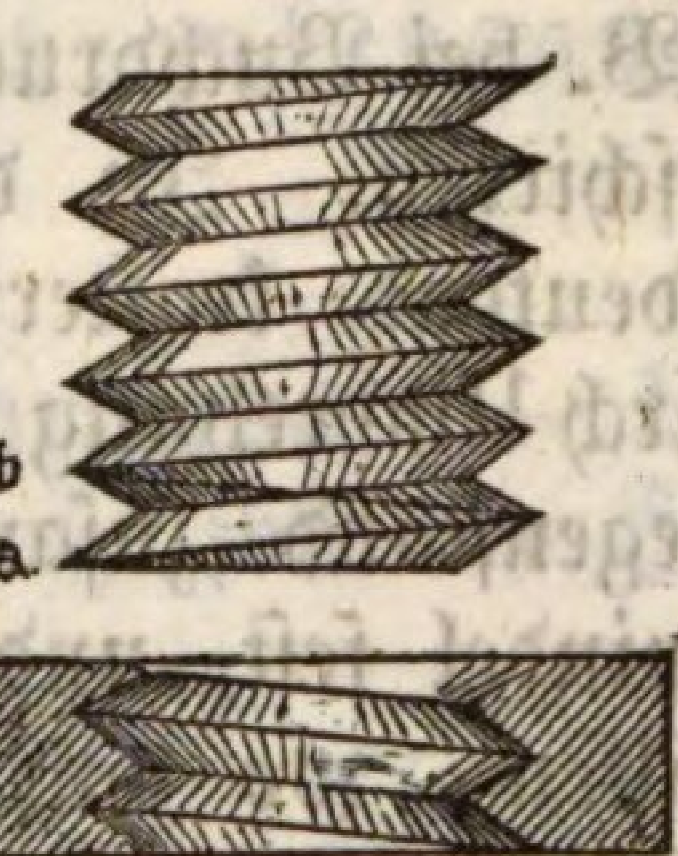
1.



213. Windet man statt der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ein vierseitiges Prisma in einer Schraubenlinie um die äußere Fläche eines Cylinders, so entsteht eine Schraubenspindel; wird das gleiche vierseitige Prisma aus

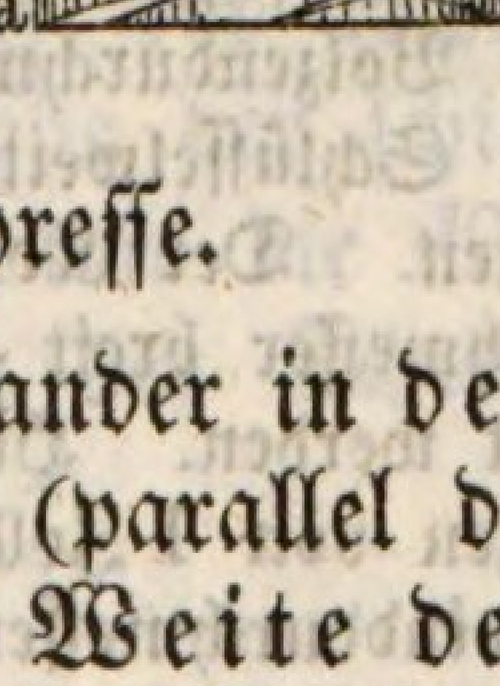
einem gleich großen Cylinder ausgeschnitten, so entsteht die dazu gehörige *Schraubenmutter*. Geschieht dasselbe mit einem dreiseitigen Prisma, so entsteht ebenfalls eine Schraubenspindel und die dazu gehörige Schraubenmutter. Schrauben der ersten Art heißen *flachgängige*, die der letztern Art *scharfgängige* Schrauben. Die Umwindungen des Prisma's heißen *Schraubengänge*. Wird die Spindel in die Schraubenmutter geschraubt, so greifen die Gänge der Spindel in die Vertiefungen der Schraubenmutter und umgekehrt. Um die Schraube anwenden zu können, müssen immer Spindel und Schraubenmutter beisammen sein.

2.

b
a


Wird nur *ein* Prisma um den Cylinder gewunden, so heißt die Schraube *einfach*, Fig. 1 u. 2; werden 2, 3 oder mehr Gänge parallel zu einander angebracht, so heißt die Schraube *mehrfach*, Fig. 3. Mehrfach gewundene Schrauben werden da angewendet, wo die Schraube bei einer Umdrehung einen großen Weg zurücklegen soll, wie bei einer Siegel-, Münz- oder Buchdruckerpresse.

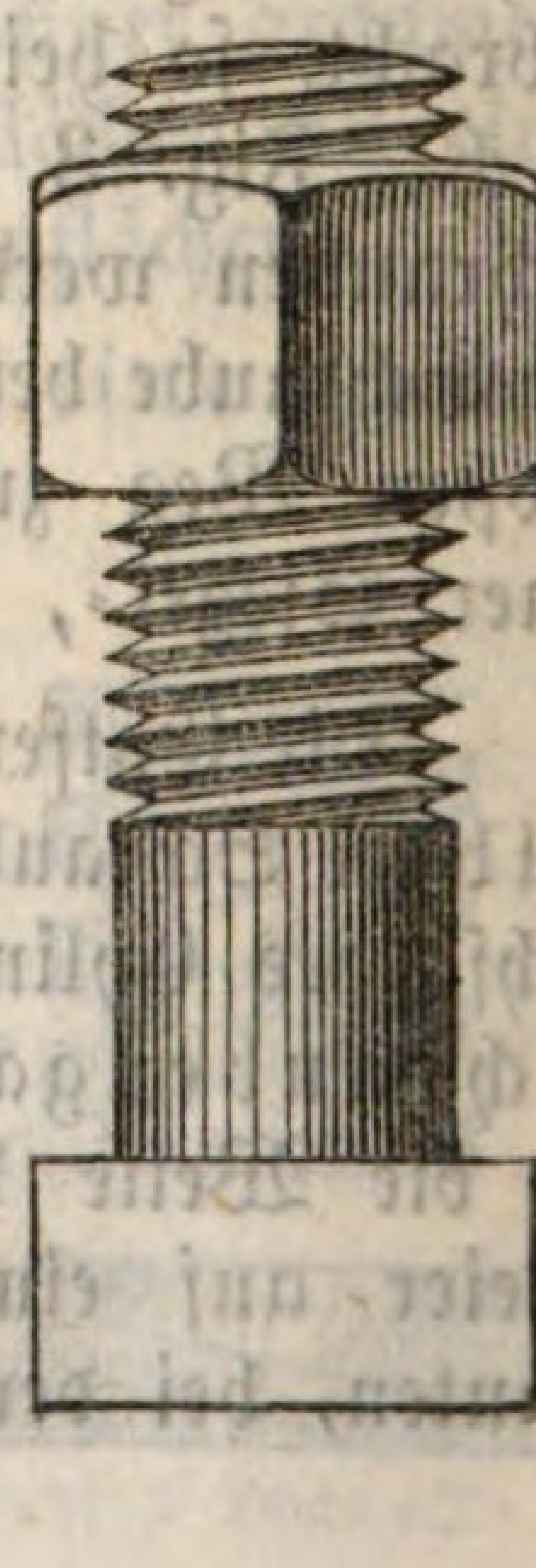
3.

b
a


Die Entferung *ab* zweier über einander in derselben Schraubenlinie liegender Punkte (parallel der Achse des Cylinders gemessen) heißt die *Weite des Schraubengangs*. Bei der einfachen Schraube ist die Weite des Schraubengangs der Entfernung zweier auf einander folgenden unteren oder oberen Kanten, bei der zweifach gewundenen Schraube ist es

die Entfernung der ersten und dritten, bei der dreifachen die der ersten und vierten Kante u. s. w. Beim Gebrauch der Schraube ist entweder die Mutter fest, und die Spindel bewegt sich in derselben, wie z. B. bei Buchdrucker-, Kelter-, Siegelpressen, Schraubgeschirren. In diesem Fall dient die Schraube als bedeutend krafterſparende Maschine, und es wird durch Umdrehung der Spindel eine Last gehoben, ein Gegenstand zusammengepreßt 2c. Oder es ist die Spindel fest, und die Mutter beweglich, wie in allen Fällen, wo durch die Schraube zwei Gegenstände fest zusammen gezogen werden sollen, z. B. bei den Schraubenbolzen bei Brücken, aufgehängten Durchzügen, Hängwerken, Baugerüsten 2c.

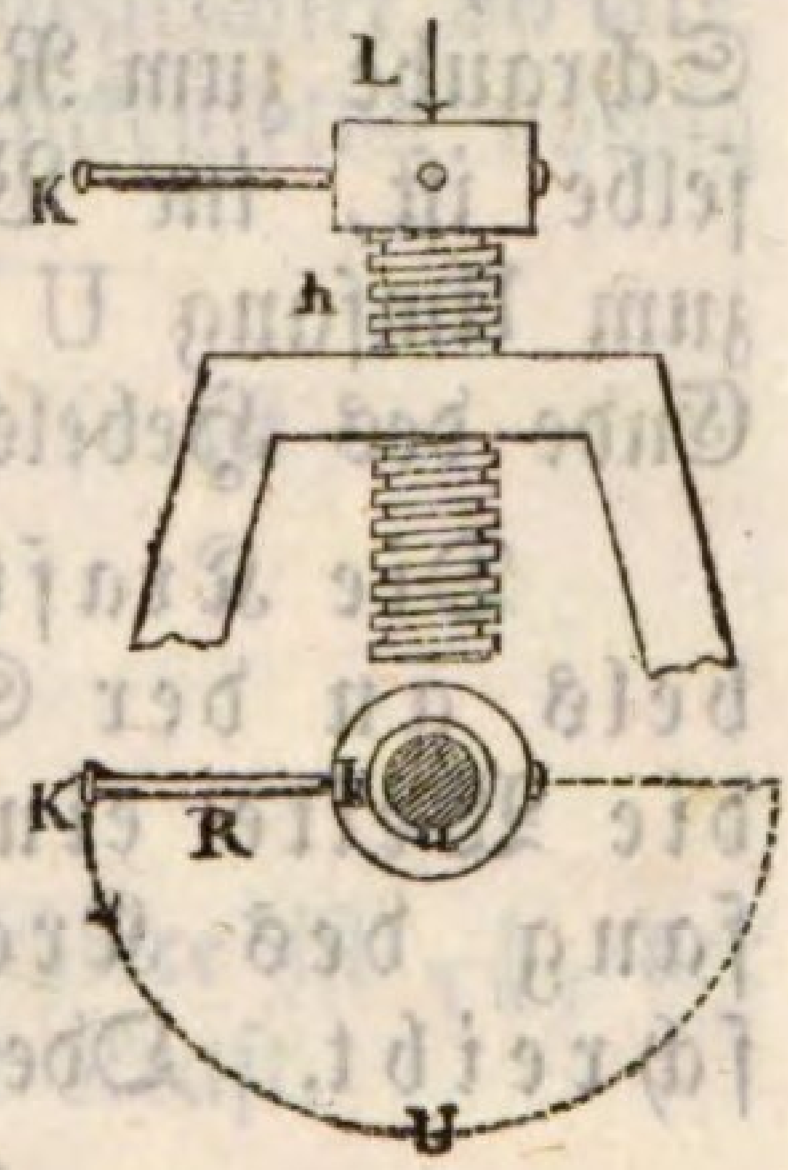
Ein solcher Schraubenbolzen besteht aus 3 Theilen: dem eigentlichen Bolzen mit dem eingeschnittenen Schraubengewinde, dem viereckigen daran geschmiedeten Kopf und der sechseckigen Mutter. Soll ein solcher Schraubenbolzen eine bedeutende Kraft ohne Gefahr des Bruches aushalten können, so müssen die einzelnen Theile gleich stark sein und daher in einem gewissen Verhältniß zu einander stehen. Bei einem richtig construirten Schraubenbolzen soll das Gewinde auf $\frac{1}{8}$ des Bolzendurchmessers tief eingeschnitten sein, so daß der innere Durchmesser des Gewindes noch $\frac{3}{4}$ des Bolzendurchmessers hat. Die Mutter soll 8 Gewinde fassen und die Höhe der Mutter gleich dem Bolzendurchmesser, die Breite der Mutter (die Schlüsselweite) $1\frac{1}{2}$ Bolzendurchmesser betragen. Der Kopf soll gleichfalls $1\frac{1}{2}$ Bolzendurchmesser breit sein, und halb so hoch als breit werden. Hienach erhält ein Schraubenbolzen von 1 Zoll Durchmesser $\frac{3}{4}$ Zoll inneren Gewinddurchmesser, eine Mutter von 1 Zoll Höhe $1\frac{1}{2}$ Zoll Breite, und einen Kopf von $1\frac{1}{2}$ Zoll Breite $\frac{3}{4}$ Zoll Höhe.



Die nebenstehende Figur zeigt einen richtig construirten Schraubenbolzen von 4 Dec.-Linien Durchmesser in natürlicher Größe.

Macht die Schraubenmutter eine ganze Umdrehung um die Spindel, oder die Spindel eine ganze Umdrehung in der Mutter, so wird im ersten Fall die Mutter, im zweiten Fall die Spindel allemal genau um die Weite eines Schraubengangs vorwärts bewegt.

214. Wirkung der Schraube. — Um die Wirkung der Schraube zu finden, soll der Fall betrachtet werden, wo die Mutter fest und die Spindel in derselben beweglich ist. Da die Schraubenfläche eine schiefe Ebene ist und eine auf der Spindel ruhende Last L bei einer Umdrehung der Spindel um die Weite h eines Schraubengangs gehoben wird, und die Kraft k, am Umfang der Schraube, parallel zur Grundfläche des Cylinders wirkt, so ist die Wirkung der Schraube ganz die des zweiten Falls der schiefen Ebene. (Siehe 209).



Es verhält sich daher die am Umfang der Schraube wirkende Kraft k zu der auf der Schraubenspindel ruhenden Last L, wie die Höhe der schiefen Ebene zur Grundlinie derselben, d. i. wie die Weite eines Schraubengangs h zum Umfang der Schraube u; oder

$$k : L = h : u.$$

Mit andern Worten: die Kraft am Umfang der Schraube ist so viel mal kleiner als die Last, als die Weite des Schraubengangs kleiner ist als der Umfang der Schraube.

Die Schraube ist also um so wirksamer, je flacher die Schraubengänge, oder bei der einfachen Schraube je enger die Schraubengänge sind.

Beim Gebrauch der Schraube wirkt jedoch die Kraft nicht, wie vorhin angenommen, am Umfang der Schraube, sondern gewöhnlich ist mit dem Kopf der Schraube ein Hebel in Verbindung, an dessen Ende die Kraft wirkt. Da hiedurch die Kraft k, welche am Umfang der Schraube wirkend gedacht ist, vermehrt wird im Verhältniß vom Radius r der Schraube zum Radius R des Hebels, oder was dasselbe ist, im Verhältniß der Schraubenumfangs u zum Umfang U des Kreises, welchen die Kraft K am Ende des Hebels beschreibt, so verhält sich:

Die Kraft, welche am Ende eines Hebels an der Schraube wirkt, zur Last, wie die Weite eines Schraubengangs zum Umfang des Kreises, welchen die Kraft beschreibt. Oder

$$K : L = h : U.$$

Je kleiner also die Weite des Schraubengangs und je länger der Hebel an der Schraube, desto größer ist die Wirkung der am Ende des Hebels auf die Schraube wirkenden Kraft.

1. Beispiel. Wie viel eiserne Schraubgeschirre sind zur Hebung einer hölzernen Brückenfahrbahn von 120 Ctr. Gewicht nöthig, wenn jedes der Schraubgeschirre 4 Dec. Linien zur Weite des Schraubengangs hat, und am Ende des 1 Schuh langen Hebelarms eine Kraft von 25 Pfd. wirkt?

Antwort: Hier ist $h = 0{,}4''$ Dec., und der Umfang des Kreises, welchen die Kraft beschreibt,

$U = 3{,}14 \times 2 \times 10'' = 62{,}8''$; $K = 25$ Pfd. und L gesucht; also

$$K : L = h : U$$

$$25 : L = 0{,}4 : 62{,}8$$

$$L = \frac{25 \times 62{,}8}{0{,}4} = \frac{25 \times 628}{4} = 157 \times 25 = 3925 \text{ Pfd.}$$

$$L = 39\tfrac{1}{4} \text{ Ctr.}$$

wobei jedoch auf die Reibung keine Rücksicht genommen ist. Rechnet man hiefür $\frac{1}{3}$ ab, so bleibt als wirklich gehobene Last für ein Schraubgeschirr 26 Ctr. Es sind also zur Hebung des Brückenfelds nöthig $\frac{120}{26} = 4{,}6$ oder 5 Schraubgeschirre.

Da $K : L = 0{,}4 : 62{,}8$ so ist

$$K = \frac{0{,}4}{62{,}8} \times L$$

$$= \frac{1}{157} L$$

d. h. die Kraft an diesem Schraubgeschirre ist $\frac{1}{157}$ der Last, und die Last das 157fache der Kraft.

2. Beispiel. Die eiserne Spindel an einer Kelterpresse habe einen Schraubengang von 2″ dd.; durch den Kopf der Spindel gehe ein Hebel von 10′ Länge, welcher mittelst eines an seinem Ende befestigten Seils, das um eine stehende, an Boden und Decke um Zapfen sich drehende Welle von 1′ Durchmesser gewickelt ist, angezogen wird. Durch die stehende Welle geht ebenfalls ein Hebel von 10′ Länge, an dessen beiden 5′ vom Mittelpunkt der Welle abstehenden Enden eine Kraft von 25 Pfd. umtreibt. Mit welcher Kraft drückt die Spindel auf den zu pressenden Körper?

Antwort: Zuerst ist die Kraft am Zugseil zu

suchen. Heißt man diese Z, die Kraft an den zwei Hebeln zusammen K, den Radius der Welle r, den der zwei Hebel R, so ist K = 2 × 25 = 50 Pfd.; r = 0,5′; R = 5′ und es findet nach dem Satz für das Rad an der Welle die Proportion statt:

$$K : Z = r : R \quad \text{oder}$$

$$50 : Z = 0{,}5 : 5' \quad \text{hieraus}$$

$$Z = \frac{50 \times 5}{0{,}5} = 500 \text{ Pfd.} = 5 \text{ Ctr.}$$

Die Zugkraft am Hebel der Schraube ist also 5 Ctr. Nun ist ferner für die Schraube, deren Gangweite = h und deren Hebelarm da, wo die Kraft wirkt, einen Kreisumfang = U beschreibt, wenn L die Wirkung der Spindel oder die Pressung bedeutet,

$$Z : l = h : U,$$

Oder, da Z = 5 Ctr., h = 2″, und U = 2 × 10 × 3,14 = 62,8′ = 62,8 × 12″ = 753,6″ ist:

$$5 : L = 2 : 753{,}6 \quad \text{woraus}$$

$$L = \frac{5 \times 753{,}6}{2} = 1884 \text{ Ctr.}$$

Rechnet man hier für Reibung an der Schraube, Steifigkeit des Seils und Reibung der Welle, um sicher zu gehen, ein Drittel ab, so ist der ausgeübte Druck, welchen zwei an der Welle mit einer Kraft von 25 Pfd. umtreibende Männer durch die Kelterpresse hervorbringen, ohngefähr 1255 Ctr.

Da K = 50, L = 188400 Pfd., so ist

$$K = \frac{50}{188400} L = \frac{1}{3768} L$$

d. h. die Kraft ist der 3768ste Theil der Last und die Last das 3768fache der Kraft.

Daß bei solchen Wirkungen alle Theile der Presse eine entsprechende Stärke haben müssen, ist hienach begreiflich.

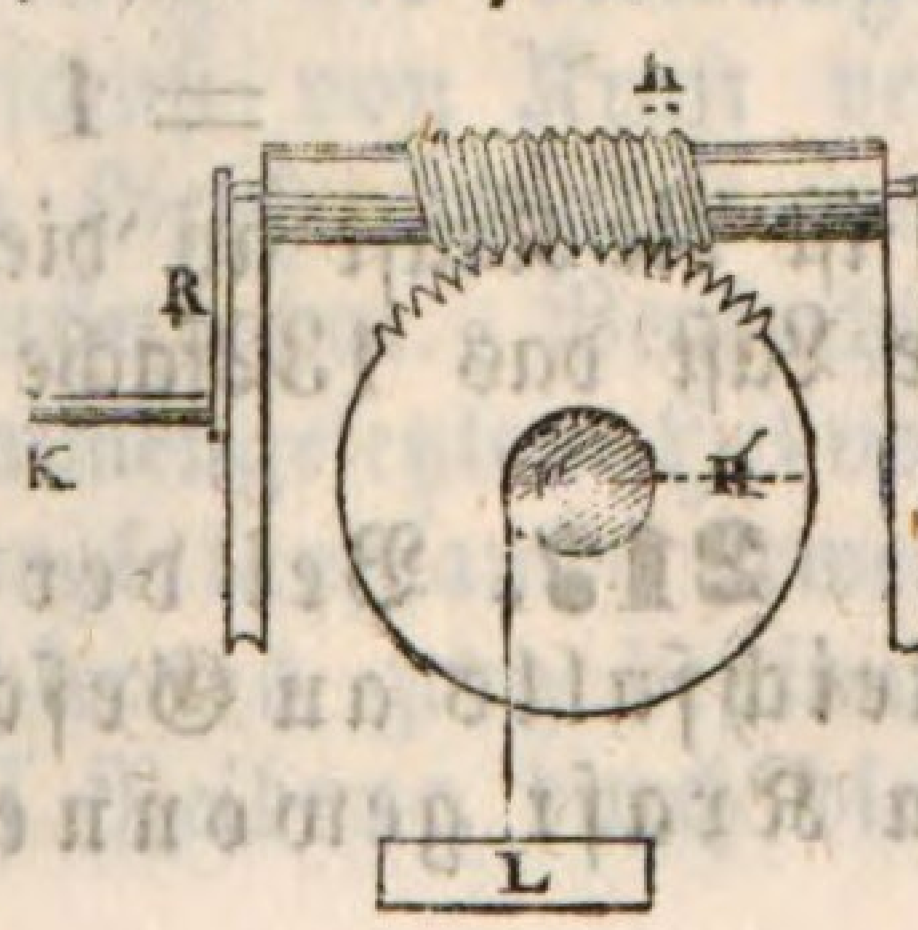
215. Auch an der Schraube geht an Geschwindigkeit verloren, was an Kraft gewonnen wird.

Macht im 1. Beispiel die Kraft am Hebel des Schraubgeschirres eine ganze Umdrehung, oder legt dieselbe 62,8 Zoll zurück, so steigt die Last nur um die Weite eine Schraubengangs oder 0,4 Zoll, die Geschwindigkeit der Last ist also $\frac{62,8}{0,4} = 157$mal kleiner als die der Kraft, genau eben so viel mal, als die theoretische Wirkung der Schraube größer ist als die Kraft.

Im 2. Beispiel muß die Kraft am Hebel der Welle 628 Fuß oder 7536 Zoll zurücklegen, bis die Spindel 2 Zoll niedergeht; die Geschwindigkeit der Last ist also $\frac{7536}{2}$ oder 3768mal kleiner als die der Kraft.

Die nicht unbedeutende Reibung bei der Schraube, welche immer einen größeren Kraftaufwand verlangt, als die Rechnung gibt, ist übrigens in der Praxis, wo es darauf ankommt, daß beim Zusammenpressen von Körpern, beim Heben von Lasten u. s. w. die Schraube nicht wieder rückwärts gleite, von großem Nutzen.

216. Die Schraube ohne Ende. — Besonders kraftsparend ist die Schraube ohne Ende, welche dadurch entsteht, daß man einige Schraubengänge, welche an einer Spindel oder Welle eingeschnitten sind, in ein gezahntes Rad (ein Stirnrad) eingreifen läßt. Nennt man den Radius der Kurbel R, die Weite des Schrauben-



ganges h, den Radius des Rades R′, den der Welle r′, die Kraft an der Kurbel K, und die Last an der Welle L, so verhält sich, wenn Kraft und Last im Gleichgewicht sind:

$$K : L = h \times r' : U \times R' \quad \text{d. h.}$$

Bei der Schraube ohne Ende verhält sich die Kraft zur Last, wie das Produkt aus der Weite des Schraubenganges und dem Radius der Welle zum Produkte aus dem Kreisumfange, welchen die Kurbel beschreibt, und dem Radius des Rades.

Beispiel. Ist der Radius der Kurbel, wie gewöhnlich 14″ dd., die Weite des Schraubengangs 2″, der Radius des Rades 1,5′ = 18″, der der Welle 0,5′ = 6″ und die Kraft 25 Pfd., so ist:

$$25 : L = 2'' \times 6'' : (2 \times 14'' \times 3{,}14) \times 18''$$

$$L = \frac{25 \times 2 \times 14 \times 3{,}14 \times 18}{2 \times 6}$$

$$= 25 \times 14 \times 3{,}14 \times 3$$

$$L = 3297 \text{ Pfd.} = 33 \text{ Ctr.}$$

Mit Rücksicht auf Reibung beträgt die gehobene Last ohngefähr 22 Ctr.

$$\text{Da } K : L = 2 \times 6 : 2 \times 14 \times 3{,}14 \times 18$$

$$= 1 : 131{,}88$$

$$= 1 : 132$$

so ist die Kraft an dieser Maschine $\frac{1}{132}$ der Last, und die Last das 132fache der Kraft.

217. Bei der Schraube ohne Ende geht gleichfalls an Geschwindigkeit verloren, was an Kraft gewonnen wird.

Macht im vorigen Beispiel die Kurbel eine Umdrehung, so wird das Rad um einen Zahn oder 2″ weiter geschoben.

Soll das Rad eine Umdrehung machen, oder die Last um den Umfang der Welle gehoben werden, so muß die Kurbel

$$\frac{2 \times 1{,}5 \times 3{,}14 \times 12}{2}$$

oder $56\frac{1}{2}$ Umdrehungen machen, eben so viel als das Rad Zähne von 2″ Breite hat.

Der Umfang des Kreises, welchen die Kurbel beschreibt, ist $2 \times 3{,}14 \times 14''$; $56\frac{1}{2}$ solcher Umgänge geben einen Weg von $56{,}5 \times 2 \times 3{,}14 \times 14''$; der Umfang der Welle ist $3{,}14 \times 12''$; der Umfang der Welle ist also in den $56\frac{1}{2}$ Kurbelumgängen

$$\frac{56{,}5 \times 2 \times 14}{12} = 132\text{mal enthalten.}$$

Die Last bewegt sich daher 132mal langsamer als die Kraft.

218. Die in den letzten Kapiteln angegebenen Verhältnisse zwischen der Geschwindigkeit von Kraft und Last bei den einfachen Maschinen: Rad an der Welle, Räderwerk, Schraube u. s. w. sind allemal richtig, die Reibung der Maschine mag groß oder klein sein, weil die Ueberwindung des Reibungs-Widerstandes nur einen Ueberschuß von Kraft verlangt, auf das Verhältniß der Geschwindigkeit von Kraft und Last aber keinen Einfluß hat. Beobachtet man also z. B. bei einer zusammengesetzten Hebvorrichtung, daß die Last sich 12mal langsamer bewegt als die Kraft, so kann man hieraus ganz bestimmt schließen, daß ohne Rücksicht auf Reibung durch diese

Maschine mit 1 Ctr. Kraft 12 Ctr. Last gehoben werden könnten; sind aber in Wirklichkeit, um 12 Ctr. zu heben, 125 Pfd. Kraft nöthig, so wird der Ueberschuß von 25 Pfd. zur Ueberwindung der Reibung verwendet, während die Geschwindigkeit der Last noch immer 12mal kleiner ist als die der Kraft.

Siebentes Kapitel.

Dynamik oder Lehre von der Bewegung der Körper. — Freier Fall der Körper. — Fall der Körper auf der schiefen Ebene. — Von der Reibung. —

219. Erklärungen. — Wenn ein Körper in gleichen Zeittheilchen immer gleiche Räume durchläuft, so ist seine Bewegung eine gleichförmige; wenn er sich aber so bewegt, daß er in gleich großen Zeittheilchen gleich viel Zunahme an Geschwindigkeit erhält, so hat derselbe eine gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Gleichförmig verzögert heißt die Bewegung eines Körpers, wenn in gleichen Zeittheilchen die Geschwindigkeit um gleich viel abnimmt.

Die Bewegung eines Schiffes, eines Wagens, eines Uhrzeigers, eines Punktes der Erdoberfläche um

die Axe der Erde ꝛc. ist eine gleichförmige Bewegung; ein fallender Körper, eine abwärts rollende Kugel ꝛc. hat eine gleichförmig beschleunigte, ein aufwärts geworfener Körper dagegen eine gleichförmig verzögerte Bewegung.

220. Gleichförmige Bewegung. — Unter Geschwindigkeit eines gleichförmig bewegten Körpers versteht man den Weg, welchen derselbe in der Zeiteinheit oder in 1 Sekunde zurücklegt. Ist z. B. die Geschwindigkeit eines Flusses 8′, so heißt dieß: das Wasser des Flusses legt in 1 Sekunde einen Weg von 8′ zurück.

Bei der gleichförmigen Bewegung kommen drei Größen in Betracht: 1) die Geschwindigkeit des Körpers, 2) die Zeit, während welcher seine Bewegung betrachtet wird, und 3) der in dieser Zeit zurückgelegte Raum.

Sind 2 von diesen 3 Größen bekannt, so kann die dritte hieraus gefunden werden. Ist z. B. die Geschwindigkeit eines Flusses 8′, so legt ein auf demselben schwimmender Körper in 1 Stunde oder 3600 Sekunden einen Weg zurück von $3600 \times 8 = 28800' = \frac{28800}{12000} = 2{,}4$ Wegstunden.

Bei der gleichförmigen Bewegung wird gefunden:

1) Der zurückgelegte Raum, wenn man die Zeit (in Sekunden) mit der Geschwindigkeit (in Fußen) multiplizirt;

2) die Geschwindigkeit, wenn man den zurückgelegten Raum durch die Zeit dividirt, und

3) die Zeit, wenn man den zurückgelegten Raum durch die Geschwindigkeit dividirt.

Beispiele. 1) Welchen Weg legt ein Eilwagen in 3 Stunden zurück, wenn er auf ebener Straße sich mit einer Geschwindigkeit von 9 Fuß bewegt? Antwort:

3 Stunden sind $3 \times 60 \times 60$ Sek. $=$ 10800 Sek. Der zurückgelegte Weg ist daher $= 10800 \times 9 = 97200' =$ 7 Wegstunden und 8279′.

2) Wie groß ist die Geschwindigkeit einer Lokomotive, welche 16 bayerische Wegstunden in $1\frac{3}{4}$ Stunden zurücklegt? Antwort:

$1\frac{3}{4}$ Stunden sind $1\frac{3}{4} \times 3600$ Sek. $=$ 6300 Sek.

Daher ist die gesuchte Geschwindigkeit

$$= \frac{16 \times 12703}{6300} = 32{,}6' \text{ oder } 33'.$$

3) Wie viel Zeit braucht ein unbelasteter und des Gehens gewohnter Mann zu einer Wegstrecke von 8 bayerischen Stunden, wenn er eine Geschwindigkeit von 5,5′ hat?

$$\text{Antwort:} = \frac{8 \times 12703}{5{,}5} = 18477 \text{ Sek.}$$

$$= 308 \text{ Min.} = 5{,}13 \text{ Stunden.}$$

221. Zur vergleichenden Uebersicht verschiedener Geschwindigkeiten dient folgende Tabelle, bei welcher die deutsche Meile zu 24000 Fuß gerechnet ist.

Benennung des bewegten Körpers.	Geschwindigkeit in bayer. Fuß.
Ein unbelasteter rüstiger Geher bei täglich zehnstündigem Gehen . . .	5
Fußgänger, welcher 1 bayer. Wegstunde (12703′) in 40 Minuten zurücklegt	5,3
Ein mit 25 Pfd. belasteter Mann, bei achtstündigem Gehen	2,5
Ein Mann mit einem mit 2,5 c′ Erde belasteten Schubkarren, bei zehnstündiger Arbeit	3,1
Ein zweispänniger Pferdewagen mit 25 c′ Erde belastet bei zehnstündiger Arbeit	3,4
Ein Mann mit 100 Pfd. belastet eine Treppe steigend	$\frac{1}{3}$
Militär im Reiseschritte, wobei täglich 3 Meilen zurückgelegt werden . .	4
Ein Pferd ohne Belastung im stärksten Trott 8 Stunden des Tages . .	10
Ein Pferd mit einer Last von 150 Pfd.	4
Postpferd 1 Meile in 1 Stunde .	6,6
Gesetzlich bestimmter Gang eines französischen Eilwagens	8,5
Donau in Bayern	5—8′
Inn zwischen Bayern und Tyrol .	5—12′
Main in Bayern (soweit schiffbar bei mittlerem Wasserstande)	4
Rhein bei Basel beim Hochwasser beiläufig	14
Rhein bei Mannheim beim Hochwasser beiläufig	5

Benennung des bewegten Körpers.	Geschwindigkeit in bayer. Fuß.
Rhein bei Basel beim niedersten Wasser	6
„ „ Mannh. „ „ „	$2\frac{1}{2}$
Auf der böhmischen Eisenbahn zwischen Linz und Budweis macht ein Pferd mit 120 Ctr. in $1\frac{1}{2}$ Stunden 1 Meile	6,7
Schnellzüge auf Eisenbahnen . .	54—70
Personenzüge „ „ . .	40—54
Güterzüge „ „ . .	27—40
Berglocomotive „ „ . .	17—20
Dampfschiffe	15—24
Mäßiger Wind	10—15
Sturm	40—60
Luftstrom aus einem 60′ hohen Schornstein	14
Luftstrom aus einem 100′ hohen Schornstein	28
Englische Rennpferde	40—70
Eine Brieftaube	110
Ein Orkan	120
Eine Büchsenkugel	1200—1500
Vierundzwanzigpfündige Kanonenkugel höchstens	2300
Der Schall bei 0° Reaumür . . .	1018
Ein Punkt des Erdäquators um die Erdaxe	1500
Der Mittelpunkt der Erde um die Sonne	96000 = 4 Meilen
Das Licht	42000 Meil.
Die Elektricität im Telegraphendraht	62000 „

222. Gleichförmig beschleunigte Bewegung. — Freier Fall der Körper. — Die Bewegung eines frei fallenden Körpers an der Oberfläche der Erde ist eine gleichförmig beschleunigte, weil die Schwerkraft der Erde der Geschwindigkeit des Körpers in jedem Zeittheilchen einen gleichen Zusatz an Geschwindigkeit ertheilt.

Ein frei fallender Körper durchfällt in der ersten Sekunde einen Raum von 16,804 bayer. Fußen (4,905 Meter), welcher Raum eine Fallruthe genannt wird. In der zweiten Sekunde durchfällt er 3 Fallruthen, oder 3 $\times$ 16,8 Fuß; in der dritten Sekunde 5 Fallruthen, in der vierten Sekunde 7 Fallruthen u. s. w. Zählt man die in den einzelnen Sekunden durchlaufenen Räume zusammen, so erhält man den in den 2 ersten Sekunden durchlaufenen Raum oder die Fallhöhe für 2 Sekunden $= (1 + 3) \times 16,8 = 4$ Fallruthen, den in den 3 ersten Sekunden durchlaufenen Raum oder die Fallhöhe für 3 Sekunden $= (1 + 3 + 5) \times 16,8 = 9$ Fallruthen, den in den 4 ersten Sekunden durchlaufenen Raum oder die Fallhöhe für 4 Sekunden $= (1 + 3 + 5 + 7) \times 16,8 = 16$ Fallruthen u. s. f.

Man erhält also den Raum, welchen ein Körper durchfällt, wenn man die Anzahl der Sekunden, während welcher er fällt, ins Quadrat erhebt, und mit 16,8 multiplizirt.

Bezeichnet man die Zahl 16,804 oder die Fallruthe mit g, die Anzahl der Sekunden, während welcher der Körper fällt, mit t und den in dieser

Zeit durchlaufenen Raum mit h (Höhe, Fallhöhe), so findet man also nach der letztern Regel

$$h = 16{,}8 \times t^2 = g \times t^2.$$

Da der Körper in der zweiten Sekunde allein einen Weg von 3 Fallruthen oder 3g durchläuft, in der ersten aber nur 1 Fallruthe oder 1g, so muß er am Ende der ersten Sekunde eine Geschwindigkeit von 3g — 1g oder 2g gehabt haben; in der dritten Sekunde durchfällt er 5 Fallruthen oder 5g, die Schwere allein treibt ihn aber nur durch 1g, also muß die Endgeschwindigkeit am Ende der zweiten Sekunde 5g — 1g = 4g gewesen sein. Die Endgeschwindigkeiten am Ende der 1., 2., 3., 4. Sekunde sind also 1 × 2g, 2 × 2g, 3 × 2g u. s. w. oder wenn man die Geschwindigkeit am Ende von 1 Sekunde mit v bezeichnet, so ist

$$v = 2 \times g \times t = 2 \times 16{,}804 \times t = 33{,}61 \times t.$$

Diese **Endgeschwindigkeit** v ist der Weg, den der Körper mit einer **gleichförmigen** Bewegung zurücklegen würde, wenn die Schwerkraft aufhörte, auf ihn zu wirken.

Man erhält also die am Ende einer gewissen Anzahl von Sekunden erlangte Endgeschwindigkeit des Körpers, wenn man die Anzahl der Sekunden mit dem doppelten Fallraum in der ersten Sekunde multiplizirt.

223. Folgende Tabelle gibt eine Uebersicht der Zeit, der erlangten Geschwindigkeit und des durchlaufenen Raums für die 10 ersten Sekunden.

Zeit in Sekunden. t	Erlangte Geschwindigkeit. v	Durchlaufener Weg (Fallhöhe). h	Zunahme desselben per Sekunde.
1	1×2 g	1 g	1 g
2	2×2 g	4 g	3 g
3	3×2 g	9 g	5 g
4	4×2 g	16 g	7 g
5	5×2 g	25 g	9 g
6	6×2 g	36 g	11 g
7	7×2 g	49 g	13 g
8	8×2 g	64 g	15 g
9	9×2 g	81 g	17 g
10	10×2 g	100 g	19 g

1. Beispiel. Ein in einen Brunnen fallender Stein braucht 4 Sekunden, bis er aufschlägt, welches ist die Tiefe des Brunnens?

Antwort: Die Anzahl der Sekunden t ist 4, und g = 16,8, also der durchlaufene Raum

$$h = g \times t^2 = 16,8 \times 4^2 = 16,8 \times 16 = 268,8'.$$

2. Beispiel. Welches ist die Geschwindigkeit dieses Steines, wenn er am Boden des Brunnens ankömmt? Antwort:

$$v = 2 \times g \times t = 2 \times 16,8 \times 4 = 134,4'.$$

Ist umgekehrt die Fallhöhe h gegeben, und man will die nöthige Fallzeit t wissen, so dividirt man die Fallhöhe mit dem Fallraum der ersten Sekunde und zieht aus dem Quotienten die Quadratwurzel.

Es ist also

$$t = \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Beispiel. Welche Zeit braucht ein Rammkloẞ, um von einer Höhe von 4′ herabzufallen?

Antwort:

$$t = \sqrt{\frac{h}{g}} = \sqrt{\frac{4}{16,8}} = \sqrt{0,238} = 0,48 \text{ Sek.}$$

Hieraus läßt sich wieder seine Endgeschwindigkeit berechnen, mit welcher er am Pfahl aufschlägt;

$$v = 2 \times g \times t = 2 \times 16,8 \times 0,48 = 16,1 \text{ Fuß.}$$

224. Fallhöhe und Endgeschwindigkeit. Geschwindigkeitshöhe. — Nach den obigen zwei Regeln kann man also, wenn die Fallzeit gegeben ist, Endgeschwindigkeit und durchlaufenen Raum, oder auch, wenn der zurückgelegte Raum und die Endgeschwindigkeit gegeben ist, die hiezu nöthige Fallzeit leicht berechnen.

In der Praxis ist aber selten die Fallzeit in Sekunden bekannt, sondern nur der Fallraum h oder die Höhe, durch welche der Körper fällt, wie beim Rammkloẞ, oder dem über ein Wehr oder aus einer Schütze herabfallenden Wasser, und man muß daher im Stande sein, unmittelbar aus der Fallhöhe die Endgeschwindigkeit finden zu können.

Hiezu führt eine Vergleichung der zusammengehörigen Werthe von h und v in der zweiten und dritten Columne der anderseitigen Tabelle. In 10 Sekunden z. B. ist der Fallraum h = 100 × g

und die dazu gehörige Endgeschwindigkeit $v = 10 \times 2g$. Multiplizirt man den Fallraum $100 \times g$ nochmals mit g, so erhält man $100 \times g^2$ und hieraus die Quadratwurzel $10 \times g$ doppelt genommen gibt $2 \times 10 \times g$ oder $10 \times 2g$, d. i. die entsprechende Endgeschwindigkeit nach 10 Sekunden.

Man erhält also die einer gegebenen Fallhöhe h entsprechende Endgeschwindigkeit v, wenn man diese Fallhöhe h mit g multiplizirt, die Quadratwurzel auszieht und doppelt nimmt. Dieß gibt:

$$v = 2 \times \sqrt{h \times g} = 2 \times \sqrt{16{,}8 \times h}$$

$$= 2 \times \sqrt{16{,}8} \times \sqrt{h} = 2 \times 4{,}09 \times \sqrt{h}$$

oder endlich

$$v = 8{,}19 \times \sqrt{h}, \qquad \text{d. h.}$$

Man findet die einer gewissen Fallhöhe h entsprechende Endgeschwindigkeit v, wenn man die Quadratwurzel aus der Fallhöhe mit 8,19 multiplizirt.

1. Beispiel. Das Wasser eines Baches fällt über ein Wehr von 4′ Höhe frei herab, welche Geschwindigkeit hat das Wasser, wenn es unten ankommt?

Antwort: Hier ist die Fallhöhe $h = 4'$, daher

$$v = 8{,}19 \times \sqrt{4} = 8{,}19 \times 2 = 16{,}38'.$$

2. Beispiel. Welche Endgeschwindigkeit hat ein Rammkloß, welcher aus einer Höhe von 30′ herabfällt?

Antwort: Hier ist $h = 30'$, daher

$$v = 8{,}19 \times \sqrt{30} = 8{,}19 \times 5{,}477 = 44{,}9'.$$

Umgekehrt, um aus der Endgeschwindigkeit v die Fallhöhe zu finden, beobachtet man in der Tabelle, daß z. B. für 9 Sek. $v = 9 \times 2g$ ist; dieses zum Quadrat erhoben gibt $81 \times 4g^2$ und dieses mit 4g dividirt gibt $81 \times g$ den Fallraum für 9 Sekunden.

Man erhält also aus der gegebenen Endgeschwindigkeit v die entsprechende Fallhöhe h, wenn man das Quadrat der Geschwindigkeit mit 4g oder $4 \times 16{,}8$ dividirt. Dieß gibt:

$$h = \frac{v^2}{4 \times g} = \frac{v^2}{4 \times 16{,}8} = 0{,}0148 \times v^2.$$

Man nennt die einer gewissen Endgeschwindigkeit v zugehörige Fallhöhe h, durch welche der Körper gefallen sein muß, um jene Endgeschwindigkeit zu erlangen, die Geschwindigkeitshöhe.

Die letzte Regel heißt daher:

Man findet die einer gewissen Endgeschwindigkeit v zugehörige Fallhöhe h (Geschwindigkeitshöhe), wenn man das Quadrat der Geschwindigkeit mit 0,0148 multiplizirt.

1. Beispiel. Von welcher Höhe muß ein Körper fallen, damit er eine Endgeschwindigkeit von 50′ erhalte?

Antwort: Hier ist $v = 50'$, daher:

$$h = 0{,}0148 \times v^2 = 0{,}0148 \times 50^2,$$
$$= 0{,}0148 \times 2500 = 37 \text{ Fuß}.$$

2. Beispiel. Aus welcher Höhe muß das Wasser über ein Wehr, oder aus einer Schützen-

öffnung herabfallen, damit es eine Geschwindigkeit von 9 Fuß erhalte?

Antwort: Hier ist v = 9, daher die gesuchte Geschwindigkeitshöhe

$$h = 0{,}0148 \times 9^2 = 1{,}1988 \text{ Fuß.*)}$$

Die Erscheinung eines senkrecht in die Höhe geworfenen Körpers ist gerade die umgekehrte von dem eines fallenden Körpers. Wird ein Körper mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit in die Höhe geworfen, so wird seine Geschwindigkeit allmälig durch die Anziehungskraft der Erde vermindert, bis sie zuletzt gleich Null wird, alsdann hat der Körper den höchsten Punkt erreicht und fällt nun nach den eben entwickelten Gesetzen des freien Falls. Aufwärts war die Geschwindigkeit eine gleichförmig verzögerte, abwärts ist sie eine gleichförmig beschleunigte. Ein mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $2 \times g$ oder $2 \times 16{,}8 = 33{,}61$ Fuß senkrecht in die Höhe geworfener Körper erreicht (vergl. die Tabelle) eine Höhe von $1 \times g$ oder 16,8 Fuß und kommt beim Niederfallen wieder mit einer Geschwindigkeit von 33,61 Fuß an. Die Zeit des Niederfallens und Aufsteigens ist dabei die gleiche, nämlich 1 Sekunde.

225. Rammmaschine. — Die Endgeschwindigkeit eines fallenden Körpers wird im Bauwesen als vorzügliche Hülfeleistung bei den Rammarbeiten benützt.

Eine Ramme, Rammmaschine, Schlagwerk ist eine Maschine, mittelst welcher lange und starke Pfähle, welche bei Grund- und Wasserbauten zur Befestigung des Grundes dienen oder schwere

---

*) Von dem Verhältniß zwischen der Fallhöhe und der entsprechenden Endgeschwindigkeit wird eine sehr nützliche Anwendung bei der Lehre von der Bewegung des Wassers und bei der Berechnung der Wasserkraft gemacht, weßhalb besonders der Mühlarzt gut thun wird, sich mit den Regeln in Nr. 224 vertraut zu machen. (Vergl. das neunte und zehnte Kapitel.)

Bauwerke zu tragen haben, in den Erdboden geschlagen werden.

Das Wesentliche einer solchen Maschine ist ein Klotz von Eisen oder Eichenholz (Rammbär, Hoyer) von 6 bis 20 Zentner Schwere, welcher mittelst eines starken Seiles (wenigstens $1\frac{3}{4}$ bis 2″ dick und an 100 bis 150 F. lang) an einem vertikalen Gerüste aufgezogen und dann losgelassen (niedergeschnellt) wird. Der Klotz trifft den Kopf des darunter stehenden Pfahls und treibt ihn in die Erde ein. Die Säule, an welche der Klotz niedergleitet, und welche gewöhnlich durch den Klotz hindurchgeht, heißt die Rennsäule. Das Seil oder Rammtau ist am Klotz befestigt, und schlingt sich im obern Theil der Maschine um eine Rolle (Rammscheibe) von 15″ Durchmesser. Der Klotz wird durch die vereinigte Kraft mehrerer Arbeiter, welche am Ende des Seils ziehen, in die Höhe gehoben. Man rechnet gewöhnlich auf einen Mann für die Ausdauer 25 Pfd., also auf jeden Zentner Schwere 4 Mann. Die Kraft eines jeden Mannes wird durch eine besondere Zugleine dem Rammtau mitgetheilt. Die Zugleinen sind unten mit einem kleinen Knebel, einem walzenförmigen $1\frac{1}{2}$′ langen, $\frac{5}{4}$″ dicken Handgriffe versehen, woran der Arbeiter zieht. Die Zahl der Schläge, welche ohne abzusetzen auf einmal mit dem Rammbär gemacht werden, nennt man eine Hitze. Gewöhnlich besteht eine Hitze aus 30 Schlägen, nach welcher den Arbeitern Zeit zum Ausruhen gegeben wird. Das Aufziehen des Rammbärs, so wie das Nachlassen des Seils muß gleichmäßig und übereinstimmend geschehen, weßhalb bei jeder Ramme ein Aufseher angestellt ist, welcher das Zeichen zum Aufziehen und die Zahl der Schläge angiebt. Der Aufseher hat auch noch die

Binde- und Flortaue zum An- und Umbinden (Anfloren) der Pfähle so zu handhaben, daß die Pfähle in lothrechter Richtung erhalten werden.

Eine solche Rammmaschine heißt eine Zugramme. Zum Einrammen sehr großer Pfähle und zum Nachschlagen der mit der Zugramme bereits auf eine gewisse Tiefe eingerammten Pfähle bedient man sich der Kunstrammen. An diesen wird durch 2—4 Arbeiter mittelst eines durch eine Kurbel in Bewegung gesetzten Getriebes, das in ein gezahntes Rad greift, auf dessen Welle das Seil sich aufwickelt, ein 6—10 Ctr. schwerer Rammklotz auf eine Höhe von 15—18 gehoben, wo er sich von selbst ablöst und niederfällt.

Was jedoch an der Kunstramme an Kraft gewonnen wird, geht wieder an Geschwindigkeit verloren, da an der gewöhnlichen Zugramme 15—20 Schläge geschehen, bis an der Kunstramme ein Schlag stattfindet.

Rammen, die von einem oder von zwei Arbeitern gehandhabt werden, und zu diesem Behufe mit Handhaben versehen sind, um einen Erdboden oder ein neu gelegtes Steinpflaster fest zu stampfen, werden Handrammen genannt.

Die Wirkung eines Rammklotzes ist offenbar um so größer, je schwerer der Klotz und je größer seine Endgeschwindigkeit beim Aufschlagen auf den Pfahl ist. Obwohl nun theoretisch richtig durch Vergrößerung der Hubhöhe beim Rammklotz dessen Endgeschwindigkeit und folglich auch seine Stoßkraft vermehrt wird, so ist es aus einem andern Grunde dennoch unvortheilhaft, große Fallhöhen beim Rammklotz anzuwenden, was aus folgendem Beispiel hervorgehen wird.

Die Stoßkraft eines schwimmenden Eisfeldes von 250 Ctr. Gewicht, das sich mit einer Geschwindigkeit von 4 Fuß bewegt,

ist 4 × 250 oder 1000 Ctr., die einer 50 Pfd. schweren Kanonenkugel, welche sich mit 2000 Fuß Geschwindigkeit bewegt, ist 50 × 2000 Pfd. = 1000 Ctr., also ebenso groß. Theoretisch sind diese beiden Kräfte gleich, ihre Wirkung ist aber eine sehr verschiedene; denn während die erste Kraft im Stande ist, ein ganzes hölzernes Brückenjoch mit sich zu nehmen, wird durch die zweite nur ein Theil desselben zersplittert. Der Grund hievon liegt in der Nothwendigkeit der Mittheilung der Bewegung, wozu immer eine gewisse Zeit erfordert wird. Im ersten Fall ist die Mittheilung der Bewegung in alle Theile des Brückenjochs schneller als die Bewegung der Eisdecke selbst, daher bewegen sich alle Theile gleichzeitig durch den Stoß vorwärts, d. h. das Joch geht als ein Ganzes fort; im zweiten Fall ist die Mittheilung der Bewegung im Holz langsamer als die der Kugel, daher können nur die zunächst getroffenen Theilchen nachgeben und werden zerstört, ohne die übrigen in Bewegung zu setzen. Ein Gleiches gilt, wenn auch in geringerem Maß, von dem Rammklotz und dem einzutreibenden Pfahl. Eine zu große Geschwindigkeit des Klotzes (in Folge einer großen Fallhöhe) theilt sich nur wenig oder gar nicht der Spitze des Pfahls mit und bringt eine Compression des obern Theils des Pfahls hervor, wodurch, da das Holz elastisch ist, der Klotz wieder in die Höhe geschnellt wird, sohin eine bedeutende Stoßkraft verloren geht. Der Pfahl wird also um so besser gehen, je weniger der Klotz zurückspringt. Aus diesem erhellt, daß es vortheilhafter ist, möglichst schwere Rammklötze und kleine Fallhöhen anzuwenden, als leichte Klötze und große Hubhöhen, obwohl theoretisch die Wirkung in beiden Fällen dieselbe sein kann.

Dieses Prinzip der schweren Rammklötze mit kleinen Hubhöhen ist mit großem Erfolg bei den überaus wirksamen Dampframmen angewendet.

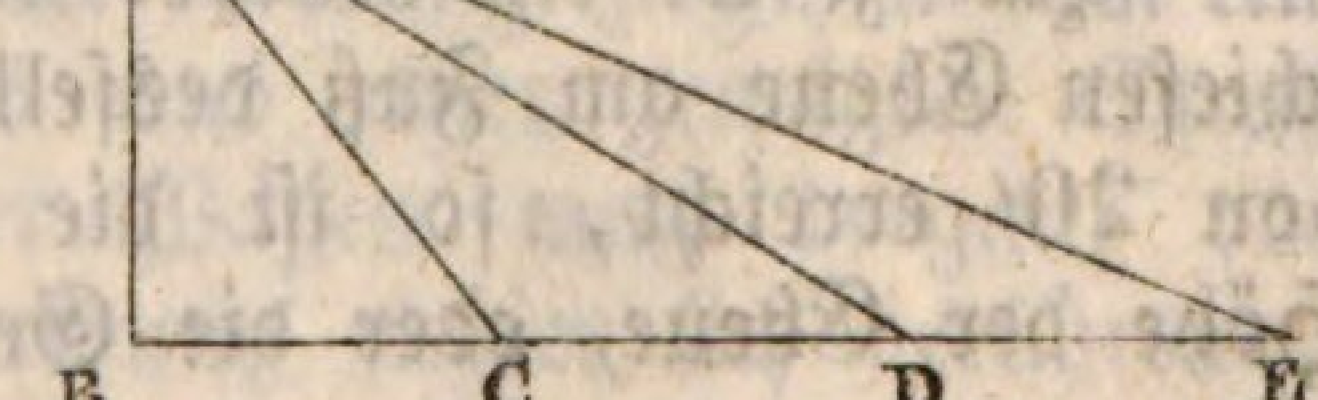
Beim württembergischen Eisenbahnbau wurde eine solche Dampframme in Anwendung gebracht. Sie war von Nasmyth und Gaskell aus England und kostete ohne Transport 9120 fl. Mit derselben wurden 40′ lange 14zöllige Pfähle in 8—10 Minuten eingerammt, eine Arbeit, welche mit einem gewöhnlichen Schlagwerk 8—10 Stunden Zeit erfordert. Die Rammvorrichtung auf dem Pfahl wog 50 Ctr., der Klotz allein 20 Ctr. Die Fallhöhe des Klotzes betrug $2\frac{1}{2}$—3 Fuß, die Zahl der Schläge per Minute 80—100, und der Kohlenverbrauch per Tag 8 Ctr. Ein mit dieser Dampframme eingerammter Pfahl kostete nur den

vierten Theil des auf gewöhnliche Weise eingetriebenen, die große Zeitersparniß ganz ungerechnet.

Eine ähnliche Dampframme, beim Hafenbau von Devenport angewendet, schlug 60—70′ lange 12—14″ starke Pfähle in 2—3 Minuten 32—40′ ein tief. Die Vorrichtung auf dem Klotz wog dabei 165 Ctr., der Klotz allein 70 Ctr., welcher 70—80 Schläge per Minute machte. Das Befestigen des Pfahls und Anbringen der Vorrichtung dauerte 20 Minuten und es wurden in 10 Stunden 16—32 Pfähle eingerammt.

226. Fall der Körper auf der schiefen Ebene. Geschwindigkeitshöhe. — Wenn ein Körper auf einer schiefen Ebene AC, AD, AE herabfällt, so bewegt er sich gleichfalls nach den Gesetzen der gleichförmig beschleunigten Bewegung. Der Fall auf der schiefen Ebene wird am besten mit jenem durch den entsprechenden senkrechten Raum oder die Höhe AB der schiefen Ebene verglichen. Hier gelten nun hauptsächlich folgende 2 Gesetze (Reibung ungerechnet):

1) Die Fallzeit auf der schiefen Ebene AC verhält sich zu jener durch die senkrechte Höhe AB, wie die Länge der schiefen Ebene AC zur senkrechten Höhe AB.



Wenn also 3 Körper auf den schiefen Ebenen AC, AD, AE herablaufen, so brauchen sie um so längere Zeit, um an den Fuß der schiefen Ebene zu gelangen, je länger die schiefe Ebene gegenüber der senkrechten Höhe ist. Ist z. B. AE 2mal so groß und AC $1\frac{1}{2}$mal so groß als AB, so braucht auch der Körper auf AE 2mal so viel,

und auf AC $1\frac{1}{2}$mal so viel Fallzeit, als der von A nach B senkrecht herabfallende Körper.

Wichtiger ist dagegen folgendes Gesetz:

2) Die Endgeschwindigkeit, mit welcher ein Körper beim Fall auf der schiefen Ebene am Fuß derselben ankommt, ist gleich der Endgeschwindigkeit des Körpers, welcher durch die senkrechte Höhe der schiefen Ebene frei herabfällt.

Wenn Körper auf den schiefen Ebenen AC, AD, AE herabrollen, so kommen dieselben in C, D, E genau mit derselben Endgeschwindigkeit an, mit welcher der von A nach B frei herabfallende Körper in B ankommt.

Wenn daher ein Körper mit einer gewissen Endgeschwindigkeit am Fuß einer schiefen Ebene AE ankommt, so gibt es allemal eine senkrechte Höhe AB oder h, durch welche der Körper fallen müßte, um jene Geschwindigkeit zu erhalten. Diese senkrechte Höhe, welche die Geschwindigkeitshöhe heißt, ist nach 224

$$h = 0{,}0148 \times v^2.$$

Hat z. B. ein Körper durch den Fall auf einer schiefen Ebene am Fuß desselben eine Geschwindigkeit von 20′ erreicht, so ist die entsprechende senkrechte Höhe der Ebene, oder die Geschwindigkeitshöhe

$$h = 0{,}0148 \times 20^2 = 5{,}92 \text{ Fuß}.$$

Das frei fließende Wasser in Flüssen und Canälen ist als ein auf einer schiefen Ebene herabrollender Körper zu betrachten.

Wenn daher das Wasser eines Flusses eine Geschwindigkeit von 6 Fuß hat, so ist die dieser Geschwindigkeit entsprechende Geschwindigkeitshöhe

$$h = 0{,}0148 \times 6^2$$
$$= 0{,}0148 \times 36 = 0{,}53 \text{ Fuß},$$

d. h. ein aus der Höhe von $\frac{1}{2}$ Fuß senkrecht herabfallendes Wasser hat die gleiche Endgeschwindigkeit wie das Wasser des Flusses.

Auf diese Art ist man im Stande, die Wasserkraft eines frei fließenden Wassers auf die einer senkrecht herabfallenden Wassermasse zurückzuführen, oder die Wasserkraft eines frei fließenden Flusses mit der eines gestauten und senkrecht überfallenden Wassers zu vergleichen. (Siehe 11. Kapitel.)

227. Von der Reibung. — Wenn zwei Körper unter einem gewissen Druck über einander hingleiten, so greifen die an ihrer Oberfläche befindlichen Unebenheiten in einander ein, und verursachen einen Widerstand, welchen man die Reibung nennt. Die Reibung ist als eine Kraft anzusehen, welche in der Ebene der beiden sich reibenden Flächen und zwar immer der Richtung der Bewegung entgegenwirkt, gleichviel, in welcher Richtung diese erfolgt. So ist z. B. die Reibung zwischen dem Umfang eines Wagenrades und einer geneigten Straße ganz die nemliche, der Wagen mag bergauf oder bergab gehen. Die Reibung zweier sich berührenden Körper hängt sowohl von dem Druck, mit welchem beide Flächen zusammengepreßt werden, als auch von der Beschaffenheit der Oberflächen und der Materie des Körpers ab. Da sie in vielen Fällen ein großes Hinderniß der Bewegung und immer die

Folge der Unebenheiten ist, welche jeder auch noch so glatte Körper an seiner Oberfläche besitzt, so vermindert man ihre Wirkung 1) durch Poliren der Oberflächen, 2) durch Ausfüllen der Unebenheiten mittelst Schmiere, und 3) durch Verwandlung der gleitenden Reibung in eine rollende.

Zur Ermittelung der Größe der Reibung wurden vielfache Versuche angestellt. Zu diesem Zwecke legte man die beiden sich reibenden Körper horizontal auf einander, und brachte an dem oberen in horizontaler Richtung eine Schnur an, welche über eine Rolle ging, und mit einem Gewicht belastet war. Ohne das Vorhandensein der Reibung würde das kleinste Gewicht im Stande sein, den Körper in Bewegung zu versetzen. Dieß ist aber nicht der Fall, und je nach der Beschaffenheit und dem Gewicht des Körpers und dem angewandten Schmiermittel ist ein größeres oder kleineres Gewicht nothwendig, um den Widerstand der Reibung zu überwinden, oder den Körper in Bewegung zu versetzen. Das Verhältniß dieses Gewichtes zum Gewicht des bewegten Körpers; oder ein Bruch, welcher zum Zähler das angehängte Gewicht, zum Nenner das Gewicht des bewegten Körpers hat, heißt nun der Reibungs-Koeffizient.

War z. B. der zu bewegende Körper 10 Pfd. schwer, und das angehängte Gewicht, welches ihn in Bewegung versetzte, 2 Pfd., so war der Reibungs-Koeffizient $= \frac{2}{10} = 0,2$; d. h. die Reibung des bewegten Körpers auf seiner Unterlage betrug $\frac{2}{10}$ des senkrechten Druckes.

Auf diese Art hat man nun folgende allgemeine Gesetze über die Reibung gefunden:

1) die Reibung ist proportional dem Druck der beiden sich reibenden Flächen. Wird also ein Körper 2, 3, 4mal so stark gegen seine Unterlage gedrückt, so wird die Reibung die 2, 3, 4fache. Liegen die sich reibenden Flächen horizontal, so ist es das Gewicht des sich bewegenden Körpers, welches die Größe der Reibung bedingt. Auf derselben horizontalen Straße bringt also ein 2, 3, 4mal schwererer Wagen eine 2, 3, 4mal so große Reibung hervor, und erfordert daher auch eine ebenso viel mal größere Zugkraft.

Wenn ein schwerer unbeladener Wagen auf einer horizontalen Straße mit dem Druck einer Hand nicht von der Stelle geschoben werden kann, so ist daran nicht das Gewicht des Wagens an und für sich, sondern nur die aus dem Gewicht hervorgehende Reibung zwischen dem Rad und den Steinen auf der Straße und an der Radachse Schuld. Dreht man die Räder desselben Wagens sammt Achsen genau auf der Drehbank ab, und stellt man den Wagen auf eine Eisenbahn, so wird er mit Leichtigkeit mit dem Druck einer Hand bewegt werden können. Hieraus ersieht man, daß, um einen Körper auf einer horizontalen Unterlage fortzubewegen, nicht das absolute Gewicht des Körpers, sondern nur die von diesem verursachte Reibung zu überwinden ist. Die Leichtigkeit des Transports auf Eisenbahnen beruht vorzugsweise auf der bedeutenden Verminderung der Reibung, welche ohngefähr 10mal kleiner ist als auf Straßen. —

2) Die Reibung ist unabhängig von der Größe der Berührungsfläche. Dieser etwas auffallend scheinende Satz erklärt sich mit Hilfe des

ersten. Je größer die Reibungsfläche, desto größer ist allerdings auch die Zahl der sich reibenden Theile, desto kleiner ist aber auch der Druck auf jedes dieser Theilchen. Die Reibung eines Ziegelsteins gegen seine Unterlage oder die Kraft, welche nöthig ist, denselben auf seiner Unterlage fortzuschieben, ist daher immer die nemliche, auf welche Seite man denselben auch auflegen mag.

3) Die Reibung der Ruhe ist größer als die der Bewegung; d. h. die Reibung beim Beginn der Bewegung ist größer, als jene während der Bewegung.

4) Geschmierte Flächen verursachen weniger Reibung als ungeschmierte; wobei es jedoch weniger auf die Natur des Körpers als auf die der Schmiere ankommt.

5) Ungleichartige Stoffe bewirken im Allgemeinen weniger Reibung als gleichartige.

6) Die rollende oder wälzende Reibung ist bedeutend kleiner als die gleitende oder schiebende. Hierauf beruht der Nutzen der Räder, das Bewegen einer großen Last auf Walzen oder noch besser Kugeln, und die Anwendung der Bremsen und Hemmschuhe.

228. Die Untersuchung der in den früheren Kapiteln betrachteten einfachen Maschinen 2c. mit Rücksicht auf Reibung ist nicht einfach und setzt höhere mathematische Kenntnisse voraus.

Der Praktiker kann sich begnügen, den dort er-

haltenen Resultaten von Kraft und Last einen gewissen Bruchtheil etwa $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{4}$ mit Rücksicht auf Reibung zuzugeben, ohne Gefahr zu laufen, einen großen Fehler zu begehen.

Um dieß besser beurtheilen zu können, folgen hier noch die wichtigsten (mittleren) Resultate der Versuche über die Größe des Reibungs-Koeffizienten der Ruhe für verschiedene Körper.

Stoffe.	Koeffizient der gleitenden Reibung.		
	Trocken	Mit Wasser	Geschmiert
Holz auf Holz . .	0,50	0,68	0,36
Metall „ Metall .	0,18	—	0,12
Holz „ Metall .	0,60	0,65	0,11
Leder „ Gußeisen	0,50	0,70	0,13
Holz „ Stein . .	0,64	—	—
Stein „ Stein . .	0,70	—	—
Stein „ Schmiedeisen . .	0,46	—	—

Die rollende Reibung metallener Zapfen in Lagern beträgt im Mittel bei gehöriger Schmiere 0,07 bis 0,1 oder $\frac{7}{100}$ bis $\frac{1}{10}$ des Drucks.

Der Reibungskoeffizient oder der Widerstand der Wagenräder auf Straßen beträgt a) auf einer schlechten Straße $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{10}$; b) bei einer sehr guten Straße $\frac{1}{40}$ bis $\frac{1}{50}$; im Mittel $\frac{1}{15}$ bis $\frac{1}{20}$ der Last, auf Eisenbahnen $\frac{1}{180}$ bis $\frac{1}{240}$, durchschnittlich $\frac{1}{200}$ der Last; eben so groß ist die nöthige Zugkraft. Eine und dieselbe Kraft zieht also auf einer Eisen-

bahn 10 bis 12 mal so viel als auf einer Straße. Hohe Räder verursachen weniger Reibung als niedere. Die Reibung eines Schlittens auf einer guten Schneebahn beträgt $\frac{1}{30}$ der Last.

Beispiele. Welche Zugkraft ist zur Fortschaffung einer Last von 20 Ctr. nöthig a) mittelst eines Wagens auf einer Straße; b) auf einem Schlitten und einer Schneebahn, und c) auf einer Eisenbahn?

Antwort: Nach dem Vorhergehenden ist die nöthige Zugkraft a) auf einer Straße $= \frac{1}{15} \times 20 =$ 1,33 Ctr. = 133 Pfd.; b) auf der Schneebahn $= \frac{1}{30} \times 20 = 0,66$ Ctr. = 66 Pfd. und c) auf einer Eisenbahn $= \frac{1}{200} \times 20 = 0,1$ Ctr. = 10 Pfd.

Weitere Beispiele siehe 208.

Obwohl die Reibung da, wo es darauf ankommt, Lasten zu bewegen, einen großen nachtheiligen Einfluß hat, und deßhalb durch Poliren und Schmieren der Maschinentheile, der Zapfen, Schrauben, Räder &c. möglichst verringert werden muß, so ist dieselbe doch in vielen Fällen von großem Nutzen. Ohne die Reibung würde kein Nagel, keine Klammer befestigt werden können, wäre kein Festhalten mit einer Zange, kein An- und Festbinden mittelst Seilen, keine Bewegung durch Rollen und Riemen, kein Bremsen durch Hemmschuhe &c. möglich. Ja selbst das Gehen und Stehen würde zur Unmöglichkeit, wie dieß schon aus der Schwierigkeit, auf Eis oder Glatteis zu gehen, hervorgeht.

Auf der Reibung der Steine beruht die Erscheinung, daß die Gewölbsteine eines Gewölbes beim Aufmauern desselben bis zu einer gewissen Höhe über dem Widerlager frei liegen bleiben, ohne herabzuglei-

ten. Dieß soll nach Rondelet bei gut zugerichteten Steinen erst bei einem Winkel von 28° — 36° stattfinden.

229. Noch ein Hinderniß der Bewegung ist die **Steifigkeit der Seile.** — Wenn ein Seil um eine Rolle oder eine Walze gebogen werden soll, so muß ein Theil der Kraft lediglich dazu verwendet werden, das Seil zu biegen. Man hat durch vielfache Versuche gefunden, daß dieser Widerstand gegen das Biegen, welchen man die Steifigkeit der Seile nennt, desto größer ist, je dicker das Seil, je kleiner der Durchmesser der Rolle, und je stärker die Spannung des Seiles ist.

Um die Wirkung dieses Hindernisses zu verringern, soll man daher möglichst große Rollendurchmesser anwenden, so z. B. bei der Rammmaschine. —

Achtes Kapitel.

Hydrostatik oder Lehre vom Gleichgewicht des Wassers.

230. Erklärungen. — Alle Erscheinungen flüssiger Körper beruhen auf der Schwere und der leichten Verschiebbarkeit ihrer Theile. In Folge dieser Eigenschaft müssen alle Flüssigkeiten, wenn sie

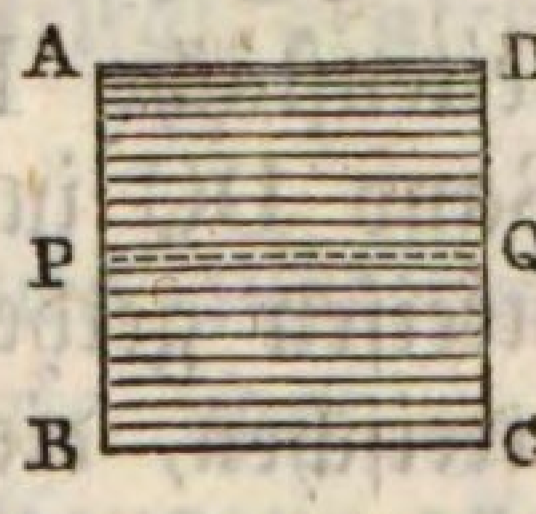
auf eine horizontale Ebene gegossen werden, zerfließen, und auf einer schiefen Ebene herabfließen; die oberen Theile drücken nämlich durch ihre Schwere auf die unteren, und diese weichen vermöge ihrer leichten Verschiebbarkeit aus. Wasser kann mithin nur in Gefäßen angehäuft werden, und seine Oberfläche muß im Zustand der Ruhe horizontal sein; diese horizontale Oberfläche heißt: der Spiegel der Flüssigkeit, Wasserspiegel oder das Niveau.

Weil die horizontale Lage der Oberfläche des Wassers in Gefäßen eine Folge der Schwere oder der Anziehungskraft der Erde ist, so müssen alle Wassertheilchen der Oberfläche eine gleiche Entfernung vom Mittelpunkt der Erde haben; die Oberfläche eines Sees ist daher gekrümmt, und die des Meeres eine Kugelfläche.

Das in einem Gefäße eingeschlossene Wasser übt durch sein Gewicht sowohl auf den Boden als auch auf die Seitenwände einen Druck aus, welcher mit der Tiefe unter dem Wasserspiegel zunimmt, und ein unter das Wasser getauchter Körper erleidet von allen Seiten (auch von unten) einen Druck des Wassers. Ist ein nicht sehr großer Körper ganz von Wasser umgeben, so ist der Druck von oben und unten, eben so von rechts und links, von vorn und hinten gleich groß, daher der Körper im Gleichgewicht und eine Wirkung des Wasserdrucks nicht zu bemerken ist. Erfolgt dagegen der Druck des Wassers nur von einer Seite, so tritt die Wirkung des Wasserdrucks deutlich hervor. Die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser unter der etwas aufgezogenen Radschütze einer Mühle hervorschießt, ist die Folge des einseitigen

Drucks des vor der Schütze befindlichen Stauwassers. Das Durchsickern des Wassers an Wehren, Schleußenthoren, das Aufsprudeln von natürlichen Quellen 2c. ist die Folge des einseitigen Druckes einer gestauten Wassermenge. Diesen Wasserdruck (hydrostatischen Druck) kennen zu lernen, ist für den Bautechniker, insbesondere für den Zimmermann, Mühlarzt, dann für Wasserbauverständige von der größten Wichtigkeit.

231. Vom Wasserdruck. — Der Druck des Wassers in einem Gefäße ist unmittelbar unter dem Wasserspiegel am kleinsten, wird mit der Tiefe größer und ist unmittelbar über dem Boden am größten. Hat man z. B. ein würfelförmiges mit Wasser gefülltes Gefäß ABCD, dessen Seiten AB = BC = 1′ sind, so hält dasselbe einen Kubikfuß Wasser. Der Druck des Wassers auf den Boden BC ist offenbar dem Gewicht der ganzen Wassersäule ABCD gleich, oder gleich dem Gewicht von ein Kubikfuß Wasser oder 44,4 Pfd. Halbirt man die Höhe des Gefäßes, so ist der Druck

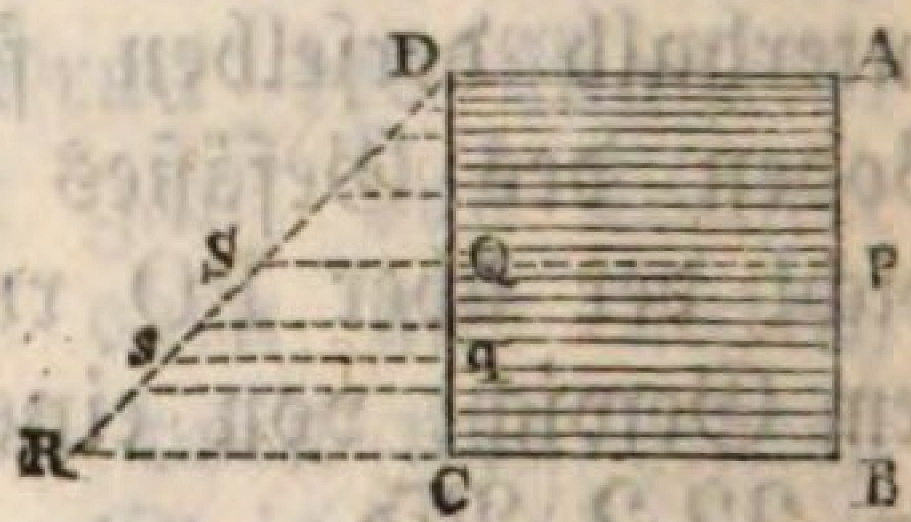


auf die horizontale Wasserschichte PQ, da das Wasser unterhalb derselben für sich in Ruhe ist, und vom Boden des Gefäßes getragen wird, gleich dem Gewicht der über PQ ruhenden Wassersäule, d. i. gleich dem Gewicht von einem halben Kubikfuß Wasser oder = 22,2 Pfd.

Nun hat aber das Wasser die Eigenschaft, daß es unzusammendrückbar ist, und also jeder auf ein Wassertheilchen ausgeübte Druck sich nach allen Seiten hin fortpflanzt. Es folgt hieraus, daß der Wasserdruck auf die Wandtheilchen rings um die Schichte AD = 0, der Druck auf eine kleine Fläche

z. B. 1 □″ Dec. oder $\frac{1}{100}$ □′ Seitenwand ringsum bei PQ = $\frac{1}{100}$ des oben berechneten Gesammtdrucks auf PQ = $\frac{1}{100}$ × 22,2 Pfd. = 0,22 Pfd. oder 7 Loth; und am Umfang der Seitenwand am Boden = $\frac{1}{100}$ des Gesammtdrucks auf BC = $\frac{1}{100}$ × 44,4 Pfd. = 0,44 Pfd. = 14 Loth ist, wie auf einen □″ Dec. am Boden selbst. Der Seitendruck auf ein kleines Flächentheilchen an der Wand ist also eben so groß, als auf ein gleiches Flächentheilchen einer horizontalen Wasserschichte in derselben Höhe oder gleich dem Gewicht einer Wassersäule, welche die gedrückte Fläche zur Grundfläche und die Entfernung bis zum Wasserspiegel zur Höhe hat.

232. Um den Wasserdruck auf die ganze Seitenfläche DC zu erhalten, denkt man sich die Wand DC in eine große Zahl schmaler horizontaler Streifen getheilt und sucht den Wasserdruck für jedes Streifchen, die Summe gibt den Druck auf die ganze Fläche. Theilt man der Einfachheit wegen die Höhe DC in sechs gleiche Theile, so ist die Druckhöhe des Wassers für den tiefsten Punkt der Wand C = CD, oder wenn man CD nach CR trägt = CR. Die Druckhöhe für die Mitte Q ist QS = QD = ½ CD, und die Druckhöhe für D = o. Zieht man DSR, so stellt das Dreieck DCR den Längenschnitt des auf die Seitenwand DC drückenden Wasserprisma's vor, dessen Grundfläche die gedrückte Wandfläche ist. Der Inhalt dieses Wasserprisma's ist aber die gedrückte Wandfläche DC,



multiplizirt mit QS oder dem Abstand QD des Schwerpunktes Q von dem Wasserspiegel AD. Der senkrechte Abstand QD des Schwerpunkts Q vom Wasserspiegel AD heißt die Druckhöhe des Wassers für die Fläche CD.

Das Gleiche gilt von einer schiefen Seitenfläche oder einer ganz unter Wasser befindlichen Fläche. So ist der Wasserdruck auf die untere Hälfte QC der Gefäßwand gleich dem Gewicht des Wasserprisma's QCRS, welches die gedrückte Fläche QC zur Grundfläche und den Abstand qs = qD des Schwerpunktes q der gedrückten Fläche vom Wasserspiegel zur Höhe hat. Die Druckhöhe des Wassers für die Fläche CQ ist wieder der senkrechte Abstand qD des Schwerpunkts q vom Wasserspiegel AD. Ein Gleiches gilt für gekrümmte Seitenflächen, da man sich dieselben ebenso in schmale horizontale Streifen zerlegt denken kann.

Für die Berechnung des Wasserdrucks auf eine beliebige im Wasser befindliche horizontale oder geneigte, ebene oder krumme Fläche gilt also ganz allgemein der Satz:

Der Druck des Wassers auf eine Fläche ist gleich dem Gewicht einer Wassersäule, welche die gedrückte Fläche zur Grundfläche und den Abstand ihres Schwerpunktes vom Wasserspiegel zur Höhe hat.

Um daher den Wasserdruck auf eine Fläche berechnen zu können, braucht man nur die Größe der gedrückten Fläche und die Höhe der drückenden Wassersäule (d. i. die Druckhöhe oder den senkrechten Abstand des Schwerpunkts der Fläche vom Wasser-

spiegel) zu wissen. Das Produkt aus der Fläche und der Druckhöhe (in Fußen) gibt den Kubikinhalt der drückenden Wassersäule (in c′). Multiplizirt man diese mit **44,4**, so erhält man den Wasserdruck in Pfunden.

Ein Paar Beispiele werden die Anwendung dieses wichtigen Satzes klar machen.

Beispiel. Ein würfelförmiges Gefäß hat 1′ Seite und ist 1′ hoch mit Wasser gefüllt, welches ist der Wasserdruck auf den Boden und jede Seitenwand?

Antwort: Die Bodenfläche ist 1 □′, der Abstand des Schwerpunkts vom Wasserspiegel ist = 1 Fuß, der Wasserdruck auf den Boden ist daher

$$= 1 \times 1 \times 44{,}4 = 44{,}4 \text{ Pfd.}$$

Die Seitenfläche des Würfels mißt gleichfalls 1 □′; der Abstand des Schwerpunkts dieser Fläche (QD in Fig. zu 232) ist $= \frac{1}{2}$ Fuß; der Wasserdruck auf eine Seitenfläche ist daher

$$= 1 \times \tfrac{1}{2} \times 44{,}4 = 22{,}2 \text{ Pfd.},$$

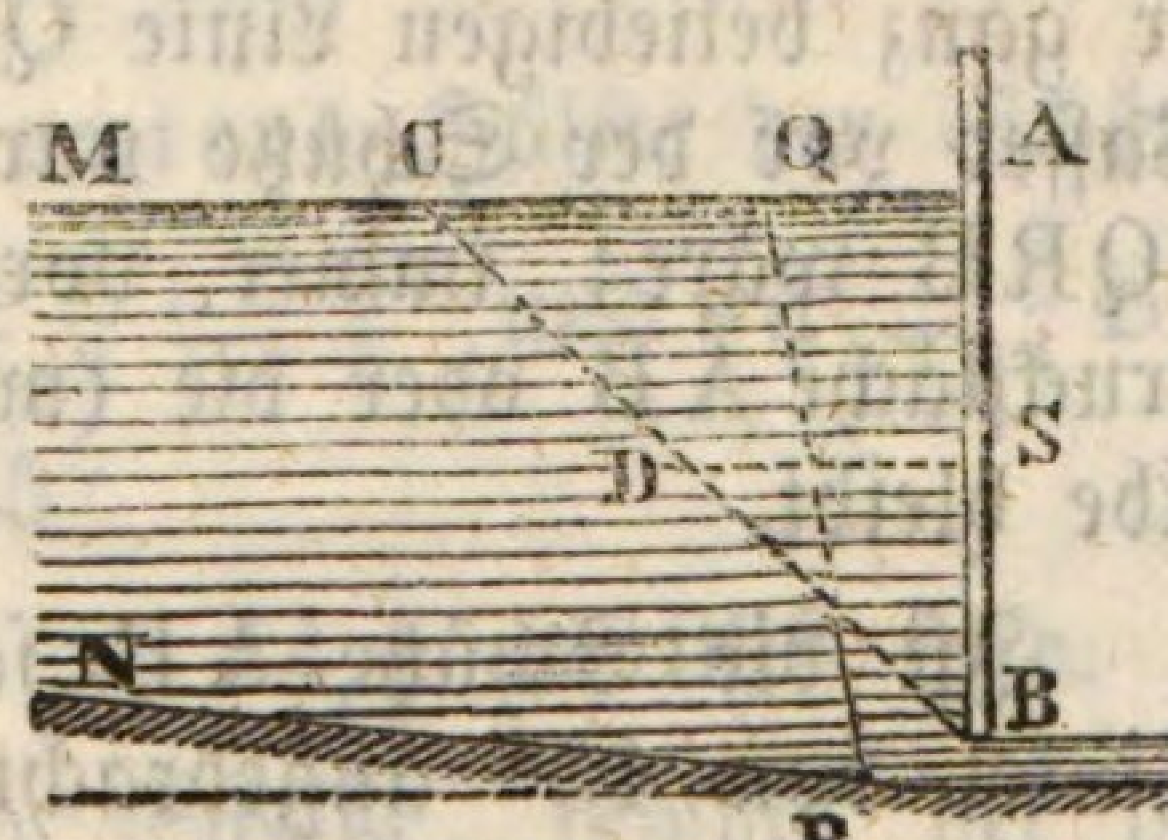
oder halb so groß als der Druck auf die Bodenfläche.

233. Da der Wasserdruck nur von der Größe der gedrückten Fläche und der Druckhöhe abhängt, so folgt hieraus, daß der Wasserdruck gegen den horizontalen Boden eines Gefäßes ganz unabhängig von der Gestalt des Gefäßes ist. Hat z. B. jedes der nebenstehenden Gefäße eine Grundfläche von $\frac{1}{2}$ Quadratschuh, und steht das Wasser in jedem gleich, z. B. $\frac{3}{4}$ Schuh



hoch, so ist der Wasserdruck auf die Grundfläche eines jeden $= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times 44{,}4$ Pfd. $= 16{,}65$ Pfd. In einem Gefäß, das sich nach oben erweitert, ist also der Druck des Wassers auf den Boden kleiner als das Gewicht des im Gefäß enthaltenen Wassers; in einem Gefäß, welches sich oben zuspitzt, ist der Bodendruck größer als das Gewicht des im Gefäß befindlichen Wassers.

234. Aus dem Gesetz über dem Wasserdruck folgt weiter, daß der Wasserdruck auf eine vertikale Fläche im Wasser, z. B. auf eine Schütze, nur von der Fläche der Schütze und der Tiefe des Schwerpunkts derselben unter dem Wasserspiegel abhängt, daß also eine Schütze denselben Druck zu erleiden hat, sie mag einen schmalen Kanal, einen breiten Fluß, einen Teich, oder einen großen See abschließen, wenn nur in allen diesen Fällen das Wasser gleich hoch steht.



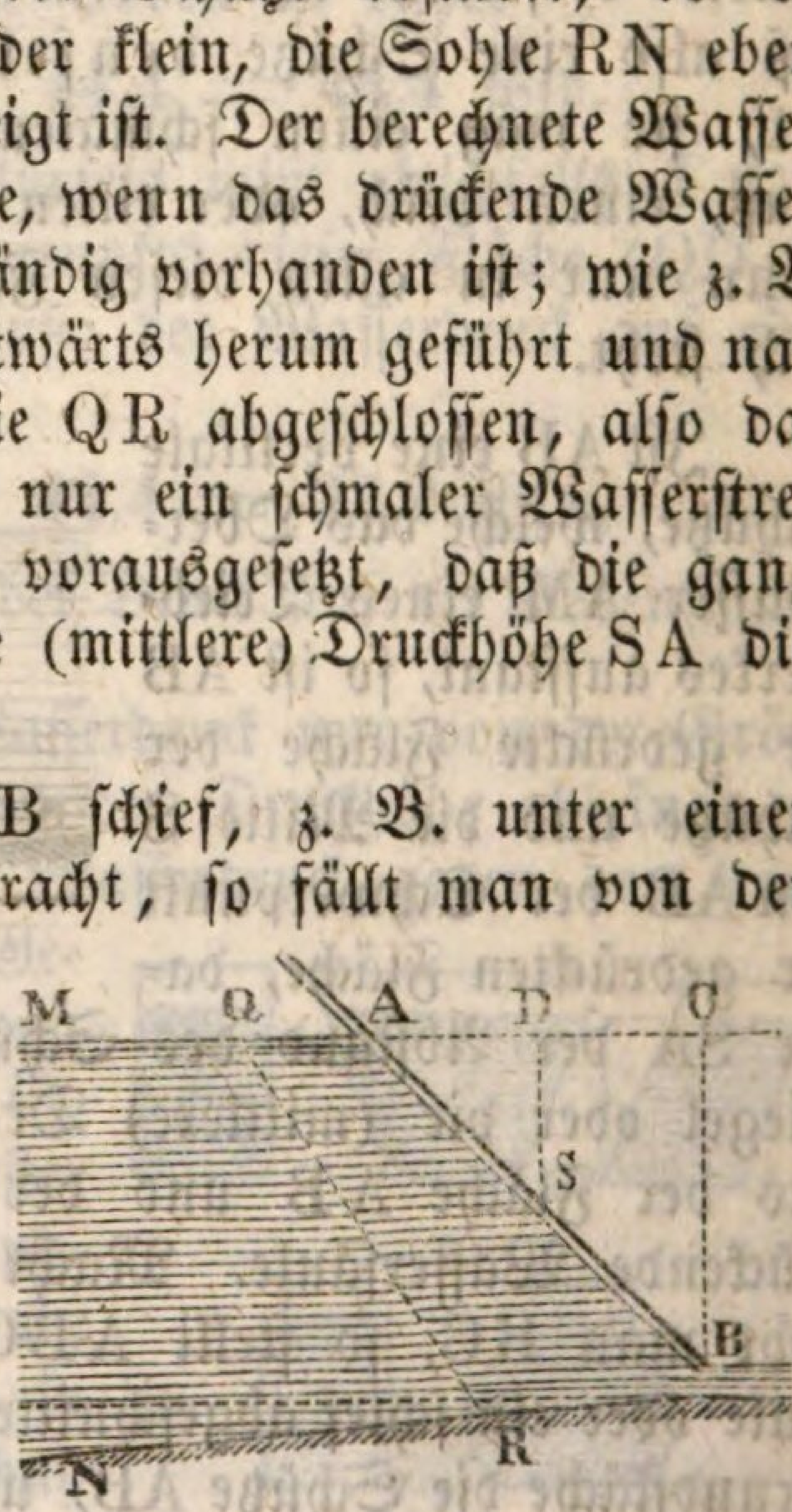
Ist AB eine vertikale Schütze, welche das Ober-Wasser AM eines Triebwerkes aufstaut, so ist AB die gedrückte Fläche der Schütze und die Mitte S von AB der Schwerpunkt der gedrückten Fläche, daher SA der Abstand des Schwerpunkts vom Wasserspiegel oder die (mittlere) Druckhöhe. Das Produkt aus der Fläche AB und der Druckhöhe SA ist die drückende Wassersäule. Macht man AC = AB und zieht man BC, so stellt ABC die drückende Wassersäule oder ein schief abgeschnittenes Prisma vor, dessen Grundfläche die Schütze AB, und dessen mittlere Höhe

= SD = SA der Abstand des Schwerpunkts S vom Wasserspiegel AM ist.

1. Beispiel. Ist die Schütze 4′ breit und steht das Druckwasser 3′ hoch vor derselben, so ist AB = 3′; die gedrückte Fläche der Schütze ist 4 × 3 = 12 □′; die mittlere Druckhöhe SA ist $= \frac{AB}{2} = \frac{3}{2}$ = 1,5′; das drückende Wasserprisma hält 12 × 1,5 = 18 c′ und der Wasserdruck auf die Schütze ist = 18 × 4,4 = 799,2 Pfund.

Dieser Druck bleibt derselbe, ob die Wasserfläche AM groß oder klein ist, ob ein Kanal, Fluß oder Mühlweiher sich vor der Schütze befindet, ob die Wassertiefe MN groß oder klein, die Sohle RN eben, auf- oder abwärts geneigt ist. Der berechnete Wasserdruck bleibt sogar derselbe, wenn das drückende Wasserprisma ABC nicht vollständig vorhanden ist; wie z. B. wenn der Mühlkanal seitwärts herum geführt und nach der ganz beliebigen Linie QR abgeschlossen, also das Wasser vor der Schütze nur ein schmaler Wasserstreif AQRB wäre; immer vorausgesetzt, daß die ganze Druckfläche AB oder die (mittlere) Druckhöhe SA dieselbe bleibt.

Ist die Schütze AB schief, z. B. unter einem Winkel von 45⁰ angebracht, so fällt man von dem untersten Punkt B und dem Schwerpunkt S die Senkrechten BC und SD auf den Wasserspiegel AM, alsdann stellt ABC das auf die Schütze drückende Wasserprisma vor. Auch hier ist es



gleichgültig, ob die vor der Schütze liegende Wassermenge groß oder klein ist, und der Wasserdruck auf die Schütze bleibt gleich dem Gewicht des Wasserprisma's ABC, selbst wenn das Wasser bei QR in einer beliebigen Richtung ganz abgeschnitten wäre, wenn nur durch entsprechenden Zufluß der Wasserspiegel auf der Höhe AM bleibt.

Der Wasserdruck auf die untere Hälfte der Schütze ist gleich dem Gewicht eines Wasserprisma's, welches die halbe Schütze BS zur Grundfläche und den Abstand sd des Schwerpunkts s (Mitte von BS) vom Wasserspiegel AM zur Höhe hat.

2. Beispiel. Ist die Schütze 5′ lang, der eingetauchte Theil AB = 4′ breit, der Wasserstand BC vor der Schütze = 3′, so ist $SD = \frac{BC}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5'$, und der Wasserdruck auf die ganze Schütze

$$= 5 \times 4 \times 1{,}5 \times 44{,}4 = 1332 \text{ Pfd.}$$

Der Wasserdruck auf die untere Hälfte der Schütze BS ist, da $BS = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2'$ und $sd = \frac{3}{4} BC = \frac{3}{4} \times 3 = \frac{9}{4} = 2{,}25'$

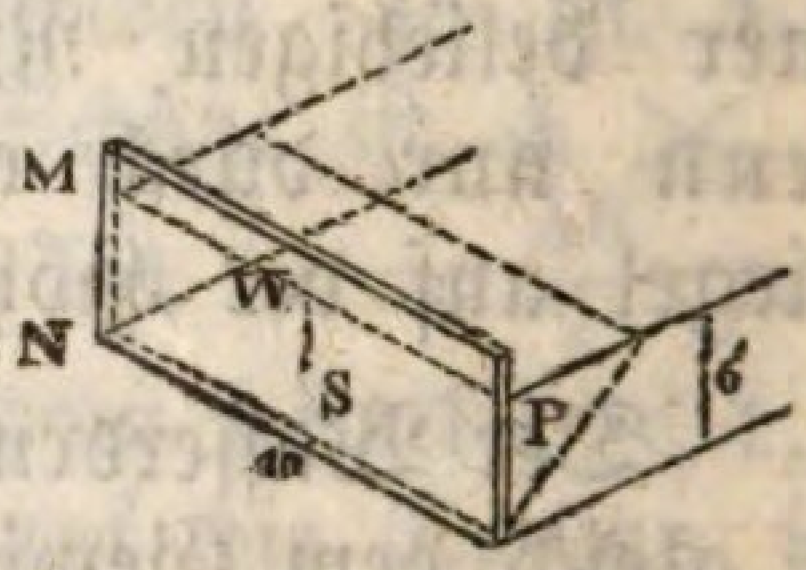
$$= 5 \times 2 \times 2{,}25 \times 44{,}4 = 999 \text{ Pfd.}$$

In beiden Stellungen der Schütze, sowohl bei der vertikalen als schrägen, tritt das Wasser beim Aufziehen der Schütze an deren unterem Rand bei B mit einer und derselben Geschwindigkeit aus, welche durch die Druckhöhe BC verursacht wird.

3. Beispiel. Welches ist der Wasserdruck auf eine 10′ lange, 8′ hohe und 0,3′ dicke eichene Schütze MNPQ eines Schleußenwehrs, wenn das

Wasser auf der einen Seite 6′ hoch steht, und welche Kraft ist zum Aufziehen derselben nöthig?

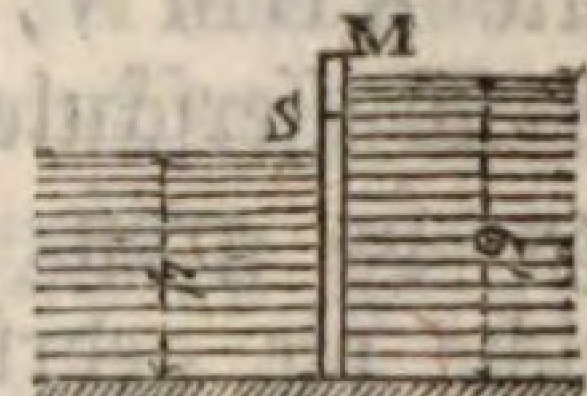
Antwort: Die gedrückte Fläche MNPQ ist = 10 × 6 = 60 □′; der Abstand SW des Schwerpunktes S vom Wasserspiegel ist, weil der Schwerpunkt der Schütze in ihrer Mitte liegt, = $\frac{6}{2}$ = 3′, also das drückende Wasserprisma = 60 × 3 = 180 c′, und der gesuchte Wasserdruck = 60 × 3 × 44,4 = 180 × 44,4 Pfd. = 7992 Pfd. Mit dieser Kraft wird die Schütze gegen ihre Führung gedrückt und die Reibung hervorgebracht. Nimmt man (vergl. 228) den Reibungscoefficienten für nasses Holz zu $\frac{6}{10}$ des Druckes an, so beträgt die Reibung der Schütze = 7992 × 0,6 = 4795 Pfd. Das Gewicht der Schütze ist, den Kubikfuß nasses Eichenholz zu 70 Pfd. angenommen, = 10 × 8 × 0,3 × 70 = 1680 Pfd., sohin die zum Aufziehen der Schütze nöthige Kraft = 4795 + 1680 = 6474 Pfd. oder 65 Ctr.



Wie man sieht, ist der Wasserdruck und die dadurch erzeugte Reibung auf eine 10′ lange, 6′ hoch vom Wasser bedeckte Schütze sehr groß. In einem solchen Fall, wie es bei großen Schleußenwehren ꝛc. vorkommt, sind bedeutende mechanische Vorrichtungen nöthig, um die Schütze mit Menschenkraft ziehen zu können.

Steht das Wasser auf der vordern Seite einer Schütze 6′, auf der Rückseite 4′ hoch, so hebt sich der beiderseitige Druck der 4′ hohen Wassersäulen auf, und es bleibt vorn der Druck einer Wassersäule von 2′ Höhe. Dieser ist, da die gedrückte Fläche = 10

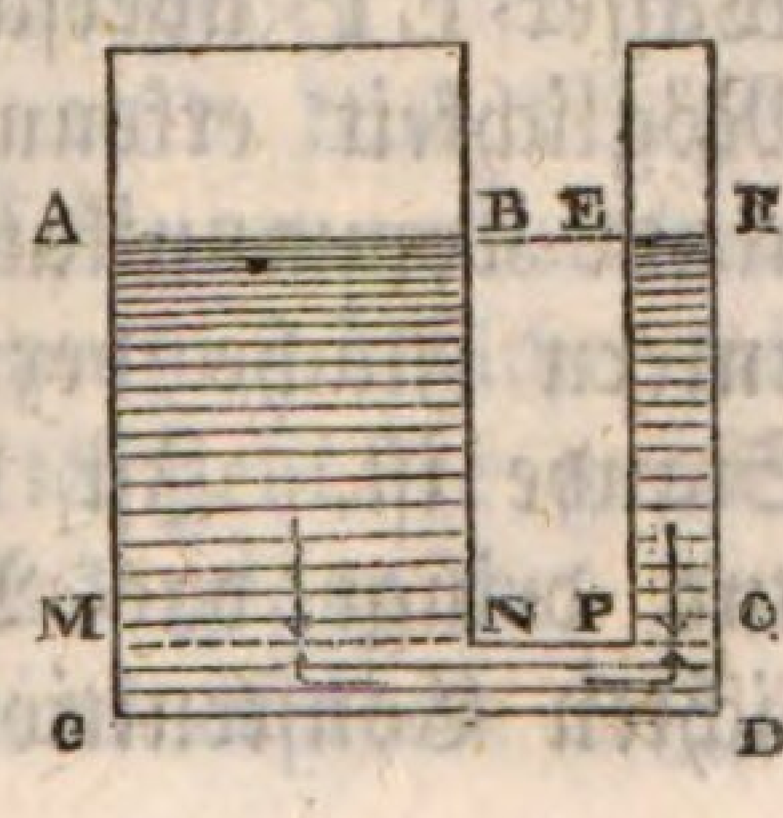
× 2 = 20 □′ und der Schwerpunkt S 1′ unter dem Wasserspiegel M liegt = 10 × 2 × 1 × 44,4 = 888 Pfd. Die Reibung ist sonach = 0,6 × 888 = 532,8 Pfd. und hiezu das Eigengewicht der Schütze mit 1680 Pfd. gibt die nöthige Aufziehkraft = 533 + 1680 = 2213 Pfd. oder 22 Ctr.



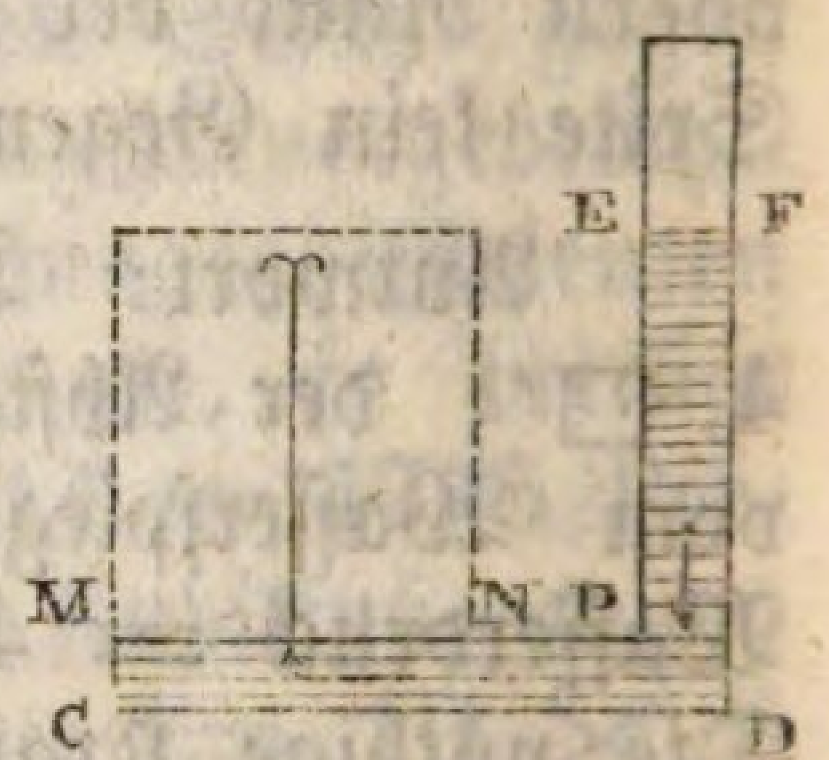
4. Beispiel. Welches ist der Wasserdruck auf eine in einem Schleußenthor befindliche Schütze von 2′ Länge und Breite, wenn das Wasser 8′ über dem obern Rand der Schütze steht, und auf der andern Seite kein Gegendruck vorhanden ist?

Antwort: Die gedrückte Fläche ist 2 × 2 = 4 □′; der Abstand des Schwerpunkts der Schütze vom Wasserspiegel ist 8 + 1 = 9′; sohin der Wasserdruck = 4 × 9 × 44,4 = 1598,4 Pfd. Die nöthige Kraft zum Ziehen der Schütze ist also, die Reibung zu $\frac{6}{10}$ angenommen, = 1598,4 × 0,6 = 959 Pfd. Hiezu kommt noch das Eigengewicht der Schütze.

235. Kommunizirende Röhren. — Eine Folge des Gesetzes über den Wasserdruck ist die bekannte Erscheinung, daß das Wasser in sogenannten kommunizirenden (zusammenhängenden) Röhren immer gleich hoch steht. Ist nämlich ABCDEF ein solches Gefäß, so muß, wenn das Wasser in Ruhe ist, in jeder horizontalen Schichte MN der Druck von oben und unten gleich sein, weil im entgegengesetzten Falle das Wasser bei MN entweder fallen oder steigen müßte. Der Wasser-



druck von oben auf die Schichte MN ist die Wassersäule ABMN, der Druck von unten, welcher durch die Wassersäule EFPQ verursacht wird, muß also eben so groß sein, oder gleich einer Wassersäule, welche die gedrückte Fläche MN zur Grundfläche und die Entfernung MA oder QF zur Höhe hat. Denkt man sich statt der über MN lastenden Wassersäule bei MN einen verschließenden Deckel, so hat dieser Deckel MN von unten einen Druck zu erleiden gleich dem Gewicht einer Wassersäule, welche diese Fläche zur Grundfläche und ihre Entfernung vom Wasserspiegel zur Höhe hat. Ist die Fläche MN 1 Quadratschuh groß, und der Wasserstand EP = 4 Schuh, so ist der durch die Wassersäule in der engen Röhre auf die Fläche MN ausgeübte Druck = 1 × 4 × 44,4 Pfd. = 1776 Pfd. Dieser Druck bleibt der nehmliche, die Röhre EFPQ mag eng oder weit sein, wenn nur der Wasserstand derselbe bleibt.



Wird eine Oeffnung in den Deckel MN angebracht, so springt das Wasser aus derselben beinahe auf dieselbe Höhe, welche der Wasserspiegel EP einnimmt. Hierauf beruhen alle natürlichen Springbrunnen. Stellt die Wand EP ein Wehr und MN die Bedielung desselben vor, auf welche das über das Wasser EP überfallende Wasser hinabfällt, so ist die Möglichkeit erkenntlich, daß eine unbedeutend scheinende Kommunikation des gestauten Wassers mit der untern Fläche der Bedielung diese zu sprengen im Stande ist. Ist die Höhe des Wassers EP = 6′ und dringt das Wasser in Folge einer nicht wasserdichten Construktion von E über P nach MN, und

breitet sich dort, ohne durch die Fugen herausdringen zu können, unter der Bedielung aus, so hat jeder □' dieser Bedielung von unten einen Druck auszuhalten

$$= 1 \times 1 \times 6 \times 44{,}4 = 266{,}4 \text{ Pfd.}$$

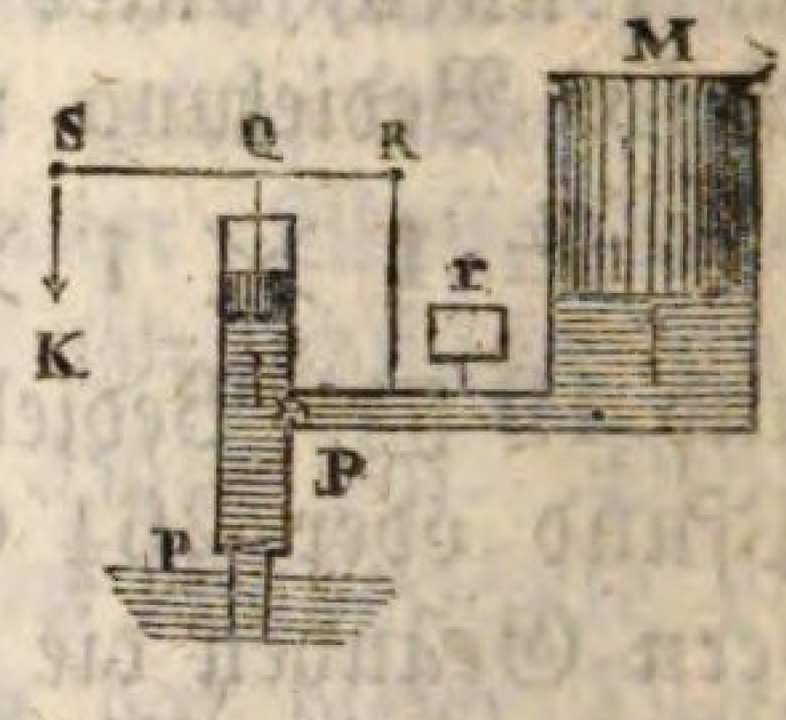
und 10 □' Bedielung haben einen Druck von 2664 Pfund oder $26\frac{1}{2}$ Ctr. auszuhalten. Daher unter andern Gründen die Nothwendigkeit wasserdichter Spundwände beim Wasserbau.

Beispiel. Welches ist der Druck des 8' hoch durch eine Schütze gestauten Wassers auf die untere Fläche eines 20' langen und 10' breiten Sturzbettes?

Antwort: Die drückende Wassersäule hält $20 \times 10 \times 8$ c' = 1600 c' und der dadurch verursachte Druck ist $1600 \times 44{,}4$ Pfd. = 71040 Pfd. oder 710 Ctr.

236. Hydraulische Presse. — Auf dem Gesetz des Wasserdrucks in kommunizirenden Röhren beruht die wirksamste aller Maschinen, die hydraulische Presse. Sie besteht aus einem weiten Cylinder mit einem dicht schließenden Kolben M und einem engen Cylinder QP mit dem Kolben N, mit welchem ein Hebel RS verbunden ist, an welchem die Kraft K wirkt. Geht der kleine Kolben N aufwärts, so wird das Wasser, in welchem die enge Röhre steht, durch das Ventil p, welches sich nach oben öffnet, eingesogen; beim Niedergehen des Kolbens N schließt sich dieses Ventil und das Wasser wird durch das in den großen Cylinder mündende Ventil P unter den Kolben M gepreßt, welche mit einer um so größeren Kraft aufwärts geht, je größer der Querschnitt des großen Cylinders gegenüber dem des kleinern ist. Hat z. B. der kleine Kolben 1 □"

Querschnitt, der größere 1 □′ oder 100 □″, ist ferner RQ = 1′ und RS = 3′, und die am Ende des Hebels wirkende Kraft = 50 Pfund, so geht der kleine Kolben N mit einer Kraft von 3 × 50 = 150 Pfd. nieder und bewirkt einen Druck auf den größeren Kolben M von 100 × 150 Pfd. oder 150 Ctr.



Um die große Gefahr des Zerspringens des Apparates bei fortgesetztem Pumpen und einer auf dem Kolben M ruhenden großen Last zu verhüten, ist bei r ein mit einem Gewicht versehenes Sicherheitsventil angebracht, welches sich bei einem gewissen Druck öffnet und das Wasser entweichen läßt.

Eine der größten je gehobenen Lasten, die Röhre der Brittania-Brücke wurde mit Hilfe zweier solcher hydraulischen Pressen, welche mit Dampf in Bewegung gesetzt waren, gehoben. Diese Brücke, welche von den Engländern Fairbairn und Stephenson über einen Meeresarm der englischen Westküste (den Menai-Kanal) in neuester Zeit erbaut wurde, besteht aus einer colossalen viereckigen, aus starkem Eisenblech zusammengenieteten Röhre von 30′ Höhe und 13,8′ Breite, durch deren Inneres der Eisenbahnzug hindurch passirt. Boden und Deckel dieser Röhre sind zur größeren Verstärkung doppelt und durch 1′ hohe Zwischenwände der Länge nach in Zellen von ungefähr 1 □′ Querschnitt getheilt. Der die mittlere Oeffnung dieser Brücke in der bedeutenden Höhe von 180′ über dem Meeresspiegel überspannende Theil dieser Röhre ist 460′ lang und hat ein Gewicht von 1364 englischen Tonnen oder 27280 Ctr. Um die ungeheure Last dieser Röhre, welche in der Nähe des Standortes am Meeresufer zusammengeschmiedet worden war, zu bewegen, wurden Pontons (Kähne) mit Wasser gefüllt und unter Wasser unter die fertige Röhre geschoben, hierauf das Wasser aus den Pontons ausgepumpt, und auf diese einfache, aber ingeniöse Art die Röhre flott gemacht, an den Standort (zwischen die bereits aufgemauerten Pfeiler) hingeflößt und durch

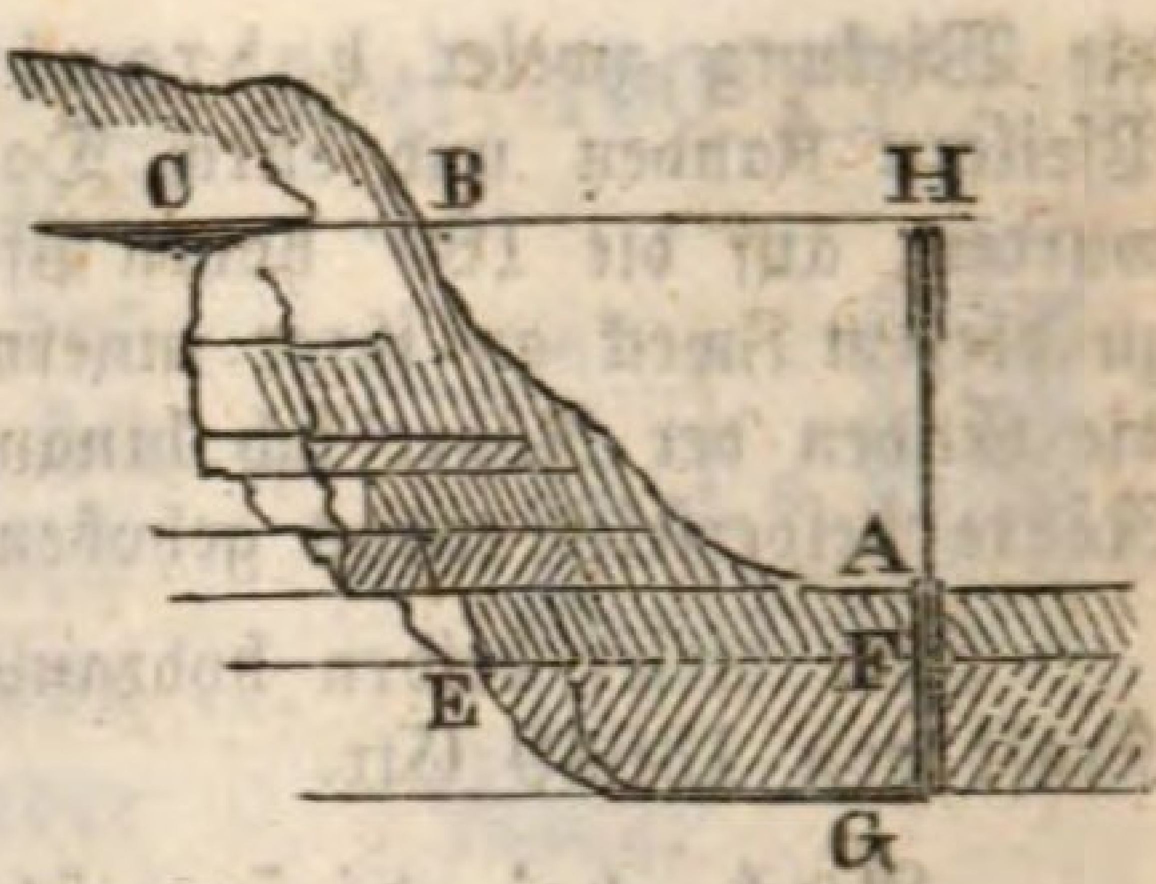
die Wirkung zweier hydraulischen Pressen, welche auf den Pfeilern standen und durch Dampfmaschinen in Bewegung gesetzt wurden, auf die 180′ hohen Pfeiler hinaufgehoben. Letztere hatten zu diesem Zweck an ihrer innern Seite eine Art Nuth, in welcher die Enden der Röhre sich hinaufbewegten, und welche, wenn die Röhre beiderseits etwas gehoben war, sogleich ausgemauert wurden.

Jede dieser beiden hydraulischen Pressen wirkte sohin mit einer Kraft von 13640 Ctr.

Auch bei dieser überaus wirksamen Maschine geht an Geschwindigkeit verloren, was an Kraft gewonnen wird. Wird der kleine Kolben in der Figur um 1 Zoll niedergedrückt, so dringt, da der kleine Kolben zu 1 □″ Querschnitt angenommen wurde, 1 c″ Wasser in den großen Cylinder, welcher sich, da er 100 □″ Fläche hat, nur um $\frac{1}{100}$ Zoll aufwärts bewegt. Der große Kolben mit der auf ihm ruhenden Last M bewegt sich daher genau ebensovielmal langsamer als die Kraft K, als diese kleiner ist als die Last.

Die hydraulische Presse wird zum Oelpressen, zum Pressen von Tüchern, Papieren, Auspressen des Zuckersaftes aus den zerriebenen Runkelrüben ꝛc. mit großem Vortheil angewendet.

237. Artesische Brunnen. — Wenn das im Innern der Berge sich sammelnde Wasser am Fuße derselben einen natürlichen Ausweg findet, so entsteht eine natürliche Quelle; wenn aber das sich sammelnde Wasser ganz oder theilweise unter eine vom Wasser undurchdringliche Schichte geräth, und es wird diese durchbohrt, so strömt alsdann das Wasser mit großer Stärke hervor und bildet einen sogenannten artesischen Brunnen. (Von Artois in Frankreich, wo zuerst solche Brunnen gegraben wurden.)



Ist AB ein wasserreiches Berggehänge, in dessen Innern sich Quellen bei C und E sammeln, welche wegen der vorliegenden thonigen, felsigen, überhaupt für Wasser undurchdringlichen Schichten nicht zu Tage treten können, so wird das Wasser sich unter der in der Thalsohle liegenden undurchdringlichen Schichte EFG ansammeln. Wird diese mittelst eines artesischen Brunnens AFG durchbohrt, so dringt das Wasser mit großer Gewalt hervor. Hat sich im Innerrn des Berges etwa bei C unterirdisches Wasser angesammelt, so wird der natürliche Springbrunnen AH bis zur Horizontalen HBC steigen, welche Höhe er jedoch wegen der starken Reibung des Wassers auf seinem Weg im Boden und in der Luft nie ganz erreicht.

Das Vorkommen solcher vom Wasser undurchdringlicher Schichten und nahegelegene wasserreiche Berghöhen sind daher die unumgänglichen Bedingnisse für das Gelingen artesischer Brunnen.

Da das Wasser der artesischen Brunnen die nahezu sich gleichbleibende Temperatur des Erdinnern hat, also im Sommer kalt, im Winter warm ist, so wird dasselbe unter andern mit großem Vortheil dazu benützt, die Bildung des Eises an den Wasserrädern bei Mühlen 2c. zu verhindern, wodurch in kalten Wintern den Triebwerkbesitzern viel Arbeit und Schaden verhütet wird.

238. Das Wasser gefriert bei niedriger Temperatur zu Eis, indem es sich dabei um $\frac{1}{9}$ seines Volumens (Rauminhalts) ausdehnt. Eine Folge dieser

Ausdehnung des Wassers beim Gefrieren ist, daß das Eis leichter ist als Wasser und auf diesem schwimmt. Daher rührt auch das Zerspringen geschlossener mit Wasser gefüllter Gefäße, wenn sie der Kälte ausgesetzt werden, sowie das Zerblättern und Verwittern der Steine in Folge abwechselnder Nässe und Kälte.

Um daher Steine bezüglich ihrer Frostbeständigkeit und Ausdauer in der Witterung zu untersuchen, darf man dieselben nur im Winter abwechselnd mit Wasser begießen und der Kälte aussetzen und ihr Verhalten beobachten.

Neuntes Kapitel.

Hydraulik oder Lehre von der Bewegung des Wassers.

239. Erklärung. — Der Druck, welchen irgend eine Stelle des Bodens oder der Seitenwand eines mit Wasser gefüllten Gefäßes erleidet, trifft auch die Flüssigkeit selbst an dieser Stelle, und dieser Druck ist die Kraft, womit die Flüssigkeit, wenn man sich an der gedrückten Stelle eine Oeffnung denkt, aus dieser herausgetrieben wird.

Um die Menge des aus einem Gefäß ausströmenden Wassers durch Rechnung finden zu können, muß daher zweierlei bekannt sein: 1) der Quer-

schnitt des ausfließenden Wasserstrahls, und 2) seine Geschwindigkeit, d. h. die Größe des Wegs, welchen ein bei der Oeffnung austretendes Wassertheilchen in der Sekunde zurücklegt.

Das Produkt aus Querschnitt und Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers gibt die ausfließende Wassermenge per Sekunde an.

240. Theoretische Ausflußmenge. — Ist die Größe der Ausflußöffnung und die Geschwindigkeit des ausströmenden Wasserstrahls bekannt, so findet man die ausfließende Wassermenge, wenn man dieselbe als den Kubikinhalt eines Prismas ansieht, welches die Ausflußöffnung zum Querschnitt (Grundfläche) und die Ausflußgeschwindigkeit zur Länge (Höhe) hat.

Bezeichnet man den Querschnitt der Oeffnung mit q, die Ausflußgeschwindigkeit mit v, die ausfließende Wassermenge per Sekunde mit m, so ist diese

$$m = q \times v.$$

Daher die Regel:

Die (theoretische) Ausflußmenge (in c′) wird gefunden, wenn man die Größe der Ausflußöffnung (in □′) mit der Geschwindigkeit des Strahls (in Fußen) multiplizirt.

Beispiel: Durch eine Schütze von 3′ Länge und 2′ Höhe fließt das Wasser mit einer Geschwindigkeit von 14′ aus, welches ist die ausfließende Wassermenge in 1 Stunde?

Antwort: Der Querschnitt ist $= 3 \times 2 =$ 6 □′, die Wassermenge per Sekunde $= 6 \times 14$

= 84 c′ und per Stunde = 60 × 60 × 84 = 302400 c′.

Umgekehrt wird die mittlere Ausflußgeschwindigkeit gefunden, wenn man die Ausflußmenge per Sekunde durch den Querschnitt dividirt.

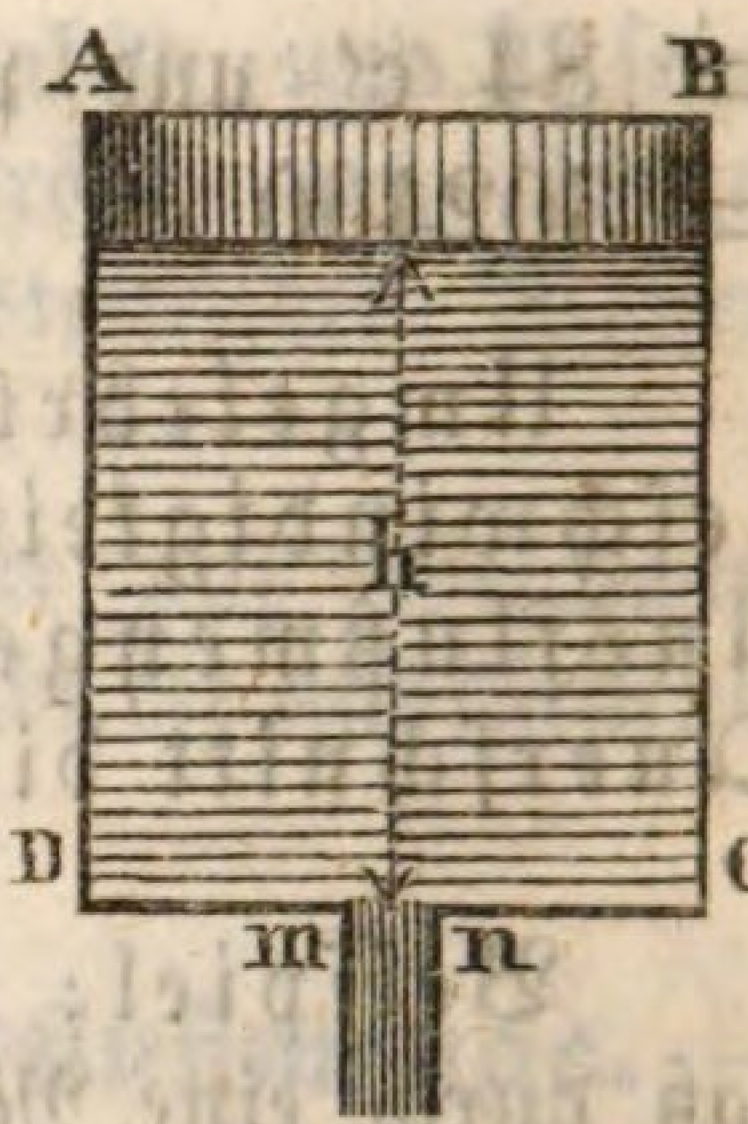
Beispiel: Man hat mit Gefäßen gemessen, daß durch eine Mündung von 4 □″ in jeder Minute 12 c′ ausfließen, wie groß ist die mittlere Ausflußgeschwindigkeit?

Antwort: In 1 Sekunde fließen aus $\frac{12}{60}$ c′ = $\frac{12000}{60}$ c″ = 200 c″, daher ist die mittlere Ausflußgeschwindigkeit per Sek. = $\frac{200}{4}$ = 50 Zoll oder 5 Fuß.

241. Berechnung der Ausflußgeschwindigkeit aus der Druckhöhe. — Da die Ausflußgeschwindigkeit des Wassers vom Wasserdruck oder von der Druckhöhe, das ist, von der Tiefe der Ausflußöffnung unter dem Wasserspiegel abhängt, so kömmt es darauf an, aus der in jedem Fall gegebenen Druckhöhe des Wassers die Geschwindigkeit des ausfließenden Strahls finden zu können. Dieß geschieht durch Anwendung des folgenden Gesetzes:

Die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers (bei unveränderlicher Druckhöhe) ist gleich der Endgeschwindigkeit eines von der Druckhöhe herabfallenden Körpers.

Hat man z. B. ein mit Wasser stets gleich hoch



gefülltes Gefäß ABCD mit einer am Boden befindlichen kleinen Oeffnung mn, so wird unter der unveränderlichen Druckhöhe AD = BC das Wasser mit einer Geschwindigkeit bei mn ausströmen, welche eben so groß ist, als die Geschwindigkeit, mit welcher ein durch die Druckhöhe AD frei fallender Körper in D ankommt.

Nun ist aber nach 224 die Endgeschwindigkeit v eines von der Höhe h frei herab fallenden Körpers

$$v = 8{,}19 \times \sqrt{h};$$

wendet man diese Regel auf die Berechnung der Ausflußgeschwindigkeit des Wassers an, so hat man nur statt der Fallhöhe die Druckhöhe h des Wassers zu setzen; daher die Regel:

Man findet die einer gegebenen unveränderlichen Druckhöhe entsprechende Ausflußgeschwindigkeit des Wassers (in bayer. Fußen), wenn man die Quadratwurzel aus der Druckhöhe mit 8,19 multiplizirt.

Wird diese Ausflußgeschwindigkeit mit der Größe der Ausflußöffnung multiplizirt, so erhält man die (theoretische) Ausflußmenge.

Beispiel: Welche Wassermenge fließt per Sekunde durch eine Oeffnung von 4 □″ dec., wenn die Druckhöhe (die Entfernung der Mitte der Oeffnung vom Wasserspiegel) beständig 10′ ist?

Antwort: Die Ausflußgeschwindigkeit ist

$v = 8{,}19 \times \sqrt{10} = 8{,}19 \times 3{,}1623 = 25{,}9$ Fuß
$= 259$ Zoll;

und die ausfließende Wassermenge per Sekunde
$m =$ Ausflußöffnung $\times$ Geschwindigkeit $= 4 \times 259$
$= 1036\ c'' = 1{,}036\ c'$.

In der Minute laufen folglich aus $60 \times 1{,}036\ c'$
$= 62{,}16\ c' = \frac{62{,}16}{2{,}58}$ oder 24,08 Eimer.

242. Aus der angegebenen Regel für die Berechnung der Ausflußgeschwindigkeit folgt:

Wird die Druckhöhe 1, 4, 9, 16 2c. mal größer, so wird die Ausflußgeschwindigkeit nur $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$ 2c. oder 1, 2, 3, 4 2c. mal so groß.

Die Ausflußgeschwindigkeiten des Wassers verhalten sich also wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen.

Soll daher durch eine von 2 gleichen Oeffnungen doppelt so viel auslaufen, so muß dieselbe 4 mal tiefer unter dem Wasserspiegel liegen, als die andere; soll 3 mal so viel auslaufen, so muß die Oeffnung 9 mal so tief liegen, als die andere 2c. Gibt die eine von 2 gleichen Oeffnungen, welche 2′ unter dem Wasserspiegel liegt, in der Minute 10 Eimer, so gibt eine andere, welche 3′ unter dem Wasserspiegel liegt,

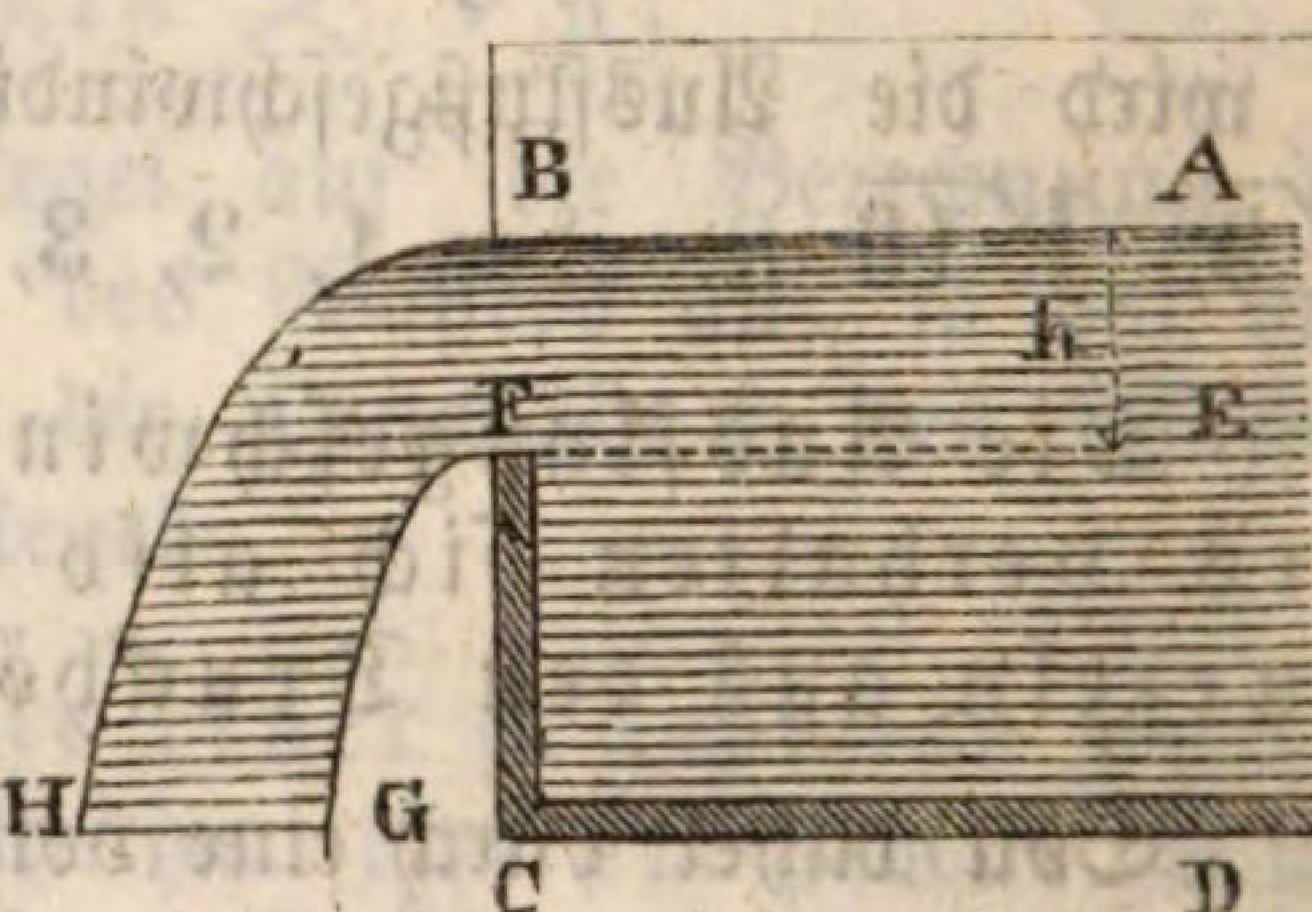
$$10 \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 10 \times \frac{1{,}732}{1{,}414} = 12{,}2 \text{ Eimer.}$$

243. Ausflußgeschwindigkeit bei einem Wandeinschnitt oder Ueberfall. — Die an-

gegebene Regel für die Berechnung der Ausfluß-geschwindigkeit bei einer gegebenen unveränderlichen Druckhöhe gilt eigentlich nur für sehr kleine Ausflußöffnungen.

Für größere Oeffnungen muß man als Druckhöhe die Tiefe des Mittelpunkts der Oeffnung unter dem Wasserspiegel annehmen, wie dieß im Beispiel zu 241 geschehen ist.

Es ist nun noch anzugeben, wie die mittlere Ausflußgeschwindigkeit bei einer Wand-Oeffnung, welche bis zum Wasserspiegel reicht, also bei einem Wandeinschnitt oder einem Ueberfall gefunden wird.



Ist ABCD ein Gefäß, an dessen vorderen Wand BC sich ein Einschnitt BF befindet, oder stellt ABCD einen Mühlkanal vor, an dessen Ufer ein Ueberfall — Wehr CF angebracht ist, so wird das Wasser bei hinreichender Zuflußmenge in einem gekrümmten Strahl BHFG überströmen. Die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser bei BF austritt, ist nicht in allen Theilen des Querschnittes gleich, und nimmt von B nach F zu. Am untersten Punkt des Wandeinschnittes ist sie am größten, und entspricht der Druckhöhe AE oder der Höhendifferenz zwischen dem (ruhigen, horizontalen) Wasserspiegel bei A und dem Punkt F. Bei B ist die Druckhöhe nahezu gleich Null und die Geschwindigkeit des Wassers wird nur durch den Zusammenhang mit den weiter unten in Bewegung befindlichen Wassertheilchen

und durch das Gefäll oder die Krümmung der Wasseroberfläche von A nach B hervorgebracht. Um die Ausflußmenge bestimmen zu können, muß daher die mittlere Ausflußgeschwindigkeit des Wassers bekannt sein. Für diese gilt der Satz:

Die mittlere Ausflußgeschwindigkeit des Wassers bei einem Wandeinschnitt oder Ueberfall ist $\frac{2}{3}$ der Ausflußgeschwindigkeit an der Schwelle oder untern Kante.

Bezeichnet man die Druckhöhe AE des Wandeinschnitts (die Wasserdicke bei einem Ueberfallwehr) mit h, so ist die mittlere Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \frac{2}{3} \times 8{,}19 \times \sqrt{h}.$$

Hiebei ist wegen der Krümmung der Wasseroberfläche am Ausfluß die Druckhöhe in einiger Entfernung vom Ausfluß in Rechnung zu nehmen.

1. Beispiel. Bei einem Ueberfallwehr stürze das Wasser 1′ dick über, welches ist die mittlere Ausflußgeschwindigkeit? Antwort:

$$v = \frac{2}{3} \times 8{,}19 \times \sqrt{1} = \frac{2}{3} \times 8{,}19 = 5{,}46 \text{ Fuß}.$$

2. Beispiel. Wie groß ist die mittlere Ausflußgeschwindigkeit, wenn das Wasser 2′ hoch überfällt? Antwort:

$$v = \frac{2}{3} \times 8{,}19 \times \sqrt{2} = \frac{2}{3} \times 8{,}19 \times 1{,}414 = 7{,}772 \text{ Fuß}.$$

Fällt das Wasser 4′ hoch (4 mal so hoch als in Beispiel 1) über, so ist die mittlere Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \frac{2}{3} \times 8{,}19 \times \sqrt{4} = \frac{2}{3} \times 8{,}19 \times 2 = 10{,}92 \text{ Fuß},$$

also doppelt so groß, als im ersten Falle.

Die krumme Linie BH oder FG, welche ein ausfließender Wasserstrahl bildet, ist eine Parabel. Es ist dieselbe Linie, welche ein schief aufwärts geworfener Stein beim Beginn des Niederfallens beschreibt. Stellt FG den Kropf eines Mühlgerinnes für ein mittelschlächtiges Rad vor, so sollte dieser nach einer Parabel gekrümmt sein. In der Praxis nimmt man dafür einen Kreisbogen. Alsdann muß aber der Mittelpunkt des Kreises FG in der Senkrechten FC liegen, damit das Wasser ohne Stoß vom Gerinnboden EF über den Kropf FG hingleiten kann. Vergl. Figur zu 244.

244. Wirkliche Ausflußmenge. — Die wirkliche Ausflußmenge des Wassers aus Oeffnungen, Röhren, Wandeinschnitten und an Ueberfällen ist jedoch immer kleiner als die nach diesen Angaben berechnete. Da nehmlich das aus einer Oeffnung fließende Wasser sich von den Wänden derselben losreißen muß und die verschiedenen Wasserfäden nach allen Richtungen hin auszufließen suchen, so erleidet der Wasserstrahl hiedurch nicht allein eine Zusammenziehung (Kontraktion), sondern es tritt auch noch ein Verlust an Geschwindigkeit ein, welche beiden Umstände die berechnete Ausflußmenge wesentlich vermindern.

Man hat durch viele Versuche ermittelt, daß die wirkliche Ausflußmenge bei vollkommener Zusammenziehung des Strahls, d. i. aus Oeffnungen, welche ganz unter Wasser und im Verhältniß zu der sie umgebenden Mündungswand nicht groß sind, deßgleichen aus Röhren, im Mittel nur 60%; und bei unvollkommener Zusammenziehung des Strahls, d. i. bei Wandeinschnitten, Ueberfällen und aus Oeffnungen, welche im Verhältniß zur umgebenden Mündungswand groß sind, im Mittel 64% der berechneten theoretischen Ausflußmenge beträgt.

Bezeichnet man mit q den Querschnitt der Mündung, die mittlere Ausflußgeschwindigkeit mit v, und die wirkliche Ausflußmenge mit M, so ist

1) bei vollkommener Zusammenziehung des Strahls

$$M = 0{,}60 \times q \times v \qquad \text{und}$$

2) bei unvollkommener Zusammenziehung des Strahls

$$M = 0{,}64 \times q \times v.$$

Unter der Geschwindigkeit v ist hiebei jederzeit die mittlere zu verstehen. Diese ist nach 241 bei Oeffnungen unter Wasser

$$v = 8{,}19 \times \sqrt{h}$$

wo h der senkrechte Abstand des Schwerpunkts (Mittelpunkts) der Oeffnung vom Wasserspiegel ist;

und bei Wandeinschnitten und Ueberfällen nach 243

$$v = \tfrac{2}{3} \times 8{,}19 \times \sqrt{h}$$

wo h der senkrechte Abstand der unteren Kante des Einschnitts (der obersten Kante des Wehres bei Ueberfällen) vom Wasserspiegel ist.

Wird hiebei die Druckhöhe h in bayer. Fußen gemessen, so erhält man auch die Geschwindigkeit des Wasserstrahls (d. i. der Weg, welchen das Wasser in 1 Sek. durchfließt) in bayer. Fußen; wird diese mit der in □′ ausgedrückten Fläche der Ausflußöffnung und noch mit 0,6 (bei Ueberfällen 0,64) multiplizirt, so erhält man die wirkliche Ausflußmenge (d. i. die in 1 Sek. aus der Oeffnung fließende Wassermenge) in bayer. Kubikfußen.

1. Beispiel. Welche Wassermenge fließt aus einer 4 dec. □″ großen Oeffnung, deren Mittelpunkt 10′ unter dem Wasserspiegel liegt?

Antwort: Hier ist die Fläche der Oeffnung $q = 4\,\square''$ dec. $= 0{,}04\,\square'$; die mittlere Ausflußgeschwindigkeit

$v = 8{,}19 \times \sqrt{10} = 8{,}19 \times 3{,}1623 = 25{,}9'$;

daher die wirkliche Ausflußmenge, da die Oeffnung klein und ganz unter Wasser ist:

$M = 0{,}60 \times q \times v = 0{,}60 \times 0{,}04 \times 25{,}9$
$= 0{,}62$ c' Wasser per Sekunde,

oder in 1 Minute $60 \times 0{,}62 = 37{,}29$ c' $= 14{,}4$ Eimer. (Vergl. Beispiel zu 241.)

2. Beispiel. Welches ist der Wasserabfluß eines Baches per Sekunde durch einen Wandeinschnitt oder Ueberfall von 3' Breite, wenn das Wasser 2' hoch überfällt? Antwort:

Hier ist die mittlere Ausflußgeschwindigkeit $v = \frac{2}{3} \times 8{,}19 \times \sqrt{2} = 7{,}72'$; die Fläche der Oeffnung $= 3 \times 2 = 6\,\square'$, daher $v = 7{,}72$ und $q = 6$; folglich die ausfließende Wassermenge $M = 0{,}64 \times 6 \times 7{,}72 = 29{,}64$ c' per Sek.

3. Beispiel. Welche Wassermenge fließt per Sekunde durch eine unter Wasser liegende Schützenöffnung von 3' Breite $1\frac{1}{4}'$ Höhe, deren untere Kante $2\frac{3}{4}'$ unter dem Wasserspiegel liegt? Antwort:

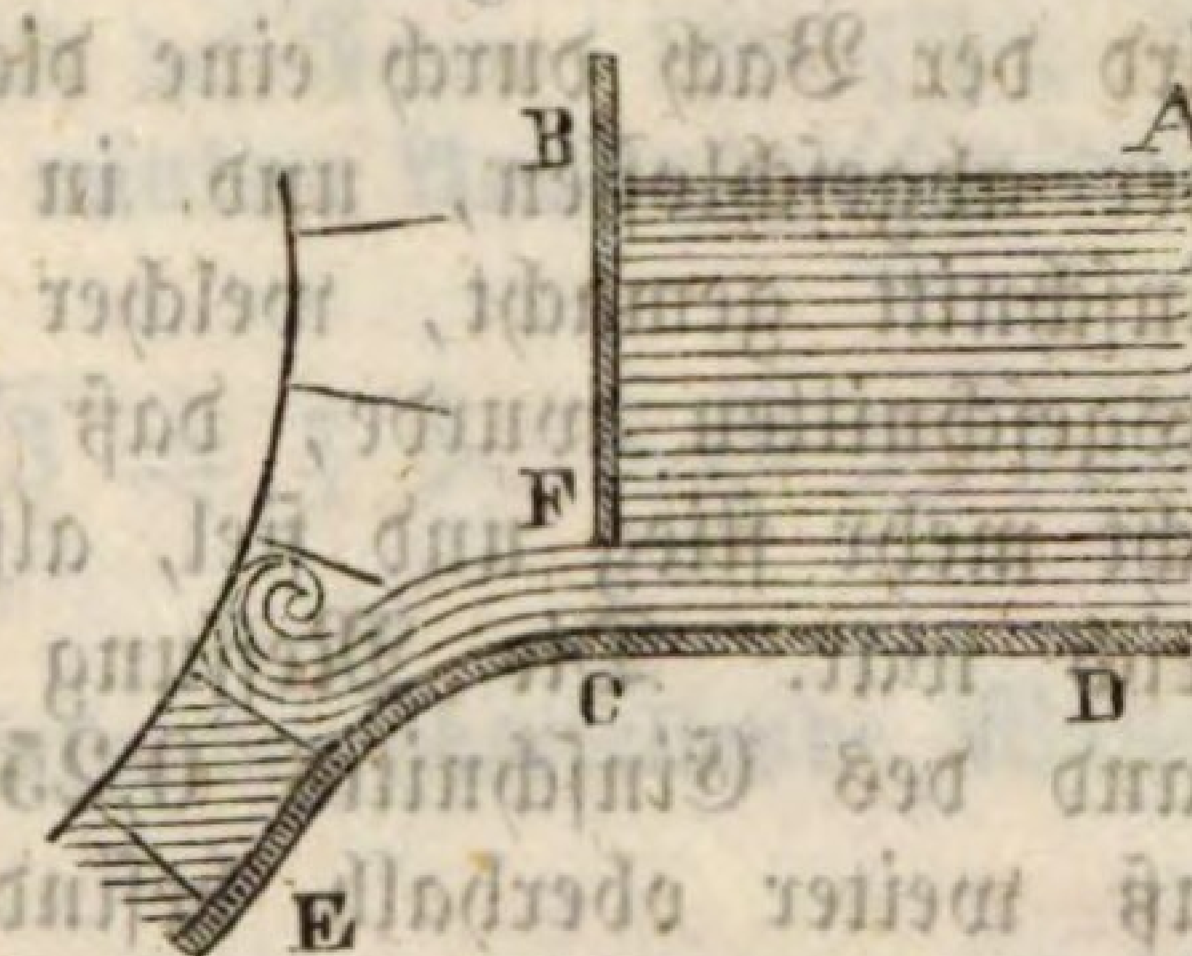
Hier ist (siehe Figur zum folgenden Beispiel) $BC = 2\frac{3}{4}' = 2{,}75 = CF = 1\frac{1}{4}' = 1{,}25$. Nimmt man die Tiefe des Mittelpunkts der Oeffnung unter dem Wasserspiegel $= 2{,}75 - \frac{1{,}25}{2} = 2{,}125'$ als Druckhöhe an, so wird die mittlere Ausflußgeschwindigkeit

$v = 8{,}19 \times \sqrt{2{,}125} = 8{,}19 \times 1{,}457 = 11{,}93'$;

die Fläche der Oeffnung ist $= 3 \times 1{,}25 = 3{,}75 \square'$, und daher die Ausflußmenge

$$M = 0{,}6 \times (3 \times 1{,}25) \times 11{,}93 = 0{,}6 \times 44{,}74$$
$$= 26{,}842 \text{ c}' \text{ per Sekunde.}$$

4. Beispiel. An einer kleinen mittelschlächtigen Mühle, deren Rad einen Mahlgang treibt, wird zum Zweck der Messung der zufließenden Wassermenge des Baches die 1′ breite Mühlschütze auf 4 Dec.-Zoll Höhe aufgezogen, und man findet durch Versuche, daß bei diesem Stand der Schütze das Druckwasser immer 3,1 Fuß hoch vor der Schütze stehen bleibt, daß also der Abfluß auf das Rad dem Zufluß des Baches gleich ist. Wie groß ist die Wassermenge, welche der Bach per Sekunde führt?



Antwort: Hier ist die Druckhöhe BC = 3,1 Fuß, FC die Höhe der Schützenöffnung = 0,4 Fuß; die Schützenbreite = 1 Fuß; die Druckhöhe h für den Mittelpunkt der Schützenöffnung $= BC - \frac{FC}{2}$ $= 3{,}1 - \frac{0{,}4}{2} = 2{,}9$ Fuß; daher die mittlere Ausflußgeschwindigkeit

$$v = 8{,}19 \times \sqrt{h} = 8{,}19 \times \sqrt{2{,}9} = 8{,}19 \times 1{,}703$$
$$= 13{,}947';$$

die Fläche der Schützenöffnung ist $q = 1 \times 0{,}4 = 0{,}4 \square'$; daher die per Sekunde ausfließende Wassermenge des Baches

$M = 0,6 \times q \times v = 0,6 \times 0,4 \times 13,947$
$= 3,347$ c′ Wasser.

5. Beispiel. Bei Anlage eines neuen Triebwerkes soll die Wassermenge, welche der Bach per Sekunde führt, gemessen werden. Zu diesem Zweck wird der Bach durch eine dicht eingesetzte Spundwand quer abgeschlossen, und in dieselbe ein 10′ breiter Einschnitt gemacht, welcher nach und nach so tief ausgeschnitten wurde, daß das gestaute Oberwasser nicht mehr stieg und fiel, also der Abfluß dem Zufluß gleich war. Die Messung ergab, daß der untere Rand des Einschnitts 0,25 Fuß unter dem einige Fuß weiter oberhalb befindlichen gestauten Wasserspiegel lag. Wie viel Wasser fiel per Sek. über?

Antwort: Hier ist (vergl. Fig. zu 243) die Breite des Ueberfalls = 10 Fuß, die Druckhöhe AE = h = 0,25, daher die mittlere Ausflußgeschwindigkeit

$v = \frac{2}{3} \times 8,19 \times \sqrt{0,25} = \frac{2}{3} \times 8,19 \times 0,5$
$= 2,73$ Fuß;

die Fläche des Einschnittes ist $q = 10 \times 0,25$
$= 2,5$ □′; daher die Ausflußmenge

$M = 0,64 \times q \times v = 0,64 \times 2,5 \times 2,73$
$= 6,825$ c′ Wasser per Sekunde.

(Wegen des Einschnittes war hier der Coëffizient 0,64 statt 0,60 in Rechnung zu nehmen.) *)

---

*) Die Beispiele 4 und 5 zeigen, wie die Wassermenge an einem vorhandenen Triebwerk und an einem offenen Bach gemessen wird. Auf diese Art muß verfahren werden, um die Wasserkraft eines Triebwerkes oder Baches zu ermitteln. (Vergl. Nr. 254 und 258.)

6. Beispiel. An dem 60′ langen Ueberfallwehr eines Flusses fällt das Wasser beim Hochwasser 3′ hoch über; wie groß ist die in einer Sekunde überfallende Wassermenge?

Antwort: Hier ist der Querschnitt des überfallenden Wassers $q = 60 \times 3 = 180 \square'$; die Druckhöhe $h = 3'$; die mittlere Ausflußgeschwindigkeit hiernach

$$v = \tfrac{2}{3} \times 8{,}19 \times \sqrt{3} = \tfrac{2}{3} \times 8{,}19 \times 1{,}732$$
$$= 9{,}457 \text{ Fuß}$$

und hieraus die per Sekunde überfallende Wassermenge

$$M = 0{,}64 \times q \times v = 0{,}64 \times 180 \times 9{,}457$$
$$= 1089{,}4 \text{ c}'.$$

245. Bewegung des Wassers in langen Röhrenleitungen. — Die Bewegung des Wassers und seine Ausflußgeschwindigkeit in langen Röhrenleitungen hängt ab von der Druckhöhe, der Länge und Weite der Röhre und außerdem noch von dem nicht unbeträchtlichen Reibungswiderstand in der Röhrenleitung. Nach Weisbach ist der Reibungswiderstand des Wassers in Röhrenleitungen ganz unabhängig vom Druck, wächst dagegen mit der Länge der Leitung und der Verkleinerung des Querschnitts. Er wächst ferner mit der Geschwindigkeit des Wassers und zwar so ziemlich proportional dem Quadrat derselben. Um also wenig Reibung zu erhalten, soll man die Röhrenleitung möglichst weit und nicht unnöthig lang machen.

Vernachlässigt man den Widerstand an der Ein- und Ausmündung, so ist für lange Röhrenleitungen, wenn h die Druck-

höhe, d. i. die senkrechte Entfernung des Mittelpunkts der Ausmündung vom oberen Wasserspiegel, l die Länge, d die Weite der Röhre, v die Ausflußgeschwindigkeit und r den Reibungscoëfficienten bezeichnet,

$$v = \frac{8,19 \times \sqrt{h}}{\sqrt{1,5 + \left(r \times \frac{l}{d}\right)}}$$

Der Reibungscoëfficient r kann (bayer. Maß vorausgesetzt) annähernd für eine Ausflußgeschwindigkeit von 1 bis 5 Zoll zu 0,047; für eine Geschw. von 5″—10″ zu 0,033; für eine Geschw. von 1—5 Fuß zu 0,025 und von 8—12 Fuß zu 0,02 angenommen werden.

1. Beispiel. Welche Wassermenge liefert eine 48′ lange, 2″ weite Röhrenleitung, wenn die Druckhöhe 5′ beträgt?

Antwort: Hier ist h = 5′ = 60″, d = 2″, l = 48′ = 576″, und da die Ausflußgeschwindigkeit über 5 Fuß betragen wird, r = 0,02. Hiernach wird die Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \frac{8,19 \times \sqrt{5}}{\sqrt{1,5 + \left(0,02 \times \frac{576}{2}\right)}} = \frac{8,19 \times 2,236}{\sqrt{7,26}}$$

$$= 6,79' = 81,48'' \text{ dd.}$$

Also die Wassermenge M per Sekunde (= Querschnitt × Geschwindigkeit)

$$M = \left(\frac{3,14 \times 2^2}{4}\right) \times 81,48 = 255,847 \text{ dd. c}''$$

Oder, da eine bayerische Maß = 74,304 c″ dd. hat,

$$M = \frac{255,847}{74,304} = 3,44 \text{ bayer. Maß.}$$

Die übrigen hier möglichen Aufgaben, z. B. die Röhrenweite zu finden, wenn Länge der Leitung, Druckhöhe und ausfließende Wassermenge gegeben ist u. s. w., löst man am besten durch Probiren.

2. Beispiel. Welche Weite muß man einer 100′ langen Röhrenleitung geben, welche bei 5′ Druckhöhe in jeder Sekunde

$\frac{1}{2}$ Kub. Fuß oder 500 Kub. Zoll (11,63 bayr. Maß) Wasser geben soll?

Antwort: Nimmt man vorläufig d = 4″ dec. an, so wird der Querschnitt $q = \frac{3,14 \times 4^2}{4} = 12,56$ □″ dec. und hieraus die Geschwindigkeit $v = \frac{500}{12,56} = 40''$ oder 4′ ohngefähr. Dieser Geschwindigkeit entspricht der Werth von r = 0,025, daher die Geschwindigkeit genauer

$$v = \frac{8,19 \times \sqrt{5}}{\sqrt{1,5 + \left(0,025 \times \frac{1000}{4}\right)}} = 6,22' = 62,2''.$$

Hieraus wird wiederum der Querschnitt genauer $q = \frac{500}{62,2}$ = 8,2 □″ dec. Kreisfläche des ausfließenden Wasserstrahls, und hieraus endlich

$$d = \sqrt{\frac{4 \times 8,2}{3,14}} = 3,2''.$$

In hölzernen Röhren ist nach Weisbach der Widerstand r noch 1,75mal größer als in Metallröhren. Im letzten Beispiel wäre daher für Holzröhren, statt r = 0,025 zu setzen: r = 1,75 × 0,025 = 0,044.

Zehntes Kapitel.

Von der Wasserkraft und den Triebwerken.

246. Einleitung. — Die wohlfeilste und daher am häufigsten zum Betrieb von Maschinen angewendete Naturkraft ist die Wasserkraft oder

die Kraft, welche das in Bewegung befindliche Wasser hervorbringt.

Die Kenntniß der Art und Weise, wie das Wasser Triebwerke in Bewegung setzt, ist heutzutage dem Mühlarzt unentbehrlich, da er bei Anlage eines neuen Werkes oder Verbesserung eines alten Triebwerkes wissen muß, worauf es ankommt, um den größtmöglichen Nutzen aus der vorhandenen Wasserkraft ziehen zu können.

Die Mangelhaftigkeit und ungenügende Leistung der Triebwerkseinrichtungen der alten Mahl- und Sägmühlen mit hölzernen Kammrädern ꝛc. ist längst anerkannt, und viele von tüchtigen Mühlenbaumeistern mit Hilfe des Mechanikers hergestellte neuere Werke dieser Art haben den thatsächlichen Beweis geliefert, daß mit einer und derselben Wasserkraft jetzt ungleich mehr geleistet werden kann, als früher, und daß der Umbau eines alten Triebwerkes und die Einrichtung desselben nach neueren Prinzipien für den Besitzer ein rentables Unternehmen ist. Allenthalben werden daher jetzt Mahl- und Schneidmühlen neu erbaut oder verbessert.

Nicht immer werden aber hiebei die richtigen Grundsätze befolgt.

Offenbar ist die durchschnittliche Wasserkraft eines Baches etwas Gegebenes, Unveränderliches, das wohl nach Belieben verringert, aber nicht vermehrt werden kann. Soll daher das auf ein Triebwerk verwendete Bau-Kapital eine möglichst große Rente abwerfen, so muß vor Allem die disponible Wasserkraft möglichst nutzbringend ausgebeutet werden. Es muß also von der Größe der Wasserkraft ausgegangen, nach dieser das Wasserrad angelegt und nach der von dem

Rad auf das innere Werk übertragenen Kraft die Einrichtung des letzteren getroffen werden.

Der Mühlarzt, welchem der Neubau oder die Verbesserung eines Werkes übertragen wird, soll daher die Grundsätze kennen, nach welchen die Wirkung eines Triebwerkes zu beurtheilen und dieses selbst möglichst nutzenbringend anzulegen ist. Er soll insbesondere wissen, wie die Wasserkraft eines Triebwerkes bestimmt wird, nicht allein weil diese den Ausgangspunkt für die richtige Anlage des ganzen Werkes bildet, sondern auch weil die Wasserkraft selbst in vielen Fällen nicht vollständig ausgenützt, schon von vornherein einer Vergrößerung fähig ist und auf diesem, weil dem billigsten Weg, die vortheilhafteste und ergiebigste Verbesserung des Werkes erzielt werden kann.

Das gegenwärtige Kapitel enthält das Nothwendigste aus der Theorie über die Wasserkräfte und ihre Anwendung beim Bau der Triebwerke; bezüglich der Ausführung selbst, der Construktion der einzelnen Theile 2c. muß auf die speziellen Werke über Mühlenbau und auf die Praxis verwiesen werden.

Der Mühlarzt wird auch häufig bei den so verwickelten und langwierigen Processen über Wasserbenützung und den daraus hervorgehenden Entschädigungsklagen 2c. von Privaten und Gerichten als Sachverständiger zu Rathe gezogen. Die Erfahrung zeigt aber, daß gerade bei Mühlärzten häufig die verworrensten und unklarsten Begriffe über die Mahlkraft des Wassers vorherrschen, und gar mancher derartige Proceß ist durch die unrichtige Auffassung und unklare Darstellung dessen, worauf es ankommt, von Seite der Sachverständigen unnöthigerweise in die Länge gezogen und unverhältnißmäßig kostspielig

geworden. Auch in dieser Beziehung wird das über die Wasserkraft und Triebwerke im Folgenden Dargestellte dem Mühlarzt eine willkommene Anleitung geben, wie in solchen Fällen zu verfahren sein wird, wobei auf die bestehenden Gesetze über die Benützung des Wassers vorzugsweise Rücksicht genommen ist.

247. Erklärungen über die Triebwerke und ihre Bestandtheile. — Man unterscheidet zweierlei Arten von Triebwerken:

a) Mit gespannter Wasserkraft, bei welchen das Wasser künstlich gestaut ist, und durch eine Schützenöffnung auf die Schaufeln oder in die Zellen eines Rades strömt, und dieses durch seinen Stoß oder sein Gewicht oder durch beides zugleich in Bewegung setzt; und

b) Triebwerke ohne gespannte Wasserkraft in offenen Flüssen oder Canälen; bei diesen hängt das Rad einfach in einem fließenden Wasser und wird durch den Stoß des Wassers umgetrieben.

Bei einem Triebwerk mit gespannter Wasserkraft unterscheidet man: das Oberwasser, d. i. der Wasserspiegel des gestauten Wasser oberhalb der Mühle; das Unterwasser, d. i. der Wasserspiegel des unterhalb des Rades wegfließenden Wassers. Liegen Mühlen an einem und demselben Bach nahe bei einander, so bildet der Wasserspiegel des Oberwassers der untern Mühle zugleich das Unterwasser der oberen Mühle. Der Höhenunterschied oder die senkrechte Entfernung zwischen dem Spiegel des Oberwassers und dem des Unterwassers heißt das Gefälle.

Lebendiges Gefäll, d. i. das Gefäll des Wassers vom Austritt aus der Schütze bis zum Unterwasser; Stoßgefälle, d. i. das Gefälle, so weit das Wasser stößt; und Druckgefälle, d. i. das Gefälle, so weit es durch Druck wirkt, sind veraltete Begriffe, welche keinen theoretischen und praktischen Werth haben.

Die Höhenlage des Wasserspiegels des Oberwassers wird die zuständige Wasserhöhe genannt. Sie wird nach dem Gesetz*) durch den sogenannten Aichpfahl fixirt.

Der Aichpfahl besteht aus einem 1 Fuß im □ messenden, 8—10′ langen eichenen Pfahl, welcher unten ein eichenes Kreuz mit 4 je 2′ langen, 6 Zoll im □ starken Armen hat. Durch den Pfahl und das Kreuz geht ein ¾ Zoll starker eiserner Bolzen oben mit einem Kopf, unten mit einer eisernen Schließe versehen, welcher die auf dem Pfahl befindliche Kupferplatte und das unten befindliche Kreuz mit dem Pfahl fest verbindet. Dieser Aichpfahl wird in eine 8—10 Fuß tiefe Grube in der Nähe des Oberwassers so gesetzt, und das Kreuz mit Steinen und Erde beschwert, daß die Kupferplatte vom Spiegel des Oberwassers gerade bespült wird, und der richtige Stand des Oberwassers von Jedermann leicht erkannt werden kann. **)

Um das Oberwasser einer Mühle auf die gehörige Höhe zu stauen, aber auch um bei Hochwasser das überflüssige Wasser abführen zu können, ohne daß die zuständige Wasserhöhe überschritten wird, ist ein sogenanntes Wehr (Mühlwehr) nöthig, welches gewöhnlich etwas oberhalb der Mühle angelegt wird.

---

*) Das Gesetz über die Benützung des Wassers (in Bayern) vom 28. Mai 1852 sollte jedem Mühlenbesitzer und Mühlarzt bekannt sein, insbesondere die §§. 73—85 über Triebwerke und Stauvorrichtungen. Zur Anschaffung wird die Ausgabe von S. Jos. Jandebeur, München 1852 bei A. Finsterlin, empfohlen. Preis 1 fl. 36 kr.

**) Vergleiche die Instruktion (zu §. 77 des genannten Gesetzes) über „das Verfahren bei Aufstellung der Höhenmaße, Aichpfähle bei Stau-Vorrichtungen und Triebwerke" vom 11. Jan. 1855. Käuflich zu haben als ein Theil der bayer. Gesetze- und Verordnungen-Sammlung, erschienen bei G. Franz in München.

Hat dasselbe Schützen, so heißt es Schleußenwehr, und wenn diese Schützen bis zum Grund gehen, Grundablaß. (Jedes richtige Mühlwehr sollte Zugschützen haben, um das Hochwasser schnell und ohne Beschädigung des oberen Müllers und der anstoßenden Grundbesitzer abführen zu können.)

Ist das Wehr ohne Schützen, so heißt es Ueberfallwehr. Die hölzerne Schwelle, welche den oberen Rand des Ueberfallwehres bildet, heißt die Wehrschwelle. Zuweilen haben Müller das herkömmliche Recht, bei kleinem Wasser Dielen (Aufsatzdielen) auf das Wehr zu setzen, um das Stauwasser zeitweise zu erhöhen. Solche Aufsatzdielen geben indessen zu Willkührlichkeiten und Klagen Veranlassung und sollten nicht geduldet werden.

Um das Hochwasser rasch abzuführen, hat man noch unmittelbar am Triebwerk besondere Zugschützen, Leerlauf oder Grundschützen, Feldschützen genannt, durch welche das Oberwasser unmittelbar zum Unterwasser hinabfällt, und ganz abgelassen werden kann. Die Schütze, durch welche das Oberwasser auf das Rad gelangt, und welche sich unmittelbar vor dem Rad befindet, heißt Mühlschütze. Das Querholz, auf welchem die Mühlschütze, wenn sie hinabgelassen ist, aufruht, heißt die Mühlschwelle. Vor oder oberhalb der Mühlschütze befindet sich der Mühlweiher mit dem sogenannten Schutzkasten; ist die Zuleitung des Oberwassers bis zur Mühlschütze lang, so heißt dieselbe Mühlcanal oder Mühlrinne. Diese, sowie der Schutzkasten ist gewöhnlich von Holz. Der Boden der Mühlschütze heißt der Gerinnboden. Die Querschwelle, auf welche die Schütze eines Mühlgerinnes,

eines Wehres, eines Grundablasses 2c. hinab gelassen werden kann, und über welche das Wasser beim Oeffnen der Schütze wegströmt, heißt der Fachbaum.

Das gestaute Wasser vor der Mühlschütze heißt das Druckwasser, Standwasser. Die Höhe des Wasserstands des Oberwassers unmittelbar vor der Mühlschütze heißt die Druckhöhe.

Wird die Schütze gezogen, so strömt das Wasser durch die Schützenöffnung auf das Rad. Die Höhe dieser Oeffnung oder die Dicke des auf ein Rad einschließenden Wasserstrahls heißt die Wasserdicke. (Häufig wird unter Wasserdicke die Druckhöhe vor der Mühlschütze verstanden. Zur Vermeidung von Irrthümern wird jedoch die angegebene richtigere Bezeichnung empfohlen.) Der Canal, in welchem sich das Rad bewegt, heißt das Gerinne, und zwar ein Schnurgerinne, wenn dasselbe eine geneigte Ebene bildet, und Kropfgerinne, wenn dasselbe unten nach dem Umfang des Rades und zwischen Rad und Mühlschütze in entgegengesetztem Sinn nach oben gekrümmt ist. (Fig. zu 244.)

Die Verlängerung des Gerinnes im Unterwasser heißt die Wadrinne. Die Ueberdeckung des Rades oder das Gehäuße desselben zum Schutz gegen Frost und Beschädigung heißt die Radstube. Der Abstand des untersten Punktes eines Rades vom Unterwasser heißt das Freigehänge des Rades.

Man unterscheidet hauptsächlich dreierlei Arten von Wasserrädern:

1) Das unterschlächtige Wasserrad mit geraden oder gebrochenen Schaufeln, wird bei kleinen Gefällen und in offenen Flüssen angewendet; in

diesem Fall liegt der Radmittelpunkt ziemlich hoch über dem Oberwasser. Hat es gekrümmte Schaufeln, so heißt es nach dem Namen des Erfinders ein Ponçelet-Rad.

2) Das mittelschlächtige Wasserrad, welches bei mittleren Gefällen angewendet wird, und bei welchem der Mittelpunkt des Rades wenig über oder unter dem Spiegel des Oberwassers liegt. Hieher gehört: das Kropfrad mit geraden, gebrochenen oder gekrümmten Schaufeln, welches seinen Namen von der Form des Radgerinnes hat (Fig. zu 244); und das rückschlächtige Zellenrad, bei welchem das Wasser in der oberen Hälfte des Rades in die Zellen eintritt; endlich

3) Das oberschlächtige Rad, welches bei großen Gefällen zur Anwendung kommt und seinen Mittelpunkt nahezu in der Mitte zwischen Ober- und Unterwasser hat. Dasselbe hat kasten- oder zellenförmige Schaufeln, in welche das Wasser am obersten Punkt des Rades eingeleitet wird.

Bei den unterschlächtigen Rädern wirkt das Wasser vorzugsweise durch seine Geschwindigkeit, also durch seine Stoßkraft; bei den mittelschlächtigen durch Stoß und Druck; bei den oberschlächtigen nur durch seinen Druck (Gewicht). Die horizontalen Wasserräder heißen Turbinen.

Noch ist an jedem vom Wasser getriebenen Werk zu unterscheiden: das äußere Werk, d. i. das Rad mit dem Wasserbau oder das eigentliche Triebwerk; und das innere Werk, welches ein Mahlwerk, eine Schneidsäge, eine Oelstampfe ꝛc. sein kann. Wir haben es hier nur mit dem eigentlichen Triebwerk zu thun.

248. Kraft und Arbeit. — Ehe zur Bestimmung der Größe der Wasserkraft geschritten werden kann, ist zu erklären, wie die Kräfte in Bezug auf ihre Leistungen nicht bloß beim Wasser, sondern auch bei Menschen und Thieren, Dampfmaschinen ꝛc. gemessen und mit einander verglichen werden können.

Wenn eine Kraft einen Widerstand überwindet, so sagt man, sie verrichte eine (mechanische) Arbeit.

Ein Mann, welcher eine Last auf der Schulter eine Stiege hinaufträgt, verrichtet eine mechanische Arbeit; deßgleichen ein Pferd, welches den Göpel einer Dreschmaschine in Bewegung setzt, ein Schiff auf dem Wasser, oder einen Wagen auf einer Straße zieht. Aber auch Naturkräfte, welche in Maschinen wirken, verrichten mechanische Arbeiten. Bei einer Locomotive ist die bewegende Kraft der Dampf, die Locomotive die Maschine, und die angehängte Last mit der ihr ertheilten Geschwindigkeit die mechanische Arbeit. Bei einer Sägmühle ist das Wasser die bewegende Kraft, das Wasserrad mit der Säge bildet die Maschine, das geschnittene Holz ist die geleistete Arbeit. Alle diese verschiedenartigen Leistungen oder Arbeiten müssen offenbar mit einander verglichen werden können. Dieß geschieht dadurch, daß man die „Arbeit" der Menschen-, Thier- und Maschinenkräfte in allen Fällen mit derjenigen Arbeit vergleicht, welche nöthig, ein gewisses Gewicht aus einer gewissen Tiefe zu heben. Um die mechanische Arbeit eines Lastträgers, einer Locomotive, eines Wasserrads ꝛc. zu vergleichen, denke man sich jede dieser Kräfte einen gleichen Zeitraum hindurch an ein Seil

gespannt, welches um eine Rolle geschlagen ist, und an dessen Ende eine Last hängt, welche aufgezogen werden soll. Je größer die mechanische Arbeitsleistung einer Kraft ist, desto größer wird die angehängte Last und die Geschwindigkeit sein, mit welcher sie gehoben wird. Denkt man sich einen feinen Faden über eine genau gearbeitete Rolle geschlagen und an beiden Enden gleich schwere Gewichte angehängt, so werden diese sich das Gleichgewicht halten und in Ruhe sein. Ist die Reibung der Rolle und das Gewicht des Fadens sehr gering, so wird ein leiser Druck auf das eine Gewicht hinreichend sein, die Reibung zu überwinden, und es wird das eine Gewicht durch einen gewissen Raum abwärts sinken und das gleiche Gewicht auf der andern Seite auf die gleiche Höhe heben. Die mechanische Arbeit des niedergehenden Gewichts ist daher genau so groß, als die Arbeit, welche dazu gehört, das gleiche Gewicht auf die gleiche Höhe zu heben. Daher der allgemeine Lehrsatz:

Die mechanische Arbeit eines in Bewegung befindlichen Körpers ist gleich dem Produkt aus dessen Gewicht und dem von ihm zurückgelegten Weg.

Bezeichnet man das Gewicht mit g, den zurückgelegten Weg mit h, so ist der Ausdruck für die mechanische Arbeit M, welche dieses Gewicht bei seiner Bewegung durch den Weg h leistet

$$M = g \times h.$$

Dieser Satz gilt eben so von gehobenen Lasten wie von frei fallenden Körpern ohne Rücksicht auf die Art der Bewegung, und gibt daher ein sehr ein-

faches Mittel, die mechanische Arbeit bewegter Körper zu berechnen.

249. Fußpfund. — Man ist übereingekommen, als Maßeinheit für die mechanische Arbeit einer Kraft diejenige Arbeit anzunehmen, welche nöthig ist, um 1 Pfund in 1 Sekunde 1 Fuß zu heben, und nennt diese Arbeit oder Leistung: Ein Fußpfund.

Wird z. B. ein Rammklotz von 5 Ctr. Schwere von 25 Mann in einer Sekunde 4′ hoch gehoben, so verrichten diese 25 Mann eine Arbeit von 500 $\times$ 4 = 2000 Fußpfund. Einer verrichtet sohin in einer Sekunde eine Arbeit von $\frac{2000}{25}$ oder 80 Fußpfund.

Ein Mann, welcher in 15 Sekunden einen Eimer Wasser (= 2,58 c′ zu 44,4 Pfd. oder 114,55 Pfund) aus einem $10\frac{1}{2}$′ tiefen Brunnen pumpt, verrichtet in dieser Zeit eine mechanische Arbeit von 114,55 $\times$ 10,5 = 1202,7 Fußpfund und in 1 Sekunde von $\frac{1202}{15}$ = 80 Fußpfund, leistet also eben so viel.

250. Pferdekraft. — Zur schnelleren Beurtheilung der in Fußpfunden ausgedrückten Leistungen von Menschen, Thieren und Maschinen, und um die starken Leistungen der letztern in nicht zu großen Zahlen ausdrücken zu müssen, hat man eine größere Maßeinheit für die mechanische Arbeit eingeführt, und dieselbe Pferdekraft genannt. Allgemein wird gegenwärtig hierunter diejenige mechanische Arbeit verstanden, welche nöthig ist, um ein Gewicht von 75 Kilogramm in einer Sekunde einen Meter hoch zu heben. Im französischen Maß und Gewicht ist daher eine Pferdekraft gleich 75 Kilogramm-Meter. Da

1 Kilogr. = 1,7857 bayer. Pfd. und 1 Meter = 3,4263 bayer. Fuß, so entsprechen 75 Kilogramm-Meter = 75 × 1,7857 × 3,4263 = 458,88 Fußpfund bayer.

Eine Pferdekraft ist daher gleich 458,88 bayer. Fußpfund, oder gleich der Arbeitsleistung, welche nöthig ist, um 458,88 bayer. Pfd. in 1 Sek. 1 bayer. Fuß hoch zu heben.

Nach diesem Maßstab ist daher jede Arbeitsleistung von Menschen, Thieren und Maschinen zu beurtheilen und zu messen.

Die oben angeführten 25 Arbeiter an der Zugramme leisten per Sek. zusammen 2000 Fußpfund, sohin $\frac{2000}{458,88}$ = 4,35 Pferdekräfte.

Hat eine Dampfmaschine 10 Pferdekräfte, so heißt dieß: die Maschine ist im Stand in jeder Sekunde 10 × 458,88 = 4588,8 Pfd. 1 Fuß hoch zu heben.

Eine Maschine, welche in 1 Sek. 458,88 Pfd. 10′ hoch oder 45,888 Pfund 100′ hoch hebt, leistet dasselbe, da

4588,8 × 1 = 458,88 × 10 = 45,888 × 100 = 4588,8 Fußpfund oder 10 Pferdekräfte gibt.

Die ständige Arbeitsleistung, welche ein Mann von mittlerer Stärke ohne Nachtheil für seine Gesundheit entwickeln kann, ist 37 bis 43 Fußpfund per Sekunde. Ein Pferd kann das 10fache oder 370 bis 430 Fußpfund per Sekunde leisten.

Das angenommene Maß von 459 Fußpfund für eine mechanische Pferdekraft ist daher etwas größer als die ständige Arbeitsleistung eines Pferdes.

Der Kürze wegen, und da Wasserkräfte ohnehin

nie ganz genau gefunden werden können, soll im Folgenden eine Pferdekraft zu 459 bayer. Fußpfund angenommen werden.

251. Größe der mechanischen Arbeit des bewegten Wassers. Berechnung der Wasserkraft. — Wenn Wasser von einer gewissen Höhe frei herabfällt, so verrichtet es dabei eine gewisse mechanische Arbeit, welche nach 248 ganz genau derjenigen Arbeit gleich kommt, welche nöthig ist, um diese Wassermenge auf die gleiche Höhe zu heben. Bezeichnet g das Gewicht der Wassermenge, welche in einer Sekunde durch die Höhe h niederfällt, so ist die mechanische Arbeit M dieses Wassers während seines Falles

$$M = g \times h$$

oder, da das Gewicht eines Kubikfußes Wasser 44,4 bayer. Pfd. beträgt, wenn man die Wassermenge per Sekunde wie früher mit m bezeichnet,

$$M = 44{,}4 \times m \times h \text{ Fußpfund.}$$

Auf ein Triebwerk mit gespannter Wasserkraft angewendet, heißt dieß:

Man findet die Größe der Wasserkraft in Fußpfunden, wenn man das Gewicht ($g = 44{,}4 \times m$) der in 1 Sek. zufließende Wassermenge des Baches mit dem Gefäll h multiplizirt.

Um die Fußpfunde in Pferdekräfte zu verwandeln, hat man nur mit 458,88 oder 459 zu dividiren; dieß gibt

$$M = \frac{44{,}4 \times m \times h}{459}$$

oder, da $\frac{44{,}4}{459} = 0{,}0967$ ist,

$$M = 0{,}0967 \times m \times h \text{ Pferdekräfte.}$$

Diese höchst einfache Regel für die Berechnung der Wasserkraft eines Triebwerkes sagt:

Man erhält die Wasserkraft M eines Triebwerkes in Pferdekräften, wenn man das Produkt aus der in jeder Sekunde zufließende Wassermenge m (in c') und dem Gefäll h (in Fußen) mit dem Decimalbruch 0,0967 multiplizirt.

Da $0{,}0967 = \frac{1}{10{,}4}$ oder nahezu $= \frac{1}{10}$ ist, so erhält man auch die Wasserkraft in Pferdekräften, wenn man das Produkt aus Wassermenge und Gefäll mit 10,4 dividirt.

Bei kleinen Wassermengen kann mit hinreichender Genauigkeit immer $\frac{1}{10}$ statt 0,0967 angewendet werden. Hiebei ist bayer. Maß und Gewicht und die Größe einer Pferdekraft zu 459 Fußpfund bayer. zu Grunde gelegt.

Diese Regel gilt nicht allein für gespanntes Wasser, sondern auch für frei fließendes. In diesem Fall ist nur die Geschwindigkeit des frei fließenden Wassers als durch den freien Fall aus einer gewissen Höhe h hervorgerufen zu betrachten, welche die Geschwindigkeitshöhe heißt und es ist alsdann diese Höhe als das Gefäll zu betrachten und in Rechnung zu nehmen. Wie aus der Geschwindigkeit eines frei fließenden Wassers dessen Geschwindigkeitshöhe gefunden wird, ist in No. 224 und 226 gezeigt worden. Ist nehmlich v die Geschwindigkeit des frei fließenden Wassers, so ist das dieser Geschwindigkeit entsprechende Gefäll oder die Geschwindigkeitshöhe

$$h = 0{,}0148 \times v^2. —$$

Um die Wasserkraft eines Flusses oder Baches berechnen zu können, muß also bekannt sein:

a) bei gespannter Wasserkraft:
   1) die in jeder Sekunde zufließende Wassermenge, und
   2) das Gefäll;

b) bei frei fließendem Wasser:
   1) die in jeder Sekunde zufließende Wassermenge, und
   2) die Geschwindigkeit des Wassers.

Sind diese 2 Größen durch Messung ermittelt, so ist die Berechnung der Wasserkraft höchst einfach, wie folgende Beispiele zeigen.

252. Beispiele.

a) Triebwerke mit gespannter Wasserkraft. — 1. Beispiel. Ueber ein 4′ hohes Wehr fallen in jeder Sekunde 20 c′ Wasser, wie groß ist die Wasserkraft des Flusses?

Antwort: 20 c′ Wasser wiegen $20 \times 44{,}4 = 888$ Pfd.; g ist also $= 888$ Pfd.; das Gefäll ist $h = 4'$, daher die Wasserkraft

$$M = g \times h$$
$$= 888 \times 4$$
$$= 3552 \text{ Fußpfund.}$$

oder $\frac{3552}{459} = 7{,}7$ Pferdekräfte.

Berechnet man nach der letzten Formel $M = 0{,}967 \times m \times h$, die Pferdekräfte unmittelbar aus der Wassermenge und dem Gefäll, so hat man $m = 20$ c′; $h = 4'$ und daher

$M = 0{,}0967 \times 20 \times 4 = 7{,}7$ Pferdekräfte; rechnet man aber nach Regel

$$M = \frac{m \times h}{10{,}4}$$

so erhält man

$$M = \frac{20 \times 4}{10{,}4} = 7{,}7 \text{ Pferdekräfte,}$$

also eben so viel; rechnet man aber annähernd

$$M = \frac{m \times h}{10}$$

$$= \frac{20 \times 4}{10}$$

so erhält man

$$M = 8 \text{ Pferdekräfte,}$$

also ein etwas zu großes Resultat. —

2. Beispiel. Ein oberschlächtiges Triebwerk hat 12′ Gefäll zwischen Ober- und Unterwasser, und der Bach liefert per Sekunde 5 c′ Wasser, wie groß ist die Wasserkraft?

Antwort: Hier ist

$m = 5$ c′

$h = 12'$, daher

$$M = 0{,}0967 \times m \times h$$

$$= 0{,}0967 \times 5 \times 12$$

$$= 0{,}0967 \times 60$$

$$= 5{,}8 \text{ Pferdekräfte.}$$

3. Beispiel. Ein Bach habe 40′ mittlere Breite, 3,5′ mittlere Tiefe und durchschnittlich 2′ Geschwindigkeit, derselbe führe sohin im Mittel $40 \times 3{,}5 \times 2 = 280$ c′ Wasser per Sekunde. Dieser Bach kann behufs der Anlage eines Triebwerks nur auf 2,5′ Höhe gestaut werden, wie groß wird die

Wasserkraft für die anzulegende unterschlächtige Mühle sein, wenn alles Wasser auf die Räder wirkt?

Antwort: Hier ist die Wassermenge m = 280 c′; das Gefäll h = 2,5′; daher die gesuchte Wasserkraft

$$M = 0{,}0967 \times m \times h$$
$$= 0{,}0967 \times 280 \times 2{,}5$$
$$= 67{,}69 \text{ Pferdekräfte.}$$

4. Beispiel. Ein kleines Gebirgsbächlein liefere durchschnittlich per Sek. ½ Eimer oder 30 bayer. Maß Wasser zu 0,043 c′, sohin per Sek. 30 × 0,043 = 1,29 c′ Wasser; das Gefäll läßt sich künstlich auf 24 Fuß bringen, wie groß wird die Wasserkraft für die anzulegende oberschlächtige Mühle sein?

Antwort: Hier ist die Wassermenge m = 1,29 c′, das Gefäll h = 24′; daher die gesuchte Wasserkraft

$$M = 0{,}0967 \times m \times h$$
$$= 0{,}0967 \times 1{,}29 \times 24$$
$$= 2{,}99 \text{ oder 3 Pferdekräfte.}$$

Ist die Wasserkraft gegeben und die zufließende Wassermenge per Sek., so findet man das nöthige Gefäll, wenn man die Wasserkraft mit 10,4 multiplizirt und mit der Wassermenge dividirt.

5. Beispiel. Zu einer Mahlmühle mit zwei Gängen braucht man eine Wasserkraft von 12 Pferdekräften. Der Wasserzufluß des Baches ist per Sek. 20 c′; wie groß muß das Gefäll sein?

Antwort:

$$= \frac{10{,}4 \times 12}{20} = \frac{124{,}8}{20} = 6{,}08 \text{ Fuß.}$$

Ist die Wasserkraft und das Gefäll gegeben, so findet man die nöthige Zuflußmenge per Sek., wenn man das 10,4fache der Kraft mit dem Gefäll dividirt.

6. Beispiel. An einer Mühle, welche 6,5′ Gefäll und überflüssig Wasser hat, soll noch ein Säggang eingerichtet werden, welcher eine Wasserkraft von 8 Pferdekräften verlangt. Wie viel Wasser per Sek. wird zugeleitet werden müssen?

Antwort:

$$= \frac{10,4 \times 8}{6,5} = 12,8 \text{ c}'.$$

Hieraus und aus der Höhe des Druckwassers läßt sich die nöthige Breite der Radschütze finden. —

253. b) Triebwerke an frei fließendem Wasser. — Beispiel. In einen frei fließenden Fluß soll ein Wasserrad von 8′ Breite eingehängt werden; wenn nun die Radschaufeln bei 8′ Länge 1,5′ tief ins Wasser tauchen, und die Geschwindigkeit des Wassers an der Mitte der eingetauchten Schaufel oder 0,75′ unter dem Wasserspiegel 6′ beträgt, wie groß wird die Wasserkraft sein, welche auf die Schaufeln des Rades wirkt?

Antwort: Hier ist aus der gegebenen Geschwindigkeit des Wassers nach 226 vorerst die entsprechende Geschwindigkeitshöhe

$$h = 0,0148 \times v^2$$

zu suchen; diese wird, da $v = 6'$ ist,

$$h = 0,0148 \times 6^2$$
$$= 0,0148 \times 36$$
$$= 0,6328 \text{ Fuß}.$$

Diese ist als das Gefäll zu betrachten. Die auf eine Schaufel wirkende Wassermenge m ist gleich dem Produkt aus der Fläche der Schaufel und der Geschwindigkeit des Wassers oder bei 8′ Länge 1,5′ Breite der eingetauchten Schaufel und 6′ Geschwindigkeit des Wassers

$$m = 8 \times 1{,}5 \times 6 = 72\ c'$$

per Sekunde. Da nun

$$m = 72\ c';\ h = 0{,}6328'$$

so ist die gesuchte Wasserkraft

$$M = 0{,}0967 \times m \times h$$
$$= 0{,}0967 \times 72 \times 0{,}6328$$
$$= 4{,}41 \text{ Pferdekräfte.}$$

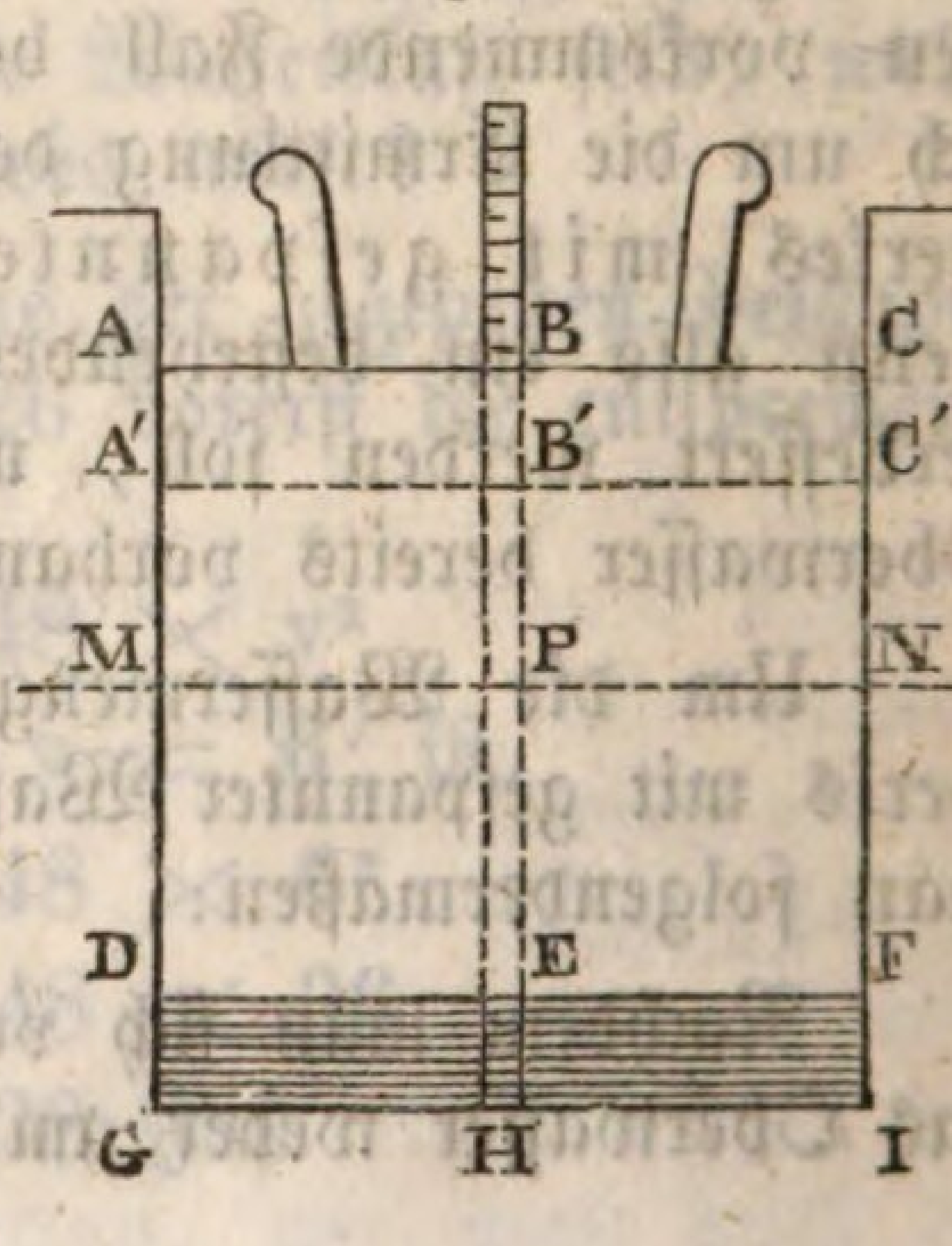
254. Messung der Wassermenge bei Triebwerken mit gespannter Wasserkraft. — Wie gerade gezeigt wurde, ist zur Berechnung der Wasserkraft die Kenntniß der Wassermenge, welche der Fluß oder Bach per Sekunde führt, nothwendig. Es fragt sich also, wie diese Wassermenge gemessen wird.

Hier soll zuerst der einfachere und am häufigsten vorkommende Fall betrachtet werden, wenn es sich um die Ermittlung der Wassermenge eines Triebwerkes mit gespannter Wasserkraft handelt, wenn also ein bestehendes Triebwerk umgebaut und verbessert werden soll, und ein künstlich gestautes Oberwasser bereits vorhanden ist.

Um die Wassermenge eines bestehenden Triebwerks mit gespannter Wasserkraft zu messen, verfährt man folgendermaßen:

Nachdem man sich vor Allem versichert hat, daß das Oberwasser weder am Wehr noch an der Grund-

schütze und an den Mühlschützen ꝛc. ausrinne, und allenfallsige Risse und sonstige Ausflußöffnungen verstopft hat, läßt man das Oberwasser bis zum höchsten Stand, den es gewöhnlich erreicht, oder bis zur zuständigen Wasserhöhe, wenn eine solche durch einen Aichpfahl festgesetzt ist, anschwellen. Man mißt nun den Stand des Oberwassers dicht vor der Mühlschütze und notirt sich denselben. Alsdann wird die Mühlschütze ACDF (von der übrigens vorausgesetzt wird, daß sie in gutem Stand sei und genau an den Fachbaum und an die Führung sich anschließe) vorsichtig gezogen und allmählig so weit geöffnet, daß das durch die Schützenöffnung DFIG abfließende Wasser dem Zufluß des Baches gleich wird, was man daran erkennt, daß das Oberwasser MN alsdann nicht mehr steigt und fällt. Ist dieser Zeitpunkt durch Versuche genau ermittelt, so wird die Höhenlage des oberen Randes AC der Schütze (welcher zu diesem Zweck vorher scharfkantig abgehobelt werden kann) und der Stand des Oberwassers MN (die Druckhöhe) an einem auf den Gerinnboden unmittelbar vor der Schütze aufgesetzten Maßstab BH angemerkt. Diese Messung des oberen Randes der Schütze und der Höhe des Druckwassers muß aber an den beiden Enden A und C und in der Mitte bei B vorgenommen werden, da der Boden GI, der Wasserstand MN und der obere Rand AC der Schütze nie ganz genau parallel sein werden. Man mißt also



MG, PH, NI, und findet z. B. MG = 3,15, PH = 3,16, NI = 3,20 Fuß. Das arithmetische Mittel aus den drei Messungen ist

$$= \frac{3,15 + 3,16 + 3,20}{3} = \frac{9,51}{3} = 3,17' = PH$$

der mittlere Stand des Oberwassers über dem untern Rand der Schützenöffnung. Man mißt alsdann auch die Höhenlage des oberen Randes der Schütze und findet z. B. AG = 4,50, BH = 4,52 und CI = 4,57 Fuß; alsdann ist das arithmetische Mittel hieraus

$$= \frac{4,50 + 4,52 + 4,57}{3} = \frac{13,59}{3} = 4,53 \text{ Fuß} = BH$$

der mittlere Stand des oberen Rands der Schütze über dem untern Rand der Oeffnung.

Nun wird die Schütze wieder zugestellt, und die Höhenlage des oberen Randes A′ B′ C′ über dem Gerinnboden wieder an denselben 3 Stellen gemessen. Findet man nun z. B. A′G = 4,15, B′H = 4,16 und C′I = 4,20 Fuß, so ist das Mittel aus diesen 3 Maßen

$$= \frac{4,15 + 4,16 + 4,20}{3} = \frac{12,51}{3} = 4,17 = B'H$$

die mittlere Höhe des oberen Randes der Schütze, wenn sie geschlossen ist. Die Differenz BH — B′H = 4,53 — 4,17 = 0,36 Fuß ist alsdann die mittlere Höhe EH der aufgezogenen Schützenöffnung, oder die Dicke des ausströmenden Wasserstrahls. Man mißt nun noch möglichst genau die Weite DF = GI der Schützenöffnung. Diese sei = 2,41 Fuß. Alsdann ist die Fläche der Schützenöffnung oder der Querschnitt des austretenden Wasserstrahls = Rechteck DFIG = 2,41 × 0,36 = 0,8676 □′.

Die mittlere Druckhöhe des Oberwassers für diese Ausflußöffnung oder der Abstand des Mittelpunkts der Oeffnung DFIG vom Wasserspiegel MN ergibt sich $= PH - \frac{1}{2} EH = 3{,}17 - \frac{0{,}36}{2} = 3{,}17 - 0{,}18 = 2{,}99$ Fuß.

Aus dem Querschnitt der Schützenöffnung $= 0{,}8676 \square'$ und der mittleren Druckhöhe $= 2{,}99$ Fuß ergibt sich nun die in einer Sekunde ausfließende Wassermenge nach 244. Die mittlere Ausflußgeschwindigkeit v, welche der Druckhöhe $h = 2{,}99$ Fuß entspricht, ist

$$\begin{aligned} v &= 8{,}19 \times \sqrt{h} \\ &= 8{,}19 \times \sqrt{2{,}99} \\ &= 8{,}19 \times 1{,}73 \\ &= 14{,}17 \text{ Fuß.} \end{aligned}$$

Der Querschnitt q der Ausflußöffnung ist $= 0{,}8676 \square'$; die wirkliche Ausflußmenge M ist daher nach 244, bei vollkommner Contraktion des Strahls

$$\begin{aligned} M &= 0{,}60 \times q \times v \\ &= 0{,}60 \times 0{,}8676 \times 14{,}17 \\ &= 7{,}375 \text{ c}' \end{aligned}$$

die gesuchte Wassermenge des Baches per Sekunde.

Dieß Verfahren zur Messung und Berechnung der Wassermenge eines bestehenden Triebwerks läßt eine hinreichende Genauigkeit zu, und diese Genauigkeit wird erhöht, wenn man die Messung öfter, und wenn möglich an verschiedenen Schützen wiederholt und aus den Resultaten das arithmetische Mittel nimmt. Hiebei ist jedoch auf den jeweiligen Wasserstand des Baches und auf die Jahreszeit Rücksicht zu nehmen. Ist nur e i n e Wassermessung möglich, so soll diese zu einer Zeit vorgenommen werden, wo der Bach seinen mittlern Wasserstand hat. Besser ist es aber, wenn auch die Messung zur Zeit des Hochwassers, bei Regen-

güssen ꝛc., wenn der Bach viel Wasser führt, und zur trockenen Jahreszeit, wenn der Bach den kleinsten Wasserstand hat, vorgenommen werden kann. Auch ist auf den Ablauf des Wassers von der oberhalb gelegenen Mühle wohl Bedacht zu nehmen, und deßhalb ein Zeitpunkt zur Messung zu wählen, wo der ungehinderte Abfluß der durchschnittlichen Wassermenge des Baches von der obern Mühle stattfindet.

255. Messung der Wassermenge eines frei fließenden Wassers. — Unter der Wassermenge eines Baches oder Flusses versteht man die in einer Sekunde durchfließende Wassermasse desselben.

Diese ist wie bei einem ausfließenden Gefäß gleich dem Produkt aus dem Querschnitt des fließenden Wassers (Querprofilfläche des Baches) und der mittleren Geschwindigkeit desselben. Die in einer Sekunde durchfließende Wassermenge muß man sich nehmlich als ein Prisma denken, dessen Grundfläche die Querprofilfläche des Baches und dessen Länge die mittlere Geschwindigkeit des Baches oder der Weg ist, um welchen in jeder Sekunde das Wasser des Baches vorrückt. Daher die Regel:

Die Wassermenge eines Baches wird (in c′) gefunden, wenn man die Fläche des Querprofils des Baches (in □′) mit der Geschwindigkeit desselben (in Fußen) multiplizirt.

Hat z. B. ein Bach 10′ Breite 2′ Tiefe, so ist seine Querprofilfläche oder der Querschnitt des Wassers $= 10 \times 2 = 20$ □′; ist nun die Geschwindigkeit des Wassers, oder der Weg, welchen dasselbe in einer Sekunde zurücklegt $= 3$ Fuß, so ist die in einer Sekunde sich vorwärts bewegende Wassermasse des Baches $= 20 \times 3 = 60$ c′.

Zur Ermittlung der Wassermenge eines frei fließenden Gewässers muß also bekannt sein:

a) die Querprofilfläche oder der Querschnitt des Baches (auch Durchflußprofil genannt);

b) die mittlere Geschwindigkeit des Wassers.

Die Berechnung der Wassermenge aus diesen beiden Größen ist, wie man an dem eben berechneten Beispiel gesehen, sehr einfach; schwieriger ist aber die Ermittlung des Querschnitts und der Geschwindigkeit selbst.

256. a) Messung des Querprofils. — Der einfachste Fall ist hier der, wenn das Wasser sich in einem rechtwinkligen, hölzernen Canal bewegt. In diesem Fall hat man nur die Breite und Tiefe des Wassers im Kanal zu messen und zu multipliziren, um den Querschnitt zu erhalten. Ist der Kanal z. B. 3′ breit und 1,5′ tief mit Wasser gefüllt, so ist das gesuchte Durchflußprofil

$$= 3 \times 1,5 = 4,5 \square'.$$

Schwieriger ist die genaue Ermittlung des Durchflußprofils, wenn der Bach ein unregelmäßiges Bett und verschiedene Breite und Tiefe hat.

Ist der Bach nicht sehr breit und tief, auch die Geschwindigkeit nicht sehr groß, so genügt es an einigen Stellen, wo der Bach regelmäßige und parallele Ufer hat, dessen mittlere Breite und mittlere Tiefe zu messen, zu multipliziren und aus den Resultaten das arithmetische Mittel zu nehmen. Ein Bach mißt z. B. an einer Stelle

bei a) 8,5′ mittl. Breite 2,8′ mittl. Tiefe

bei b) 7,8′ mittl. Breite 3,1′ mittl. Tiefe
„ c) 7,9 „ „ 3,0 „ „
„ d) 8,6 „ „ 2,7 „ „

so hat man die einzelnen Querprofilflächen

bei a) = 8,5 × 2,8 = 23,80 □′
„ b) = 7,8 × 3,1 = 24,18 „
„ c) = 7,9 × 3,0 = 23,70 „
„ d) = 8,6 = 2,7 = 23,22 „

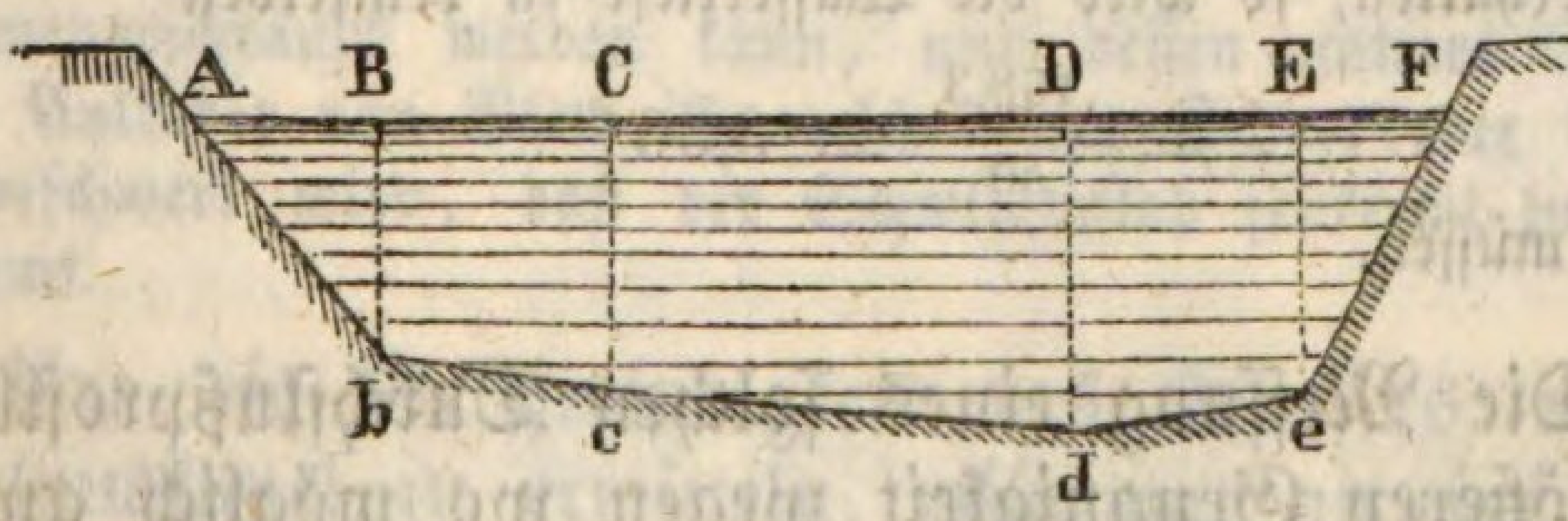
zusammen 94,90 □′

und hieraus das arithmetische Mittel

$$= \frac{94,90}{4} = 23,72 \ □'$$

als das mittlere Durchflußprofil des Baches.

Hat man es mit einem breiten Bach oder einem Fluß zu thun, so muß man die Tiefe an mehreren Stellen messen.



Ist z. B. AbcdeF das Querprofil eines kleinen Flusses, so spannt man ein eingetheiltes Seil quer über den Fluß, und mißt, indem man mit einem Nachen längs des Seiles überfährt, die Abstände AB, BC . . . EF und die dazu gehörigen Wassertiefen Bb, Cc, Dd, Ee ꝛc. Findet man die Abstände AB = 8′; BC = 10′; CD = 20′; DE = 10′; EF = 6′; und die Tiefen Bb = 3,0;

Cc = 3,5; Dd = 4,0; Ee = 5,6; so erhält man die Flächen der einzelnen Dreiecke und Trapeze des Durchflußprofils wie folgt:

$$\text{Fläche ABb} = \frac{3}{2} \times 8 = 12,0 \,\square'$$

$$\text{„ BbcC} = \left(\frac{3,0 + 3,5}{2}\right) \times 10 = 32,5 \text{ „}$$

$$\text{„ CcdD} = \left(\frac{3,5 + 4,0}{2}\right) \times 20 = 75,0 \text{ „}$$

$$\text{„ DdeE} = \left(\frac{4,0 + 3,6}{2}\right) \times 10 = 38,0 \text{ „}$$

$$\text{„ EeF} = \frac{3,6}{2} \times 6 = 10,8 \text{ „}$$

$$\text{zusammen} = 168,3 \,\square'$$

als Gesammtfläche des Durchflußprofils.

Auf diese Art muß man auch verfahren, wenn es sich um die Correktion oder Abgrabung eines Flusses handelt, weil das neu herzustellende Flußbett oder der sog. Durchstich so breit und tief anzulegen ist, daß die Wassermenge des Flusses darin Platz findet. Soll in dem vorliegenden Fall das neue Flußbett 50' Breite erhalten, so wird die Wassertiefe in demselben

$$= \frac{168,3}{50} = 3,36'$$

werden müssen.

Die Messung eines solchen Durchflußprofils soll der größeren Genauigkeit wegen wo möglich an mehreren Stellen vorgenommen werden, wobei aber auch zu gleicher Zeit die Messung der Geschwindigkeiten stattzufinden hat, wie im Folgenden erklärt werden soll. Hiebei ist auch auf den Wasserstand des Flusses Rücksicht zu nehmen, und der Zeitpunkt zur Messung wo möglich dann zu wählen, wenn der Fluß einen sog. stabilen Wasserstand angenommen hat, also nicht im Steigen oder Fallen begriffen ist, und der Wasser-

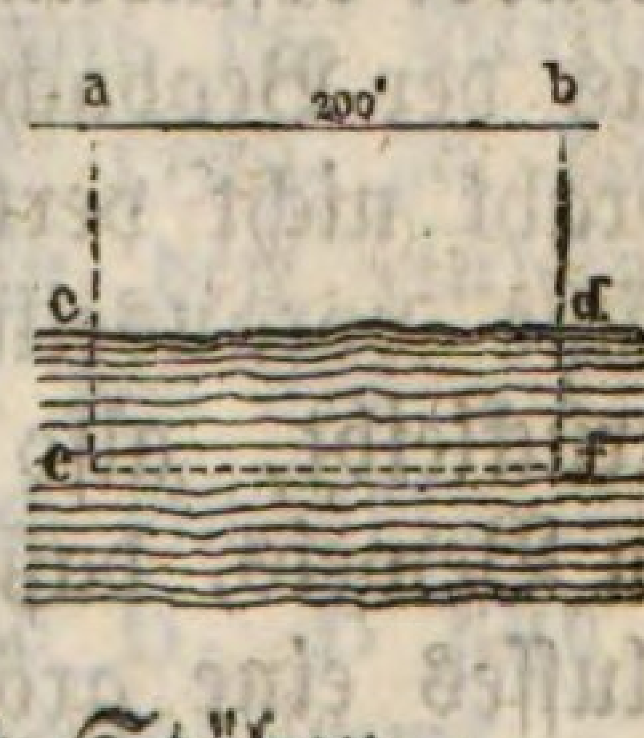
stand ein mittlerer ist. Gut ist es, wenn auch das Durchflußprofil zur Zeit des Hochwassers und des kleinsten Wasserstandes gemessen werden kann.

257. b) Messung der Geschwindigkeit eines frei fließenden Wassers. — Die Geschwindigkeit des Wassers in Flüssen und Bächen wird am einfachsten mit der Schwimmkugel gemessen.

Die Schwimmkugel ist eine hohle Kugel von Blech, 8—12 Zoll im Durchmesser haltend, und mit einer Oeffnung und einem Pfropf versehen, um sie theilweise mit Wasser füllen zu können. An derselben ist noch ein Draht lose befestigt, an dessen anderem Ende ein Stück Kork oder Holz befestigt werden kann. Füllt man die Kugel nur so weit mit Wasser, daß nur ein kleiner Theil der Kugel über Wasser bleibt, so erhält man die Geschwindigkeit an der Oberfläche des Wassers. Füllt man sie ganz mit Wasser und versenkt man sie beliebig tief ins Wasser, indem man an den Draht ein Stück Holz befestigt, welches auf dem Wasser schwimmt und die Stelle der versenkten Kugel sichtbar macht, so erhält man die Geschwindigkeit des Wassers in der Tiefe, wo die Kugel schwimmt.

Zu Geschwindigkeitsmessungen kann man auch einen Schwimmstab von 2—3 Fuß Länge anwenden, welcher aus kurzen Stücken zusammengeschraubt werden kann, und dessen unteres Stück ein hohler Cylinder von Blech ist, welches mit Schrot oder Sand so weit beschwert wird, daß der Schwimmstab senkrecht im Wasser schwimmt.

Um die Geschwindigkeit des Wassers mit der Schwimmkugel zu ermitteln, mißt man an einer Stelle des Flusses, wo die Ufer parallel und die Wassertiefen ziemlich gleich groß sind, längs des Ufers eine Linie ab von 100′—200′ Länge parallel mit dem Stromstrich ab, steckt an den Endpunkten a und b die rechten Winkel bac und abd ab, und bezeichnet die Punkte a, c, b, d mit Stäben.



Nun wird der Schwimmer etwas oberhalb e ins Wasser gelegt. In a und b stehen Beobachter, deren ersterer beim Eintritt des Schwimmers in die Linie a c e auf einer Sekundenuhr die Sekunden zu zählen anfängt, und damit fortfährt, bis der zweite Beobachter in b ein Zeichen gibt, daß der Schwimmer die Linie b d f passirt habe. Diese Beobachtungen werden mehrmals wiederholt.

Die Geschwindigkeit des Flusses wird nun gefunden, wenn man den vom Schwimmer zurückgelegten Weg, d. i. die Länge der Linie a b mit der Anzahl der Sekunden dividirt, welche der Schwimmer gebraucht hat, um von e nach f zu gelangen.

War z. B. die abgesteckte Linie a b 200′ lang, und hat man gefunden, daß der Schwimmer bei 4maliger Beobachtung nach einander 48, 51, 54, 47 oder im Mittel

$$= \frac{48 + 51 + 54 + 47}{4} = 50 \text{ Sekunden}$$

gebraucht hat, um die Linie e f zu durchschwimmen, so ist die Geschwindigkeit des Flusses

$$= \frac{200}{50} = 4 \text{ Fuß.}$$

Wendet man den oben beschriebenen Schwimmstab oder die Schwimmkugel unter Wasser mit dem darüber befindlichen Kork und Draht an, so findet man aus der Beobachtung, daß der Schwimmstab und der Draht nicht vertikal schwimmt, sondern an der Oberfläche voraus eilt und unter der Wasser-Oberfläche zurückleibt, also schräg vorwärts geneigt schwimmt; ein Beweis, daß das Wasser an der Oberfläche eines Flusses eine größere Geschwindigkeit hat, als unterhalb desselben.

Man hat durch Versuche ermittelt, daß die mittlere Geschwindigkeit eines Flusses 80 % der Geschwindigkeit an der Oberfläche beträgt. In Ermanglung direkter Beobachtungen kann man daher die mittlere Geschwindigkeit aus der an der Oberfläche beobachteten berechnen, indem man diese mit 0,8 multiplizirt. Ist die Geschwindigkeit eines Baches an der Oberfläche = 5′, so ist die mittlere Geschwindigkeit desselben = 0,8 × 5 = 4′.

Diese Berechnung der mittleren Geschwindigkeit aus jener an der Oberfläche, welche in der Mitte des Flusses gemessen wurde, ist jedoch nur bei kleinen Flüssen und Bächen hinreichend genau. Hat man z. B. wie in dem in 256 angeführten Beispiel, die mittlere Querprofilfläche eines Baches aus 4 Messungen zu 23,72 □′ ermittelt, und ist die Geschwindigkeit des Baches an der Oberfläche gleichfalls aus 4 Beobachtungen zu 4′ gefunden worden, so ist die mittlere Geschwindigkeit = 0,8 × 4 = 3,2 Fuß, und die gesuchte Wassermenge des Baches

= 23,72 × 3,2 = 75,9 c′.

Handelt es sich dagegen um die Wassermenge eines Flusses, so muß wie bei der Messung des Durchflußprofils in 256, auch die Geschwindigkeit des Wassers an mehreren Stellen des Querprofils gemessen werden.

Man mißt daher gleichzeitig mit der Breiten- und Tiefenmessung längs ABCDEF (Fig. zu 256) die Geschwindigkeiten des Wassers in den einzelnen Theilen des Querprofils, indem man den Schwimmer so in das Wasser bringt, daß er nach einander möglichst in der Mitte zwischen A und B, B und C, C und D, D und E, E und F durchschwimmt.

Findet man z. B., daß die **mittlere** Geschwindigkeit zwischen

A	und	B	=	2,5 Fuß
B	„	C	=	2,8 „
C	„	D	=	3,1 „
D	„	E	=	3,5 „
E	„	F	=	2,8 „

ist, so ergibt sich die Wassermenge des Flusses nach den in 256 angenommenen Breiten- und Tiefenmessungen durch die Summe der Produkte der einzelnen Flächen des Durchflußprofils und der dazu gehörigen mittleren Geschwindigkeiten.

Man hat z. B. für das Dreieck ABb Fläche = 12,0′; mittlere Geschwindigkeit = 2,5′; und erhält hieraus die in dem Dreieck ABb sich bewegende Wassermenge = 12 × 2,5 = 30 c′. Für das ganze Durchflußprofil ergibt sich daher folgende Zusammenstellung:

		Fläche □′		Geschwindigkeit in Fuß		Wassermenge c′
bei ABb	=	12,0	×	2,5	=	30,0
„ BbcC	=	32,5	×	2,8	=	91,0
„ CcdD	=	75,0	×	3,1	=	232,5
„ DdeE	=	38,0	×	3,5	=	133,0
„ EeF	=	10,8	×	2,8	=	30,2
zusammen		168,3				516,7 c′

Die Wassermenge des Flusses ist daher = 516,7 c′. Die Gesammtfläche des Querprofils ist

= 168,3 □′; hieraus ergibt sich eine mittlere Geschwindigkeit für das ganze Durchflußprofil von

$$\frac{516{,}7}{168{,}3} = 3{,}03 \text{ Fuß.}$$

258. Messung der Wassermenge eines Baches mit Hilfe eines Ueberfallwehres. — Hat man die Wassermenge eines nicht sehr breiten und tiefen frei fließenden Baches zu bestimmen, so kann dieß (und zwar mit größerer Genauigkeit als durch Messung des Querschnitts und der Geschwindigkeit) mit Hilfe eines künstlichen Ueberfallwehres geschehen. Man schließt zu diesem Zweck (vergl. Fig. zu 243) den Bach mit einer wasserdichten Dielenwand BC senkrecht ab, und schneidet an derselben einen rechtwinkligen Einschnitt aus, welchen man so lange vertieft und erweitert, bis der gestaute Wasserspiegel AB oberhalb der Wand nicht mehr steigt und fällt, also der Abfluß durch den Einschnitt genau dem natürlichen Zufluß des Wassers gleich ist. Die Wassermenge, welche durch diesen Wandeinschnitt oder Ueberfall überfließt, wird nach 244 berechnet.

Zu diesem Zweck mißt man genau 1) die Breite des Einschnitts; 2) die Tiefe AE des untern Randes desselben vom gestauten Wasserspiegel AB, oder die Druckhöhe. Hat man z. B. die Breite des Einschnitts = 8,5′ und die Druckhöhe AE = h = 0,81′ gefunden, so ergibt sich die mittlere Ausflußgeschwindigkeit v des überfallenden Wassers nach 243

$$\begin{aligned} v &= \tfrac{2}{3} \times 8{,}19 \times \sqrt{h} \\ &= \tfrac{2}{3} \times 8{,}19 \times \sqrt{0{,}81} \\ &= \tfrac{2}{3} \times 8{,}19 \times 0{,}9 \\ &= 4{,}914'. \end{aligned}$$

Die Ausflußöffnung oder der Querschnitt q des überfallenden Strahls mißt bei 8,5′ Länge 0,81 Höhe

$$q = 8{,}5 \times 0{,}81 = 6{,}885 \,\square'$$

Die überfallende Wassermenge M oder die gesuchte Wassermenge des Baches ist daher mit Rücksicht auf die unvollkommene Contraktion des Strahls

$$\begin{aligned} M &= 0{,}64 \times q \times v \\ &= 0{,}64 \times 6{,}885 \times 4{,}914 \\ &= 0{,}64 \times 33{,}83 \\ &= 21{,}65 \text{ c}'. \end{aligned}$$

(Vergleiche Nro. 244, Beispiel 5.)

259. Messung des Gefälles. — Bei Triebwerken mit gespannter Wasserkraft ist nach 251 zur Berechnung der Größe der Wasserkraft außer der Wassermenge noch das Gefäll zwischen Ober- und Unterwasser zu wissen nöthig.

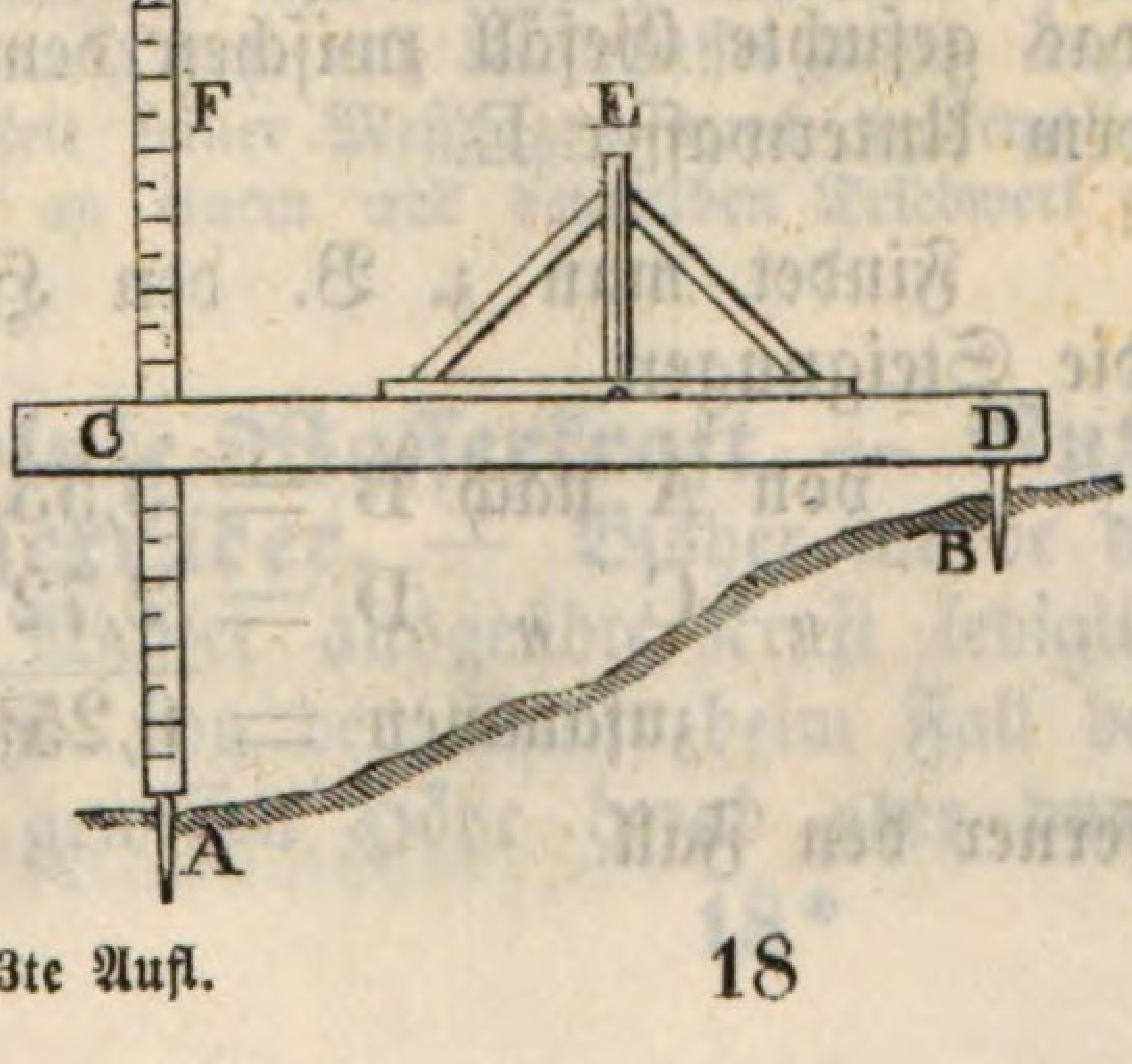
Das Gefäll wird durch Abwägen mit einer genauen Setzwage oder Kanalwage gefunden. (Vergl. das Kapitel über das Vermessen und Nivelliren.) Zu diesem Zweck wird der Stand des Oberwassers und des Unterwassers, so wie er sich durchschnittlich bei mittlerem Wasserstand und beim Gang des Werkes ergibt, durch Pflöcke bezeichnet, welche bis zum Wasserspiegel gleichzeitig eingeschlagen und hierauf gegenseitig abgewogen (abnivellirt) werden.

In den meisten Fällen wird es unthunlich sein, die Höhendifferenz zwischen Ober- und Unterwasser mit einer einzigen Aufstellung der Setz- oder Kanalwage zu finden; es ist daher zu zeigen, wie in allen Fällen der Höhenunterschied zwischen Ober- und

Unterwasser durch Nivelliren auf Umwegen, um das Mühlgebäude herum ꝛc. gefunden wird.

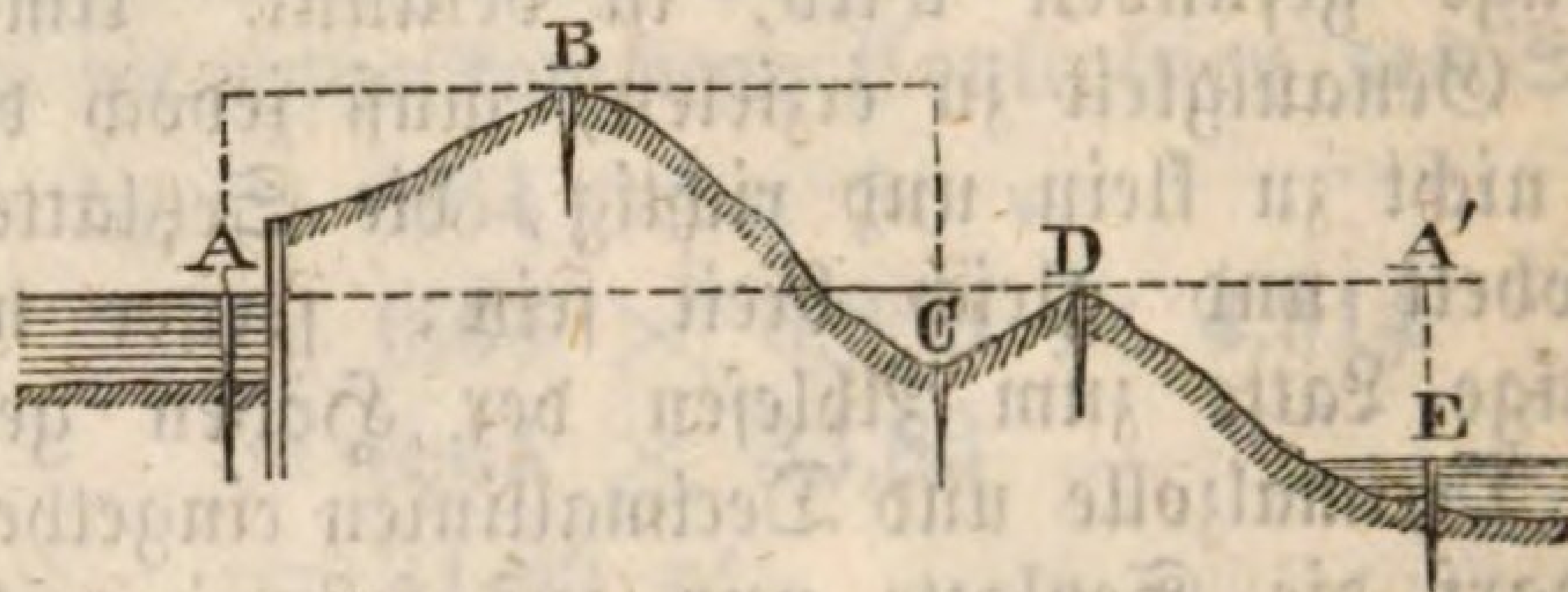
Wie der Höhenunterschied zwischen 2 nicht weit von einander entfernten Punkten A und B mit der Setzwage gefunden wird, ist bekannt. Um die gehörige Genauigkeit zu erzielen, muß jedoch die Setzwage nicht zu klein und richtig, die Setzlatte sauber abgehobelt und gleich breit sein; ferner muß die 10füßige Latte zum Ablesen der Höhen genau in Fuße, Decimalzolle und Decimallinien eingetheilt sein, und darf die Setzlatte nur auf fest eingeschlagene, oben horizontal abgeschnittene Pflöcke aufgesetzt werden. Das Blei an der Setzwage soll schwer, der Faden eine feine Seidenschnur sein. Um die Setzwage, welche mindestens 3′ lang und $2\frac{1}{2}$′ hoch sein soll, bezüglich ihrer Richtigkeit zu prüfen, setzt man sie auf die Setzlatte auf, stellt diese horizontal und dreht nun, ohne die Setzlatte zu verrücken, die Setzwage um, so daß rechts nach links und links nach rechts kommt. Ist sie richtig, so muß das Bleiloth wieder wie zuvor einspielen.

Um nun den Höhenunterschied CA zweier Punkte A und B zu finden, setzt man die Setzlatte CD mit der Setzwage E auf dem höher gelegenen Pflock B auf, richtet sie horizontal, und liest an der auf den Pflock A genau senkrecht aufgestellten Maßlatte



AF die Höhe AC ab, welche die gesuchte Höhendifferenz der beiden Punkte A und B ist. Hat man z. B. AC = 3,51 Fuß gefunden, so notirt man:

„Von A nach B Steigung = 3,51′.“



Ist nun A der Spiegel des Oberwassers, E jener des Unterwassers, so wägt man von A nach E staffelförmig auf einem beliebigen Weg ABCDE über die dazwischen liegenden Unebenheiten weg, indem man dieselben je nach Bedürfniß durch eingeschlagene Pflöcke B, C, D 2c. markirt, die Höhenunterschiede je zweier dieser Pflöcke durch gegenseitiges Abwägen ermittelt und die gefundenen Höhenunterschiede zwischen A und B, B und C, C und D ... D und E mit dem Bemerken, ob Steigung oder Fall, notirt. Die Summe aller Steigungen von der Summe aller Gefälle abgezogen, gibt dann das gesuchte Gefäll zwischen dem Oberwasser A und dem Unterwasser E.

Findet man z. B. den Höhenunterschied oder die Steigungen

von A nach B = 3,53′
„ C „ D = 2,72
zusammen = 6,25′

ferner den Fall

von B nach C = 7,34′
„ D „ E = 5,87
zusammen = 13,18

so ist das gesuchte Gefäll zwischen dem Oberwasser A und dem Unterwasser E

= 13,18 — 6,25 = 6,93′.

Dieses Resultat muß allemal herauskommen, gleichviel welchen Weg man zum Abwägen von A nach E gewählt hat, welche Unebenheiten zwischen A und E liegen und wie viele Zwischenpunkte geschlagen und abgewogen worden sind. Die Summe aller einzelnen Steigungen von der Summe aller einzelnen Gefälle abgezogen, muß immer 6,93 Fuß Gesammtgefäll geben. Wägt man, wie in dem angenommenen Beispiel geschehen, von A nach E, so wird die Summe der Gefälle = 13,18, jene der Steigungen = 6,25; wägt man von E nach A, so wird die Summe der Steigungen = 13,18 und die Summe der Gefälle = 6,25. Die Differenz bleibt im ersten Fall = 6,93′ Fall, im zweiten (da man vom Unterwasser zum Oberwasser steigt) = 6,93′ Steigung.

Zur Versicherung nimmt man die Abwägung des Höhenunterschieds zwischen Ober- und Unterwasser mehrmals und auf verschiedenen Wegen vor, und zieht aus den gefundenen Resultaten das arithmetische Mittel. Wird das Nivellement zwischen Ober- und Unterwasser mit der Kanalwage vorgenommen, so ist das Verfahren ganz dasselbe; (vergl. 320).

Dem angehenden Mühlarzt wird besonders empfohlen, solche Abwägungen zwischen dem Ober- und Unterwasser fleißig einzuüben, und die Genauigkeit seiner Messungen durch mehrmalige Ermittlung des Gefälles an einem und demselben Triebwerk zu prüfen.

260. Absolute Wasserkraft. — Nutzeffekt der Wasserräder. — Bisher wurde die von dem bewegten Wasser ausgeübte Kraft lediglich so betrachtet, wie sie von der Natur beim Fall des Wassers von einer gewissen Höhe herab oder durch

die Geschwindigkeit eines frei fließenden Wassers dargeboten wird ohne Rücksicht auf die Construktion des Rades, welches in Bewegung gesetzt werden soll.

Man nennt daher auch die oben berechnete Wasserkraft die rohe oder absolute Wasserkraft, zum Unterschied von demjenigen Theil dieser Kraft, welchen das Rad auf das eigentliche Mahl- oder Sägwerk 2c. nutzbringend überträgt, und welcher daher der Nutzeffekt des Rades genannt wird.

Selbst bei der vollkommensten Construktion der Wasserräder (deren Bauart im Allgemeinen hier als bekannt vorausgesetzt wird), finden bei der Einwirkung des Wassers auf das Rad Kraftverluste statt. Diese sind:

1) Der Verlust an Wasser in Folge des Spielraums des Rades im Gerinne (beim unter- und mittelschlächtigen Rad), indem ein Theil des Wassers zwischen den Schaufeln und unter dem Rad entweicht, ohne auf das Rad zu wirken; (diesen Verlust berechnet Redtenbacher zu 18—27 % der absoluten Kraft);

2) der Verlust durch den stoßweisen Eintritt und Austritt des Wassers bei Schaufeln, welche in der Richtung des Radius stehen (radiale Schaufeln);

3) der Verlust durch die Schaufeltheilung, durch die unvollkommene Füllung mit Wasser, durch die Form der Schaufeln, durch das Entweichen des Wassers bei Rädern mit einem Radmantel (ohngefähr 3 % der absol. Kraft), und bei oberschlächtigen Rädern insbesondere durch das Herausfallen des Wassers aus den

Zellen (letzteres verursacht, wenn die Zellen zu $\frac{1}{4}$ gefüllt sind, 10 %, und wenn sie $\frac{2}{3}$ gefüllt sind, 20 % Verlust der absol. Kraft);

4) der Verlust durch den Widerstand der Luft bei der Bewegung des Rades (höchstens 1—2 % Kraftverlust);

5) der Verlust durch den Widerstand der Wassertheilchen unter sich; endlich

6) der Verlust durch den Widerstand der Zapfenreibung, welche vom Gewicht des Rades abhängt.

Wenn die Verhältnisse eines Wasserrades richtig gewählt sind, so kann man nach Redtenbacher annehmen, daß die Größe des Nutzeffekts

1) beim unterschlächtigen Rad = .	30—35 %
2) beim Kropfrad	40—50 „
3) beim Ponçelet-Rad (unterschl. Rad mit gekrümmten Schaufeln)	60—65 „
4) beim oberschl. Rad für kleine Gefälle von 10—17 Fuß . .	50—60 „
5) beim rückschlächtigen Zellenrad .	60—70 „
6) beim oberschlächtigen Rad für große Gefälle über 17′ . . .	60—75

Prozent der absoluten Wasserkraft beträgt.

Man sieht hieraus, daß selbst bei guter Construktion das unterschlächtige Rad nur $\frac{1}{3}$ der absoluten Wasserkraft auf das innere Werk, die Mühle oder Säge 2c. überträgt, daß dagegen das oberschlächtige Rad gerade das Doppelte leistet, und $\frac{2}{3}$ — $\frac{3}{4}$ der absoluten Wasserkraft nutzbar macht.

1. Beispiel. In Nr. 252 wurde die absolute Wasserkraft von 20 c' Wasser, welche über ein 4' hohes Wehr fallen, zu 7,7 Pferdekräfte berechnet. Bei dem Gefäll von 4' wird hier am besten ein Kropfrad anzulegen sein. Dieses wird alsdann einen Nutzeffekt von 40—50 Prozent, sohin

0,4 × 7,7 bis 0,5 × 7,7

oder 3,08 bis 3,85 Pferdekräfte haben.

2. Beispiel. Das oberschlächtige Rad in Beispiel 2 zu 252 wird bei 12' Gefäll, 5 c' Wasser und 5,8 Pferdekräften absoluter Kraft höchstens 60 $\frac{0}{0}$ oder

0,6 × 5,8 = 3,48 Pferdekräfte

Nutzeffekt gewähren.

3. Beispiel. Nach Beispiel 3 zu 252 hat ein Bach mit 280 c' Wassermenge und 2,5' Stauung 67,69 Pferdekräfte absolute Wasserkraft. Da bei diesem kleinen Gefäll unterschlächtige Räder zur Anwendung kommen, so lassen sich hievon nur 30 $\frac{0}{0}$ oder 0,3 × 67,69 = 20,3 Pferdekräfte nutzbringend anwenden.

Wird dagegen ein unterschlächtiges Rad mit krummen Schaufeln (Ponçeletrad) angewendet, so wird dieses 60 $\frac{0}{0}$ oder

0,6 × 67,69 = 40,6 Pferdekräfte

also das Doppelte leisten.

4. Beispiel. Ein kleiner Gebirgsbach mit einer Wassermenge von $\frac{1}{2}$ Eimer und 24' Gefäll (Beispiel 4 zu 252) gibt eine absolute Kraft von 3 Pferdekräften; da bei diesem großen Gefäll ein oberschlächtiges Rad zur Anwendung kommt, so werden hievon höchstens $\frac{3}{4}$ oder $2\frac{1}{4}$ Pferdekraft Nutzeffekt erzielt.

Wenn nun bei neuen gut construirten Rädern der Nutzeffekt nur $\frac{1}{3}$—$\frac{3}{4}$ der absoluten Wasserkraft beträgt, so kann man hieraus beurtheilen, wie viel Kraft bei alten, schlecht construirten Rädern verloren geht, und wie bedeutend durch ein zweckmäßig construirtes neues Rad und Werk die Rente eines Wasserwerks erhöht werden kann.

261. Erfahrungsresultate über den Betrieb von Mahl- und Sägmühlen. — Wenn eine Mahl- oder Sägmühle ganz neu angelegt, oder ein bestehendes altes Triebwerk umgebaut

und dabei an Wasserkraft bedeutend gewonnen wird, so entsteht die höchstwichtige Frage, welche Ausdehnung muß dem Werk gegeben werden, damit dasselbe den größtmöglichen Nutzen gewährt? Offenbar kann durch Vernachlässigung dieser Frage unter Umständen grob gefehlt werden. Ist die vorhandene Wasserkraft nicht genau bekannt, und wird das Triebwerk (Rad mit Wasserbau) und das innere Werk (Mühlwerk oder Schneidsäge ꝛc.) nur nach approximativer Schätzung angelegt, so kann der Fall eintreten, daß die ganze Anlage für einen zu großen oder für einen zu kleinen Betrieb hergestellt wird. Im ersten Fall reicht alsdann die Wasserkraft zum Betrieb nicht immer aus, das Baukapital ist theilweise unwiederbringlich verloren, die Rente schlecht, und Abhilfe gar nicht oder nur in den seltensten Fällen möglich. Der zweite Fall, wenn das Werk für einen zu kleinen Betrieb angelegt wird, und die vorhandene Wasserkraft nicht vollständig ausgenützt werden kann, ist noch der günstigere, da wenigstens mit Geldmitteln geholfen werden kann. In beiden Fällen ist aber ein späteres nochmaliges Umbauen oder Nachhelfen offenbar unverhältnißmäßig kostspielig. Man sieht hieraus, wie nothwendig es ist, die vorhandene Wasserkraft bei kleinstem, mittlerem und höchstem Wasserstand genau zu kennen. Aber die Kenntniß der vorhandenen Wasserkraft allein genügt noch nicht; man muß auch wissen, welche Leistung dieselbe besitzt, d. i. wie viel Mahlgänge, Säggänge ꝛc. mit Sicherheit betrieben werden können.

Hiezu sind Erfahrungsresultate über den Betrieb gut eingerichteter Werke unbedingt nothwendig. Man muß zu diesem Zweck an ähnlichen neueren

Mühl- und Sägwerken, welche sich bewährt haben, die Wasserkraft messen, und diese mit dem vergleichen, was diese Werke in Bezug auf Qualität und Quantität des Fabrikates leisten.

1) Mahlmühlen. Stellt man die genannten Beobachtungen an neueren verbesserten Mahlmühlen an, so findet man, daß die zum Betrieb eines Mahlganges nöthige Wasserkraft von dem Durchmesser des Steines abhängt, und daß sie um so größer sein muß, je größer der Durchmesser des Steines ist. Das Verhältniß, in welchem die nöthige Betriebskraft eines Mahlgangs zum Durchmesser des Steines steht, so wie die nöthige Umfangsgeschwindigkeit des Steines wird verschieden angenommen.

Redtenbacher nimmt an, daß die Betriebskraft dem Durchmesser des Steines direkt proportional sei, daß also der doppelte Durchmesser des Steins die doppelte Betriebskraft verlange. Weißbach dagegen nimmt die Betriebskraft dem Quadrat des Steindurchmessers proportional an, wonach also der doppelte Durchmesser des Steins die 4fache Betriebskraft beanspruche.

In der folgenden Tabelle sind die Betriebsresultate der neueren verbesserten Mühlen nach beiden Annahmen für 3 bis 5füßige Steine und für bayer. Maß und Gewicht berechnet, zusammengestellt.

Durchmesser der Steine	1 Mahlgang erfordert Pferdekräfte Nutzeffekt.	Zahl der Umdrehungen des Steines per Minute.	Von dieser Kraft vermahlenes Getreide per Stunde in bayer. Metzen à 47,7 Pfd.	
3 bayer. Fuß	2,34	205	2,7	R
	2,21	162	2,9	W
3½ bayer. Fuß	2,74	176	3,1	R
	3,00	149	4,0	W
4 bayer. Fuß	3,11	154	3,5	R
	3,92	121	5,2	W
4½ bayer. Fuß	3,50	137	4,0	R
	4,96	108	6,6	W
5 bayer. Fuß	3,89	123	4,4	R
	6,13	97	8,2	W

Hiebei ist den mit R bezeichneten Zeilen die Annahme, daß die Kraft direkt wie der Durchmesser des Steines wachsen müsse, den mit W bezeichneten Ziffern dagegen die Annahme, daß die Kraft wie das Quadrat des Steindurchmessers zunehmen müsse, zu Grunde gelegt, weßhalb auch die nöthige

Betriebskraft (2te Columne) sich bei großen Steinen nach der zweiten Annahme (W) bedeutend größer herausstellt, als bei der ersten (R).

Bei R ist die Umfangsgeschwindigkeit des Steines zu $32\frac{1}{4}$ Fuß; bei W nur zu $25\frac{1}{2}$ Fuß angenommen. Dividirt man das Mahlquantum der 4ten Columne mit der entsprechenden Betriebskraft aus der 2ten Columne, so erhält man das von einer Pferdekraft Nutzeffekt in einer Stunde vermahlene Getreide bei R = 1,14 Metzen bayer.; bei W = 1,33 Metzen, also etwas größer.

Diese Tabelle zeigt z. B., daß zum Betrieb eines Mahlgangs einer neuen verbesserten Mühle mit 4′ großen Steinen 3,1 bis 3,9 Pferdekräfte Nutzeffekt nöthig sind, daß der Stein alsdann 150 bis 120 Umgänge in der Minute macht, und $3\frac{1}{2}$ bis 5 Metzen per Stunde vermahlt.

Die gewöhnlichen älteren Mühlen haben Steine von $3\frac{1}{2}$ — $3\frac{3}{4}$ Fuß Durchmesser. Diese verlangen hienach für einen Mahlgang 3 Pferdekräfte Nutzeffekt; dabei soll der Stein 170—150 Umgänge in der Minute machen, und in einer Stunde 3—4 Metzen Getreide vermahlen.

Weitere Anhaltspunkte für die Anlage neuer Werke geben folgende Beobachtungen:

In der englischen Mühle zu Longeau bei Metz mahlt ein Gang mit 4,25 Pferdekräften auf Steinen, welche 5,2 Fuß Durchmesser haben, und in der Minute 80 — 100 Umgänge machen, in der Stunde 200 Pfd. Getreide. Die Mühle hat 2 Gänge, 1 Bürst- und Beutelwerk und erfordert $8\frac{1}{2}$ Pferdekräfte. (Trifft auf 1 Pferdekraft per Stunde 1 Metzen oder 47,7 Pfd. Getreide.)

Nach Redtenbacher haben die neueren verbesserten Mühlen Steine von 5,1 Fuß Durchmesser, welche per Minute 120

Umdrehungen machen. Ein solcher Mahlgang erfordert mit Reinigungsmaschinen rc. eine Betriebskraft von 4 Pferdekräften und vermahlt per Stunde 168 Liter Getreide, also per Pferdekraft und Stunde 42 Liter (1,14 bayer. Metzen).

Amerikanische Mühlen vermahlen bei 4' großen Steinen mit 25' Umdrehungsgeschwindigkeit desselben (120 Umgänge per Minute) mit 4 Pferdekräften für einen Mahlgang mit jeder Pferdekraft per Stunde 45—76 Pfd. Weizen (0,94 — 1,0 Metzen bayer).

Eine Dampfwalzenmühle von 24 Pferdekräften soll wöchentlich, Tag und Nacht arbeitend, 171000 Pfd. Weizen vermahlen. (Gibt 0,9 Metzen per Pferdekraft und Stunde.)

Was die Leistungen der bisher im Gebrauch befindlichen alten Mühlen betrifft, so hat der Verfasser bei dem gänzlichen Mangel von Angaben hierüber (selbst in den besten und ausführlichsten Werken über Mühlenbaukunde) spezielle Beobachtungen angestellt, und gefunden, daß die älteren kleinen oberschlächtigen Mühlen mit 2 Gängen zum Betrieb eines Mahlgangs 4 bis 5 Pferdekräfte (Wasserkraft) bedürfen, und daß mit $3\frac{1}{3}$ Fuß großen Steinen, welche bei dem sog. Semmelgang durchschnittlich 200, bei dem sog. Griesgang 150 Umgänge in der Minute machen, per Stunde mit 1 Pferdekraft $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{3}$ bayer. Metzen Getreide ganz ausgemahlen wird. Aeltere unterschlächtige Mühlen dagegen bedürfen 7—9 (absolute) Pferdekräfte für einen Mahlgang und verarbeiten bei demselben Durchmesser des Steines per Stunde nur $\frac{1}{7}$ — $\frac{1}{10}$ Metzen. Hieraus geht hervor, daß auch bei den älteren Werken die oberschlächtigen Mühlen ohngefähr das Doppelte von dem der unterschlächtigen leisten.

Aus diesen Angaben über die Leistungen alter und neuer Mühlen kann der Mühlarzt und Mühlenbesitzer entnehmen, welche bedeutende Vortheile durch Anwendung der neuesten Construktionen an Wasserrädern und Mühlwerken sich erreichen lassen.

2) Sägmühlen. — Brettsägen neuerer Construktion bedürfen nach Redtenbacher eine Betriebskraft von 4 Pferdekräften Nutzeffekt. Hiebei macht das 800 Pfund schwere Sägegatter in der Minute 80—200 Schnitte, und schneidet per Stunde

(wenn 100 Schnitte angenommen werden) 152 □′ weiches und 106 □′ hartes Holz (bayer. Maß).

Die gewöhnlichen deutschen Sägmühlen machen per Minute 80 bis 90 Schnitte von $1\frac{3}{4}$′ Länge, greifen per Schnitt 0,8 bis 1 Linie vor und liefern stündlich 30′ Brettlänge. Mit einer Pferdekraft werden netto stündlich 44 □′ trockenes Eichenholz geschnitten; brutto aber hat man nur 22 □′ Eichenholz oder 30 □′ Tannenholz oder 1 □′ Marmor zu rechnen.

Die Sägemühle zu Metz mit einem 819 Pfund schweren Gatter lieferte an einem trockenen Eichenklotz von $8\frac{1}{2}$ Zoll Stärke bei $3\frac{1}{3}$ Pferdekräften in 88 Schnitten per Minute mittelst 1 Sägeblatt 29,8 □′ Schnittfläche; dagegen bei 3,7 Pferdekräften in 79 Schritten per Minute mittelst 4 Sägeblätter 4 × 24,5 = 98 □′ Schnittfläche; ferner an einem ganz trockenen 12 Zoll dicken Eichenklotz, bei 4,5 Pferdekräften in 90 Schnitten per Minute mittelst 4 Sägeblättern 4 × 20,1 = 80,4 □′ Schnittfläche; und endlich an einem 23 Zoll dicken Buchenklotz bei 3 Pferdekräften in 88 Schnitten per Minute mit 1 Sägeblatt 54,5 □′ Schnittfläche. Die Schnittbreite betrug durchgängig 1,84 Linien.

Die Anwendung mehrerer Sägeblätter in einem Gatter ist daher von großem Vortheile.

Die Kurbelhöhe muß mindestens der halben Klotzdicke gleich sein, beträgt aber gewöhnlich 1 — $1\frac{1}{2}$ Fuß. —

262. Bestimmung der Zahl der Mahl- und Säggänge bei gegebener Wasserkraft. — Mit den angegebenen Betriebsresultaten über Mahl- und Sägmühlen ist es nun ein Leichtes, anzugeben, wie viel Mahl- oder Säggänge bei einer gegebenen Wasserkraft angelegt werden können, zu welchem Zweck die in 252 berechneten Wasserkräfte als Beispiele dienen sollen.

1. Beispiel. Ueber ein 4′ hohes Wasser fallen in jeder Sekunde 20 c′ Wasser, wie viel Mahl- oder Säggänge lassen sich bei dieser Wasserkraft anbringen?

Antwort: Die absolute Wasserkraft ist

$$M = 0{,}0967 \times 20 \times 4 = 7{,}7 \text{ Pferdekräfte.}$$

Wird bei diesem Gefäll ein Kropfrad angelegt, so wird der Nutzeffekt desselben nach 260 im Mittel 45 % oder

$$0{,}45 \times 7{,}7 = 3{,}5 \text{ Pferdekräfte}$$

sein. Nach der in 261 gegebenen Tabelle wird man daher mit dieser Wasserkraft, wenn $4\frac{1}{2}$füßige Steine genommen werden, einen Mahlgang betreiben können, welcher in einer Stunde 4 Metzen Getreide vermahlt.

2. Beispiel. Wie viel Mahlgänge wird man mit einem oberschlächtigen Triebwerk von 12′ Gefäll und 5 c′ Wassermenge per Sek. (2. Beisp. in 252) betreiben können?

Antwort: Die absolute Wasserkraft ist

$$M = 0{,}0967 \times 12 \times 5 = 5{,}8 \text{ Pferdekräfte.}$$

Das oberschlächtige Wasserrad überträgt (nach 260) einen Nutzeffekt von mindestens 50%; daher ist die Leistung des Rades oder der Nutzeffekt

$$= 0{,}5 \times 5{,}8 = 2{,}9 \text{ Pferdekräfte,}$$

womit nach der Tabelle in 261 ein Mahlgang mit $3\frac{1}{2}$füßigen Steinen betrieben werden kann, welcher per Stunde $3\frac{1}{10}$ Metzen Getreide vermahlt.

3. Beispiel. Eine Wasserkraft hat 280 c′ Wasser per Sek. und 2,5′ Gefäll (Beisp. 3. in 252). Es soll dieselbe zum Betrieb einer Säge und der

Rest der verfügbaren Wasserkraft zu einer Mahlmühle verwendet werden, wie viele Mahlgänge wird diese erhalten können?

Antwort: Die absolute Wasserkraft ist

$$M = 0{,}0967 \times 280 \times 2{,}5 = 67{,}69 \text{ Pferdekräfte.}$$

Da bei einem Gefäll von 2,5 Fuß unterschlächtige Räder zur Anwendung kommen, welche 35% Nutzeffekt haben, so werden von obigen 67,69 Pferdekräften

$$0{,}35 \times 67{,}69 = 23{,}69$$

oder 23,7 Pferdekräfte Nutzeffekt verfügbar. Hievon sind für den Säggang 4 Pferdekräfte nothwendig. Mit den übrigen 19,7 Pferdekräften können (nach der Tabelle in 261) wenn Steine von 5 Fuß Durchmesser angewendet werden, welche per Mahlgang 4 Pferdekräfte verlangen,

$$\frac{19{,}7}{4} = 4{,}9$$

oder mindestens 4 Mahlgänge eingerichtet werden, von welchen jeder per Stunde 4,4 Metzen Getreide vermahlt.

4. Beispiel. Welche Größe der Anlage wird man einer neu zu erbauenden oberschlächtigen Mühle zu geben haben, deren Bach per Sek. $\frac{1}{2}$ Eimer = 1,29 c′ Wasser führt, und 24′ Gefäll hat?

Antwort: die rohe Wasserkraft ist

$$M = 0{,}0967 \times 1{,}29 \times 24 = 2{,}99$$

oder 3 Pferdekräfte.

Mit einem gut construirten oberschlächtigen Rad lassen sich hievon 75% oder $\frac{3}{4}$ nutzbar machen. Man wird sohin

$$0,75 \times 3 = 2,25$$

oder $2\frac{1}{4}$ Pferdekräfte Nutzeffekt erhalten, mit welcher Betriebskraft nach 261 ein Mahlgang mit 3füßigen Steinen betrieben werden kann, welcher per Stunde 2,9 Metzen Getreide vermahlt.

5. Beispiel. Eine Schiffmühle hat 2 Wasserräder mit 8′ langen 1,5′ tief ins Wasser tauchenden Schaufeln, wie viel Mahlgänge werden diese Räder treiben, wenn das Wasser des Flusses 6′ Geschwindigkeit hat?

Antwort: Die der Geschwindigkeit v = 6′ entsprechende Geschwindigkeitshöhe h ist nach 226

$$\begin{aligned} h &= 0,0148 \times v^2 \\ &= 0,0148 \times 6^2 \\ &= 0,6328 \text{ Fuß;} \end{aligned}$$

und da in einer Sekunde $8 \times 1,5 \times 6 = 72$ c′ Wasser auf ein Rad wirken, so ist die rohe Wasserkraft für beide Räder

$$\begin{aligned} M &= 2 \times 0,0967 \times 72 \times 0,6328 \\ &= 8,82 \text{ Pferdekräfte.} \end{aligned}$$

Durch die unterschlächtigen Räder werden hier nur 30% Nutzeffekt oder

$$0,3 \times 8,82 = 2,6 \text{ Pferdekräfte}$$

erzielt. Mit dieser Betriebskraft kann nach der Tabelle in 261 ein Mahlgang mit $3\frac{1}{4}$füßigen Steinen angelegt werden, welcher per Stunde ohngefähr 3 Metzen Getreide vermahlt.

263. Geringste Wasserkraft zum Betrieb eines Mahl- oder eines Sägganges. — Die kleinstmöglichste Wasserkraft, welche zum Be-

trieb eines Ganges einer Mahl- oder Sägmühle eben noch hinreicht, ist nach dem Bisherigen leicht zu ermitteln und soll nun für das unterschlächtige, oberschlächtige, Kropfrad und Ponçeletrad bestimmt werden.

Nimmt man 3 Fuß als den kleinsten Durchmesser des Steines an, so ist zum Betrieb eines solchen Mahlganges (nach der Tabelle in 261) ein Nutzeffekt von 2,34 Pferdekräften nöthig.

a) Unterschlächtiges Rad. Um diese Betriebskraft mit einem gewöhnlichen unterschlächtigen Rad welches nur 30% Nutzeffekt überträgt, zu erhalten, muß die rohe Wasserkraft

$$= \frac{2,34}{0,3} = 7,8 \text{ Pferdekräfte}$$

betragen.

Nach 252 Beisp. 6 ergiebt sich hieraus, wenn das Gefäll beispielsweise zu 6 Fuß angenommen wird, die nöthige Zuflußmenge des Baches per Sekunde,

$$= \frac{7,8 \times 10,4}{6} = 13,52 \text{ c}'.$$

b) Für das Kropfrad, welches wenigstens 40% Nutzeffekt abwirft, ergibt sich die rohe Wasserkraft, welche zu einem Nutzeffekt von 2,34 Pferdekräften nöthig ist,

$$= \frac{2,34}{0,4} = 5,85 \text{ Pferdekräfte.}$$

Ist nun beispielsweise das Gefäll 6 Fuß, so ist nach 252 per Sek. eine Wassermenge

$$= \frac{5,85 \times 10,4}{6} = 10,14 \text{ c}'.$$

nöthig. —

c) Für das oberschlächtige Rad, welches bis zu 18′ Gefällhöhe mindestens 50% oder die

Hälfte Nutzeffekt abwirft, ist die zu 1 Mahlgang nöthige rohe Wasserkraft

$$= \frac{2{,}43}{0{,}5} = 4{,}68 \text{ Pferdekräfte.}$$

Ist nun das Gefäll beispielsweise 12 Fuß, so ist die nöthige Wassermenge per Sek. nach 252

$$= \frac{4{,}68 \times 10{,}4}{12} = 4{,}06 \text{ c}'.$$

d) Für das Ponçeletrad und das oberschlächtige Rad bei mehr als 18′ Gefäll, welche beiden Räder mindestens 60% Nutzeffekt leisten, ist die zu 1 Mahlgang nöthige rohe Wasserkraft

$$= \frac{2{,}34}{0{,}6} = 3{,}9 \text{ Pferdekräfte.}$$

Ist das Gefäll beim Ponçeletrad = 6 Fuß, so ergibt sich die nöthige Wassermenge

$$= \frac{3{,}9 \times 10{,}4}{6} = 6{,}76 \text{ c}'.$$

Für ein Gefälle von 24 Fuß beim oberschlächtigen Rad ist dagegen die zu 1 Mahlgang nöthige Wassermenge

$$= \frac{3{,}9 \times 10{,}4}{24} = 1{,}69 \text{ c}'.$$

Auf diese Art ist die folgende Tabelle berechnet, aus welcher die zum Betriebe eines Mahlgangs nöthigen Gefälle und Wassermengen bei den vier verschiedenen Gattungen Rädern entnommen werden können.

Gefäll in Fußen.	Ein unterschlächtiges Rad mit 30 % Nutzeffekt	Ein Kropfrad mit 40 % Nutzeffekt	Ein oberschlächtiges Rad mit 50 % Nutzeffekt	Ein Ponceletrad mit 60 % Nutzeffekt	Ein oberschlächtiges Rad mit 60 % Nutzeffekt
	erfordert bei dem nebenstehenden Gefäll für einen Mahlgang (2,34 Pferdekräfte Nutzeffekt) bei Steinen von 3 Fuß Durchmesser eine Wassermenge per Sek. von				
	c′	c′	c′	c′	c′
1	81,12	—	—	40,56	—
2	40,56	30,42	—	20,28	Oberschlächtiges Rad für große Gefälle, oder rückschlächtiges Zellenrad.
3	27,04	20,28	—	13,52	
4	20,28	15,21	—	10,14	
5	16,22	12,16	—	8,11	
6	—	10,14	—	6,76	
7	—	8,67	—	5,80	
8	—	7,60	6,08	5,07	—
9	—	6,76	5,41	4,51	—
10	—	6,08	4,87	4,06	—
12	—	—	4,05	—	—
14	—	—	3,48	—	—
16	Ein unterschlächtiges Rad mit schiefgestellten oder gebrochenen Schaufeln. Wird höchstens bis zu 4 Fuß Gefäll angewendet.	Kropfrad oder mittelschlächtiges Rad überhaupt mit gebrochenen Schaufeln.	3,04	Unter- und mittelschlächtiges Rad mit gekrümmten Schaufeln.	—
18			—		2,25
20			—		2,03
22			—		1,84
24			Oberschlächtiges Rad für kleine Gefälle.		1,69
26				—	1,56
28		—		—	1,45
30		—		—	1,35

Aus dieser Tabelle ist z. B. ersichtlich, daß man, wenn ein Gefäll von 2 Fußen vorhanden ist, bei einem unterschlächtigen Rad 40,56, bei einem mittelschlächtigen oder Kropfrad 30,42 und bei einem Ponçeletrad (mit gekrümmten Schaufeln) 20,28 c′ Wasser per Sek. haben muß, um einen Mahlgang mit Steinen von 3 Fuß Durchmesser und 2,34 Pferdekraft Nutzeffekt in Betrieb setzen zu können, welcher (nach 261) per Stunde 2,7 bayer. Metzen vermahlt. Ein oberschlächtiges Rad mit 18′ Gefäll bedarf zur gleichen Betriebskraft nur 2,25 und bei 30′ Gefäll nur 1,35 c′ Wasser per Sekunde.

Soll der Mahlgang 4 oder 5füßige Steine heben, so muß bei gleichem Gefäll die in der Tabelle angegebene Wassermenge im ersten Fall mit $\frac{4}{3}$, im zweiten mit $\frac{5}{3}$ multiplizirt werden.

Die zum Betrieb eines Sägganges nöthige Wassermenge ist bei gleichem Gefäll das Doppelte der in der Tabelle enthaltenen Wassermenge für einen Mahlgang.

264. Grundsätze, welche bei der Anlage eines Triebwerks zu befolgen sind. — Bau der Wasserräder. — Damit die Wasserräder den angegebenen Nutzeffekt leisten, ist es nöthig, daß dieselben richtig construirt sind. Die Fehler, welche man bei den alten Wasserrädern gewöhnlich findet, sind: Die zu große Schaufeltheilung, die unzweckmäßige Stellung der Schaufeln und Zellen, die fehlerhafte Stellung der Schütze und die schlechte Anordnung des Gerinnes. Bei jedem Wasserrad sind folgende Punkte von Einfluß auf die Wirkung des Rades und daher beim Bau desselben ins Auge zu fassen:

a) die Wahl des Rades;
b) die Geschwindigkeit desselben;
c) der Durchmesser;
d) die Größe der Schaufeln und Zellen;
e) Zahl der Schaufeln und Zellen;
f) Form und Stellung derselben;
g) der Einlauf und das Gerinne.

265. a) Wahl des Rades. — Ist die Wasserkraft eines neu anzulegenden Triebwerks gegeben, so muß man vor Allem wissen, welches Rad am vortheilhaftesten ist. Hierüber gibt zum Theil schon die Tabelle in 263 Aufschluß. Für kleine Gefälle bis zu 3 Fuß ist bei jeder Wassermenge ein unterschlächtiges Rad anzuwenden. Dieses wird am wirksamsten, wenn die Schaufeln schief gestellt, oder gekrümmt (von Holz oder Blech) hergestellt werden. Für Gefälle über 3 Fuß ist das mittelschlächtige, daher ein Kropfrad mit gebrochenen Schaufeln, ein rückschlächtiges Zellenrad oder ein Rad mit krummen Schaufeln anzuwenden. Bei Gefällen über 8 Fuß kann bereits ein oberschlächtiges Rad zur Anwendung kommen, weil dieses verhältnißmäßig das wohlfeilste, und besonders bei kleiner Wassermenge vortheilhaft ist. Ist letztere größer als 12 c′, so kommt besser ein mittelschlächtiges Rad zur Anwendung.

266. b) Geschwindigkeit des Rades. — Wenn Wasser auf ein ruhendes Rad strömt, so setzt es dieses (bei unterschlächtigen) durch seinen Stoß, (bei mittelschlächtigen) durch Stoß und Druck und (bei oberschlächtigen Rädern) durch seinen Druck oder sein Gewicht allein in Bewegung. Die Wirkung dieses Stoßes oder Drucks nimmt aber um so mehr ab, je größer die Geschwindigkeit des Rades wird, da die Schaufeln oder Zellen dem anströmenden Wasser gleichsam entweichen. Würde das Rad die gleiche Geschwindigkeit haben, wie das Wasser, d. h. würde die Schaufel in der Sekunde ebenso weit sich vorwärts bewegen, wie das Wasser, so würde der Stoß oder der Druck des Wassers auf die Schaufel ganz aufhören. Man hat nun durch die Theorie und durch

Versuche gefunden, daß ein unterschlächtiges und ein Ponçeletrad die größte Wirkung äußert, wenn die Geschwindigkeit des Rades $\frac{4}{10}$ der Geschwindigkeit des Wassers ist. Nach 241 kann die Geschwindigkeit des aus der Schütze in die Radrinne eintretenden Wassers aus der Druckhöhe des Oberwassers berechnet werden. Multiplizirt man diese mit 0,4, so hat man die vortheilhafteste Geschwindigkeit des unterschlächtigen und Ponçeletrades.

Für das Kropfrad ist die vortheilhafteste Geschwindigkeit ohngefähr 7 Fuß; für die übrigen mittelschlächtigen Räder bei größeren Gefällen 5—5½ Fuß; für oberschlächtige Räder unter 18′ Gefäll ist 4½—5 Fuß, für solche mit Gefällen über 18 Fuß 5 Fuß als die vortheilhafteste Geschwindigkeit anzunehmen. Die Zahl der Umdrehungen eines Rades stellt sich hienach bei kleineren Rädern zu 8—10 und bei großen zu 4—6 per Minute heraus.

267. c) Durchmesser des Rades. — Bei unter- und mittelschlächtigen Rädern soll der Durchmesser möglichst groß gemacht werden, weil alsdann die Schaufeln nahezu senkrecht vom Wasser getroffen werden, und weil das Rad eine um so größere Wirkung ausübt, je größer der Halbmesser ist. (Vergl. 196.) Dieß hat jedoch wegen der Baukosten und der Umfangs-Geschwindigkeit des Rades seine Grenze. Der Durchmesser der unterschlächtigen Räder wechselt daher nach den jeweiligen Verhältnissen von 12 — 24 Fuß. Für das mittelschlächtige Rad ist der Durchmesser 2—4mal so groß als das Gefälle zu nehmen. Beim oberschlächtigen Rad ist der Durchmesser möglichst nahe gleich dem ganzen Gefäll anzunehmen, und

nur unten das nöthige Freigehänge wegen des Steigens des Unterwassers und oben die Dicke des einfallenden Wasserstrahls in Abzug zu bringen.

268. d) Größe der Schaufeln und Zellen, oder Breite und Tiefe des Rades. — Ist der Nutzeffekt einer Wasserkraft bekannt, so ist es auch bei gegebenem Gefäll die Wassermenge, welche auf das Rad in jeder Sekunde zu wirken hat, wie dieß für die Betriebskraft eines Mahlgangs oder 2,34 Pferdekräfte in der Tabelle zu 263 berechnet ist. Diese Wassermenge per Sek. muß das Rad fassen können. Nun füllen sich aber weder die Schaufeln noch die Zellenräume des Rades ganz mit Wasser, und man kann annehmen, daß im Durchschnitt das Wasser bei Schaufelrädern nur die Hälfte, und bei Zellenrädern nur ein Viertel des Raumes auszufüllen vermag, welchen die Schaufeln und Zellen zwischen sich enthalten. Die Breite des Rades (die Länge der Schaufel oder der Zelle) hängt daher von der Wassermenge, welche auf das Rad wirken soll, und von der Geschwindigkeit des Rades ab.

Die Vergleichung gut ausgeführter Räder mit den zufließenden Wassermengen zeigt nun, daß man für jeden Kubikfuß Wasserzufluß per Sekunde den Schaufelrädern 0,2 Fuß und den Zellenrädern 0,5 Fuß Radbreite geben muß. Das Verhältniß der Breite zur Tiefe des Rades richtet sich bei großen Rädern dagegen nach der von dem Rad zu leistenden Kraft. Bei Schaufelrädern, welche 12, 25, 40 Pferdekräfte absolute Wasserkraft aufnehmen, soll die Radbreite in gleicher Ordnung das 4, 5, 6fache der Radtiefe, bei Zellenrädern dagegen beziehungsweise das 5, 6, 8fache der Radtiefe betragen.

Gewöhnlich macht man die Tiefe der ober- und rückschlächtigen Räder 10—12 Zoll, bei den Kropfrädern 12—16 Zoll, bei den unterschlächtigen 12—20 Zoll stark, welche Regel für die Praxis genügt.

Ein Hauptfehler der alten Triebwerkseinrichtungen ist gewöhnlich die zu geringe Breite des Rades, weil hiedurch der Wasserverlust zwischen Schaufel und Gerinne, im Verhältniß zu der vom Wasser getroffenen Fläche der Schaufel zu groß wird. Dieß ist besonders der Fall, wenn viel Wasser auf das Rad geleitet wird, weil alsdann das Wasser auf allen 4 Seiten der Schaufel ohne Wirkung auf diese entweicht. Der Verlust an Kraft durch Spielraum der Schaufel im Gerinne ist nach 260 zu 18—27 Prozent der absoluten Kraft anzuschlagen, also auch bei guten Rädern ohnehin sehr bedeutend.

269. e) Anzahl der Schaufeln und Zellen. Eine große Zahl von Schaufeln oder Zellen ist für jedes Rad vortheilhaft, weil hiedurch die Kraft des ohne Unterbrechung wirkenden Wassers besser aufgenommen wird. Die größte Zahl der Schaufeln oder Zellen, und die größte Wirkung des Rades wird daher durch Anwendung von blechernen Schaufeln und Zellen erreicht. Die Zahl der hölzernen Schaufeln und Zellen muß wegen der Dicke der verwendeten Bretter geringer ausfallen. Durch Vergleichung gut ausgeführter Räder ergiebt sich nun die Weite w der Schaufeltheilung, wenn t die Tiefe des Rades (die Breite der Schaufel) bedeutet, für bayer. Fußmaß

$$a = 0{,}7 + 0{,}7 \times t$$

Ist z. B. die Tiefe des Rades 1 Fuß, so wird die Weite der Schaufeltheilung

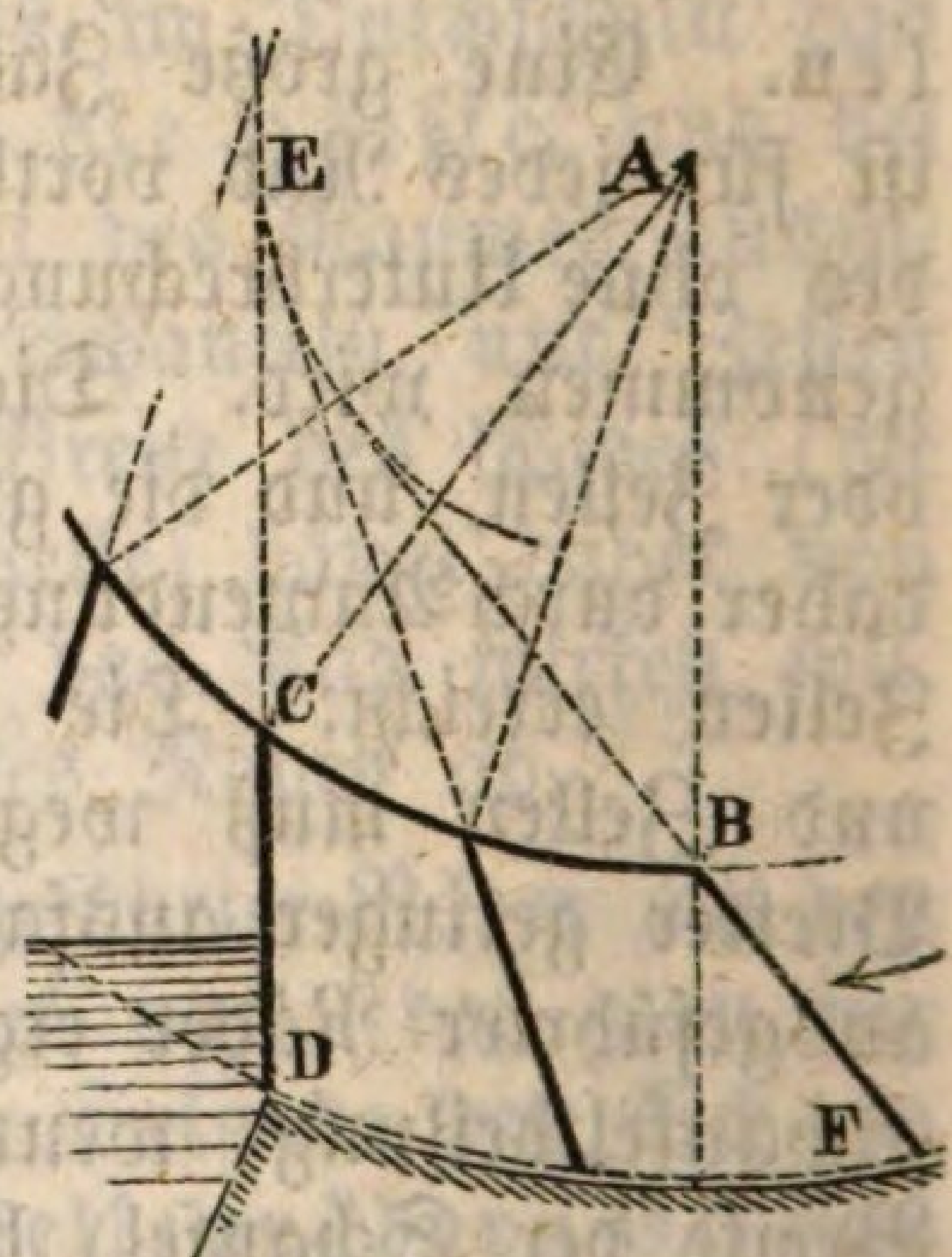
$$w = 0{,}7 + 0{,}7 = 1{,}4 \text{ Fuß.}$$

Für ein 1,5′ tiefes Rad wird w = 1,75 Fuß u. s. w. Dividirt man mit der Schaufeltheilung in den Umfang des Rades, so erhält man die Zahl der

Schaufeln oder Zellen, welche man um 1 oder 2 vermehrt oder vermindert, so daß sie mit der Zahl der Radarme theilbar ist.

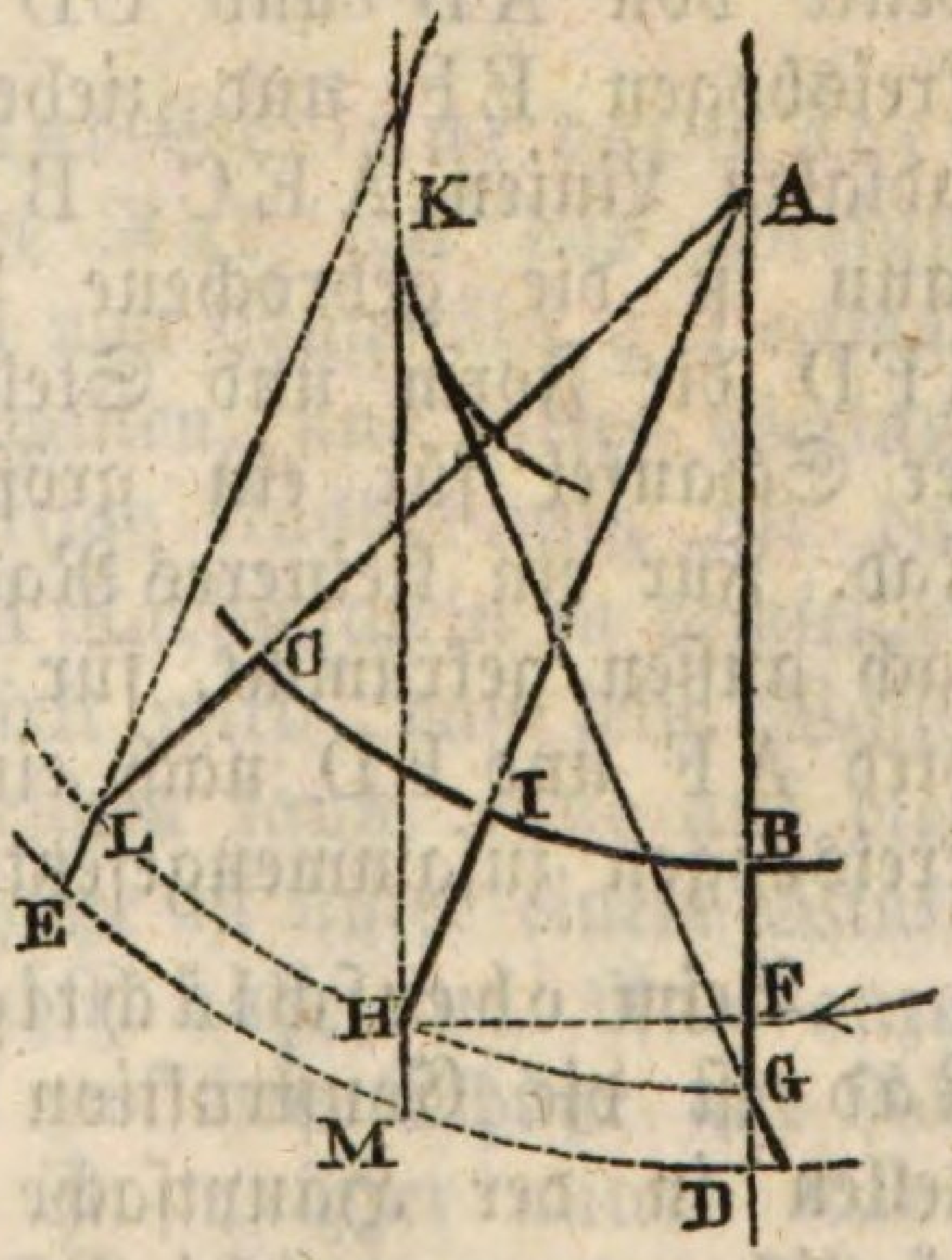
Die Zahl der gekrümmten Schaufeln des Ponçeletrades wird gefunden, wenn man die Zahl der Fuße, welche der Halbmesser des Rades mißt, 8 bis 10mal nimmt. Ein Ponçeletrad von 12 Fuß Durchmesser wird also 48 bis 60 gekrümmte Schaufeln erhalten.

270. f) Form und Stellung der Schaufeln. Beim unterschlächtigen Rad sollen die Schaufeln nicht wie bei den alten Rädern in der Richtung des Radius stehen, weil sie in diesem Fall beim Austauchen aus dem Wasser dieses in die Höhe werfen. Damit dieß nicht der Fall ist, sind die Schaufeln schief zu stellen, so zwar, daß die das Wasser verlassende Schaufel senkrecht aus diesem heraustaucht. Ist A der Mittelpunkt des Rades, B C der Radkranz, F D das Gerinne, so zeichne man die das Wasser verlassende Schaufel C D senkrecht zum Wasserspiegel, und theile von C aus den Radumfang C B in die entsprechende Zahl von Schaufeln ein. Die Stellung der übrigen Schaufeln wird nun leicht gefunden, indem man CD aufwärts nach E verlängert, von A aus einen berührenden Kreis E an die Linie C D E beschreibt, und von den Theilungspunkten z. B. von B die Schaufel BF so zieht, daß sie, ver-



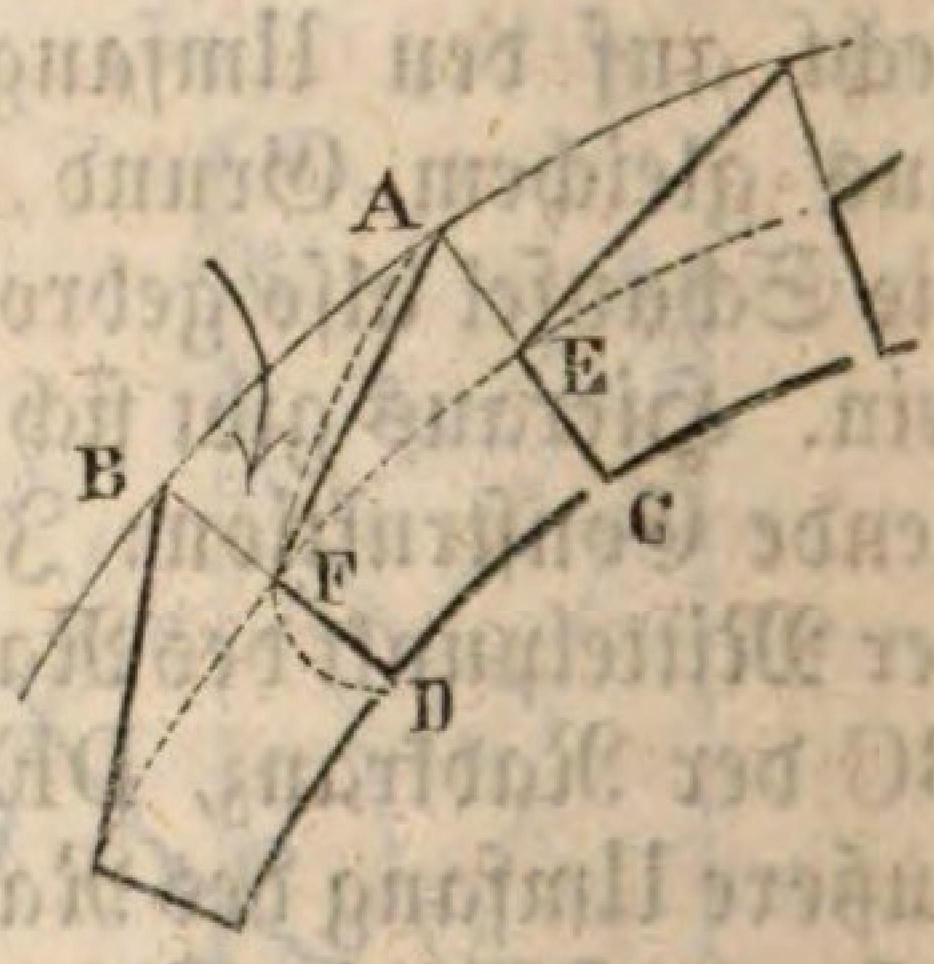
längert, den erwähnten Kreis bei E berührt. Auf diese Art werden alle Schaufeln den gleichen Winkel mit dem Umfang oder dem Halbmesser des Rades bilden, und dieser Winkel wird nahezu 45° betragen. Das Wasser wird beim Eintritt in das Rad ohne großen Stoß an den schiefen Schaufeln emporsteigen, seine Kraft an diese abgeben, und die Schaufeln werden sämmtlich ohne Stoß auf das Unterwasser, und ohne dieses empor zu schleudern, senkrecht aus diesem heraustauchen.

Beim mittelschlächtigen Rad, wofür als Beispiel das Kropfrad dienen mag, soll die Schaufel größtentheils nach der Richtung des Radius oder senkrecht auf den Umfang, das Ende der Schaufel aber aus gleichem Grund, wie vorhin, schief gestellt sein, die Schaufel also gebrochen sein. Hieraus gibt sich folgende Construktion: Ist A der Mittelpunkt des Rades, BC der Radkranz, DE der äußere Umfang des Rades, BI = IC die Schaufeltheilung am Radkranz, so theile man die Tiefe BD des Rades in F in zwei gleiche Theile, halbire auch FD in G, so daß DF = $\frac{1}{2}$ BD und DG = $\frac{1}{4}$ BD wird, ziehe durch F die Horizontale FH, und durch G den Kreisbogen GHL parallel dem Umfang. Im Schnittpunkt H des Bogens GH und der Parallelen FH errichte man die Linie MHK senkrecht zum Wasser-

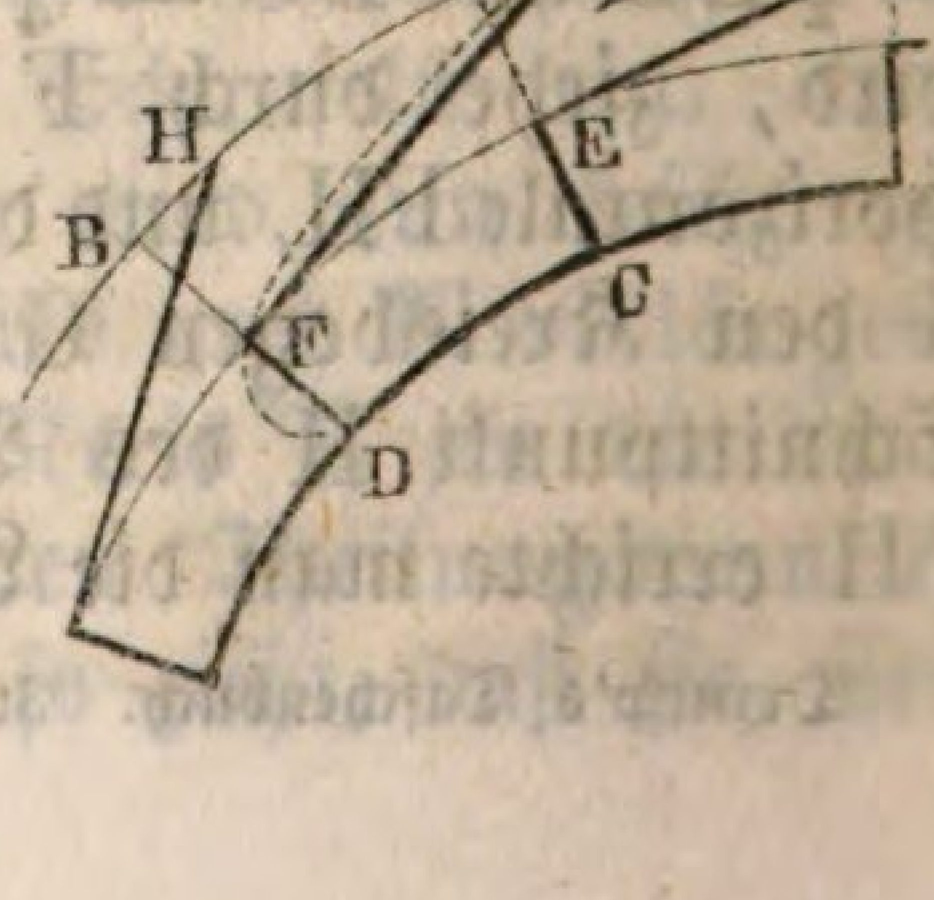


spiegel, so ist MH der senkrecht aus dem Wasser tauchende, MI der nach dem Mittelpunkt A gerichtete Theil der Schaufel MHI. Um die übrigen Schaufeln zu verzeichnen, beschreibt man von A aus einen berührenden Kreis an die Linie MHK, und zieht durch die Theilpunkte G, H, L die Linien GD, HM, LE so, daß sie diesen Kreis berühren. Damit die Luft zwischen zwei Schaufeln, welche im Gerinne unter Wasser sind, entweichen kann, muß der Radboden hinter jeder Schaufel eine schmale Spalte haben.

Beim rückschlächtigen Rad wird die Form der Zellen auf folgende Art gefunden: Ist AB die Schaufeltheilung am äußeren Radkranz, CD der innere Radkranz, so beschreibe man in der Mitte von AB und CD den Kreisbogen EF und ziehe die radialen Linien AEC, BFD, dann ist die gebrochene Linie AFD die Form und Stellung der Schaufel für ein größeres Rad. Für ein kleineres Rad wird AF etwas weniges nach außen gekrümmt, für ein Rad mit Blechschaufeln wird AF und FD nach einer stetigen krummen, aus Kreisbogen zusammengesetzten Curve geformt.



Beim oberschlächtigen Rad ist die Construktion der Zellen in der Hauptsache die nämliche, nur werden die Punkte, wo die äußeren Zellenwände den Radumfang schneiden, nicht in die Theilpunkte A, B, sondern etwas zurück nach G, H verlegt,



und zwar wird AG = BH = $\frac{1}{4}$ AB oder gleich $\frac{1}{4}$ der Schaufeltheilung gemacht. Hiedurch wird der Winkel, welchen die Zellen mit dem Radumfang machen, sehr spitz, und das Rad entleert erst sehr tief unten. Wegen der engen Schluckweite der Zellen muß der Wasserstrahl ganz am Scheitel des Rades nahezu horizontal in die Zellen geleitet werden und seine Dicke darf nur halb so groß sein, als die Schluckweite der Zellen, damit die eingeschlossene Luft neben dem Wasser entweichen kann. Aus diesem Grund ist auch keine Luftspalte anzubringen.

Für kleinere Räder ist es gut, wenn die äußere Zellenwand GF etwas nach außen gekrümmt wird, damit die Schluckweite nach innen sich nicht zu sehr verenge; bei blechernen Zellen krümmt man Wand und Boden der Zelle nach der stetigen Curve GFD.

271. g) Einlauf und Gerinne der Räder. Beim unterschlächtigen Rad soll das Gerinne nur eine schwache Neigung von ohngefähr $\frac{1}{2}$ Decimalzoll auf 10 Fuß Länge erhalten, und dieses Gerinne eine kleine seichte segmentartige Aushöhlung für das Rad erhalten, so daß nur 3 Radschaufeln in demselben Platz haben, wodurch bewirkt wird, daß kein Wasser unter den Schaufeln entweichen kann, ohne auf diese gewirkt zu haben. Die Schütze ist unter einem Winkel von 60°/₀ geneigt möglichst nahe am Rad anzubringen, damit kein Gefäll zwischen Schütze und Rad verloren gehen kann, und ist an ihrer untern Kante abzurunden, damit das Wasser ruhig und ohne Seitenströmungen, in einem gleichförmigen Strahl an die Schaufeln gelange. Der Punkt, wo die Oberfläche dieses Wasserstrahls den äußeren Radumfang schneidet, soll mit dem Unterwasser in gleicher Höhe liegen.

Die Geschwindigkeit des an die Schaufel anströmenden Wasserstrahls entspricht der Druckhöhe des Oberwassers, welche in diesem Fall dem Gesammtgefäll gleich ist. Der Spielraum des Rades im Gerinne soll nicht über einen halben Decimalzoll betragen. Die Radschaufeln gehen hier nothwendig im Unterwasser, sollen aber durch eine schiefe Stellung zum Radumfang senkrecht aus dem Unterwasser heraustauchen, wie oben gezeigt worden ist.

Die Construktion des Einlaufes und des Gerinnes für das mittelschlächtige Rad soll am Kropfrad gezeigt werden. Bei diesem müssen die Schaufeln ohngefähr zur Hälfte im Unterwasser gehen. Der Spiegel desselben soll also durch die Mitte der untersten vertikal stehenden Radschaufel gehen. Man verzeichnet nun das Rad, dessen Durchmesser nach dem früheren bekannt ist, und trägt das Oberwasser in der Höhe des Gesammtgefälls über dem Unterwasser auf. Die Lage des Punktes, wo das kreisförmige Gerinne, welches um $\frac{1}{2}$ Zoll vom Radumfang absteht, vom eintretenden Wasserstrahl geschnitten wird, hängt von der Geschwindigkeit ab, welche das Rad erhalten soll. Diese ist, wie oben angegeben, am Vortheilhaftesten = 7 Fuß. Alsdann soll das Wasser beim Eintritt in die Schaufel eine Geschwindigkeit von 10 Fuß haben. Dieser Geschwindigkeit entspricht (nach 224) eine Druckhöhe h des Oberwassers von

$$h = 0{,}0148 \times 10^2 = 1{,}48$$

oder 1,5 Fuß. Man nimmt daher den höchsten Punkt des kreisförmigen Gerinnes, wo dieses in den Kropf übergeht und das Wasser die Schaufel trifft, 1,5 Fuß unter dem Oberwasser an, und rundet das Gerinne

am Kropf (zwischen Rad und Schütze) nach einem Kreisbogen ab, wobei zu beachten ist, daß die Mühlschütze schräg unter einem Winkel von 60° gegen das Oberwasser und möglichst nahe an das Rad anzubringen, an ihrer untern Kante nach innen abzurunden und so zu stellen ist, daß sie zugestellt, an dem höchsten Punkt des Kropfes (dem Scheitel des erwähnten Kreisbogens) dicht anschließt. Dem Gerinnboden gibt man von der Schütze an wasseraufwärts eine Neigung von $\frac{1}{25}$ oder 4″ auf 10′ bis zum horizontalen Boden des Zuleitungskanals.

Einlauf und Gerinne beim oberschlächtigen Rad. — Da bei dem oberschlächtigen Rad das Wasser ausschließlich durch sein Gewicht in den Zellen zu wirken hat, so soll dasselbe möglichst ruhig und ohne Stoß gegen die Zellenwände in die Zellen eintreten. Aus diesem Grund ist die Einrichtung des Gerinnes der alten oberschlächtigen Mühlen, wo das Wasser im Zuleitungskanal eine große Druckhöhe hat, und mit bedeutender Geschwindigkeit in die Zellen stürzt, unvortheilhaft. Es soll vielmehr die Druckhöhe des Oberwassers im Zuleitungskanal nicht über 1,5′ betragen, wodurch der aus dem Kanal in die Zellen fallende Wasserstrahl eine Geschwindigkeit von 10 Fuß erhält, während das Rad selbst nach 264. b) am besten eine halb so große Geschwindigkeit von 5 Fuß erhält. Hat man daher den Spiegel des Ober- und Unterwassers verzeichnet, so zieht man von dem Gesammtgefäll oben 1,5 Fuß Druckhöhe und die Dicke des Gerinnbodens und unten das wegen des Steigens des Unterwassers nöthige Freigehänge ab. Der Rest gibt den Durchmesser des Rades. Das Ende des Zuleitungskanals muß am höchsten Punkt des Rades

und die schräg gestellte Schütze so nahe an dem Scheitel des Rades angebracht werden, als dieß der letzte Querbalken, über welchem die Schütze sich befindet, zwischen Rad und Gerinnboden zuläßt. Von der Schütze, welche unten schräg in der Richtung des austretenden Wasserstrahls abzurunden ist, wird bis zum Scheitel des Rades dem Zuleitungskanal eine sehr schwache geneigte Krümmung gegeben, deren äußerstes Ende eine solche Neigung erhalten muß, daß der am Scheitel des Rades eintretende Wasserstrahl bei r u h e n d e m Z u s t a n d des Rades die Mitte der unteren Fläche einer Zelle (Mitte von G F in Fig. 4 zu 270. f) treffen würde. Bei dieser Richtung des Wasserstrahls wird derselbe, wenn das Rad in Bewegung ist, genau zwischen den 2 Zellenwänden eintreten, so daß weder ein Stoß des Wassers auf die untere Fläche der Zelle ausgeübt, noch der Strahl von der oberen Fläche der Zelle getroffen und weiter geschleudert wird, also der geringste Wasser- und Kraftverlust stattfindet. Der Wasserstrahl tritt alsdann stets nach der in Fig. 4 zu 270. f) durch den Pfeil bezeichneten Richtung in das in Bewegung befindliche Rad ein. Bei der Ausführung kann auch der Ausfluß des Gerinnes von Blech hergestellt und nach dem Angegebenen die beste Form und Lage des Gerinnes durch Versuche ermittelt werden. —

Für die Anlage der Gerinne und Räder im Allgemeinen ist sich zu merken, daß bei allen Gattungen von Wasserrädern die von dem Wasser ausgeübte Kraft um so besser auf das Rad übertragen wird, je ruhiger und gleichförmiger dieß geschieht. Das Wasser soll in einem möglichst gleichförmigen, regelmäßigen, bandartigen Strahl ohne Lärmen und

Spritzen unter der Schütze austreten, und in das Rad gelangen, an dieses nach und nach seine Kraft abgeben und möglichst ruhig das Rad (oder dieses das erstere) verlassen. Kreuzweise unter der Schütze einschießende Wasserstrahlen sind ein Zeichen mangelhafter Construktion der Schütze und des Gerinnes, wo alle scharfen Ecken und Kanten zu vermeiden sind; lärmende, plätschernde, viel Wasser mit in die Höhe reißende Räder sind gleichfalls schlecht construirt und leisten wenig Nutzeffekt, da die unregelmäßigen Bewegungen und das Spritzen des Wassers eine gewisse mechanische Arbeitsleistung erfordern, welche dem Rad entzogen wird, während letzteres überdieß beständigen Erschütterungen ausgesetzt ist, welche es frühzeitig ruinös machen.

Die angegebenen Grundsätze genügen, solche grobe Fehler beim Bau eines neuen Triebwerkes zu vermeiden, und eine wenn auch nicht vollkommene, doch möglichst zweckmäßige Triebwerksanlage zu erzielen.

272. Schlußfolgerungen. — Vergleichung zweier Triebwerke. — Einfluß der Aenderungen in Wassermenge und Gefäll auf die Wasserkraft, die Rente und den Werth eines Triebwerkes. — Da nach 251 die Wasserkraft eines Triebswerks dem Produkt aus der in einer Sekunde zufließenden Wassermenge und dem Gefälle proportional ist, so lassen sich hieraus für die Praxis folgende wichtige Schlüsse ziehen:

a) Die Wasserkräfte zweier Triebwerke verhalten sich bei gleichem Gefäll wie die in einer Sekunde jedem derselben zufließenden Wassermengen.

Liegen z. B. zwei Mühlen an einem und demselben Flusse sich gegenüber und haben in Folge dessen beide das gleiche Gefäll, so stehen die Wasserkräfte beider im Verhältniß der denselben zufließenden Wassermengen. Hat die eine Mühle A 2, 3, 4mal soviel Wasser als die andre B, so ist auch die Wasserkraft des Triebwerks A 2, 3, 4mal so groß als jene von B. Sind beide Werke von gleicher Construktion und wird die zufließende Wassermenge an beiden Werken vollständig verwendet, so ist auch der Nutzeffekt und folglich auch die Rente und der Geldwerth der Wasserkraft des Triebwerks A (ohne Einrichtung) 2, 3, 4mal so groß als bei dem Triebwerk B.

Wird einem Müller durch Beschädigung oder Tieferlegung des Wehres, durch theilweise Zerstörung des Mühlweiherdammes, des Schutzkastens, des Mühlgerinnes, durch Ableitung des Wassers behufs Wiesenwässerung u. s. w. $\frac{1}{10}$ der durchschnittlichen Zuflußmenge seines Oberwassers entzogen, so geht ihm damit nothwendigerweise auch $\frac{1}{10}$ seiner absoluten Wasserkraft, seines Nutzeffekts und seiner Rente (des Einkommens aus der Wasserkraft) für die Dauer dieses Wasserentgangs verloren. Wird ihm auf eine der genannten Arten für immer 10 Prozent des Wasserzuflusses entzogen, so ist auch die Rente und folglich auch der Geldwerth der Wasserkraft um 10 Prozent vermindert.

Bei allen Bächen nimmt der Wasserzufluß in der heißen und in der kalten Jahreszeit ab, in der nassen Jahreszeit dagegen zu. Ist der Wasserzufluß eines Triebwerks zur Zeit des Hochwassers 5mal so groß als zur Zeit des kleinsten Wasserstandes, so ist auch die Wasserkraft in dem ersten Fall 5mal so groß als im letztern. Nicht immer läßt sich aber der Geschäftsbetrieb nach der vorhandenen Wasserkraft einrichten. Bäche mit sehr veränderlicher Zuflußmenge sind daher für einen gleichförmigen Geschäftsbetrieb nicht

vortheilhaft. Je kleiner der Bach, desto größer pflegen aber die Unterschiede in dessen Wassermengen zu sein. Man sucht daher diese Nachtheile durch Erweiterung des Bachbettes zu einem Wasser-Reservoir, durch Anlage eines Mühlweihers 2c., wodurch ein allmähliger und gleichförmiger Verbrauch des Wassers möglich wird, nach Thunlichkeit zu verringern.

Wenn die Wassermenge eines Baches bedeutend wächst, so ist jedoch nur so lange eine in gleichem Maß wachsende Vergrößerung der Mahlkraft vorhanden, als der Ueberschuß des Wassers noch auf das Rad wirken kann, und das Gefäll nicht durch Erhöhung des Unterwassers verringert wird.

b) Die Wasserkräfte zweier Triebwerke verhalten sich bei gleichem Wasserzufluß wie die entsprechenden Gefälle.

Liegen z. B. an einem und demselben Bach zwei Mühlen A und B hinter einander und hat die obere A 5′, die untere B 6′ Gefäll, so verhalten sich die Wasserkräfte beider Mühlen (vorausgesetzt, daß die gleiche Gesammtwassermenge des Baches auf beide Mühlen wirkt):

$$A : B = 5 : 6 = 1 : 1\tfrac{1}{5}$$

d. h. die untere Mühle B hat $\frac{1}{5}$ oder um 20 Proz. mehr absolute Wasserkraft als die obere A. Ist die Einrichtung beider Mühlen von gleicher Art, so ist auch der Nutzeffekt, die Rente und der Werth der Wasserkraft der Mühle B um $\frac{1}{5}$ oder 20 Proz. größer als jener der Mühle A.

Wird an einem und demselben Triebwerk mit gespannter Wasserkraft das Gefäll vergrößert oder vermindert, so wird auch damit die ganze Wasserkraft in demselben Verhältniß vermehrt oder vermindert. Hat z. B. eine Mühle 5′ Gefäll, und ist man im Stande, dieses Gefäll (entweder durch Erhöhung des Oberwassers, unbeschadet der Rechte der Uferbewohner und

des oberen Müllers, oder durch Tieferlegung des Unterwassers, Räumung des Abzugskanals ꝛc.) um $\frac{1}{2}'$ oder 10 Proz. zu erhöhen, so wird dadurch auch der Nutzeffekt, die Rente und der Werth der Wasserkraft (gleichviel, welche Einrichtung das Triebwerk besitzt), um 10 Proz. des früheren Werthes erhöht.

Hat ein Triebwerk 3′ Gefäll, und wird dieses um $1\frac{1}{2}$ Dec.-Zoll oder 0,15 erhöht, so wird dadurch die Betriebskraft und deren Werth um $\frac{0{,}15}{3} = \frac{1}{20}$ oder 5 Proz. vermehrt.

Diese Beispiele zeigen, wie nothwendig es für den Mühlarzt ist, beim Umbau eines Triebwerkes zu wissen, welches Gefäll der Bach von der zunächst oberhalb gelegenen Mühle bis zur zunächst unterhalb gelegenen hat, weil hieraus und aus dem bisher benutzten Gefäll hervorgeht, ob noch ein Gewinn an Gefäll ohne Nachtheil für einen Dritten möglich und wie groß dieser Gewinn ist. An Bächen mit wenig Gefäll und nahe beisammen liegenden Triebwerken wird eine Vergrößerung des Gefälles nicht leicht, oder nur in sehr geringem Maß möglich sein. Dagegen ist bei einem Bach mit starkem Gefäll und weit von einander abliegenden Triebwerken eine Vermehrung des Gefälls und dadurch des Nutzeffekts, der Rente und des Werthes der Wasserkraft sehr häufig möglich, und bei ohnehin vorzunehmendem Umbau des Werkes mit verhältnißmäßig wenig Mehrkosten zu erreichen. *)

---

*) Das Gesetz vom 28. Mai 1852 über die Benützung des Wassers in Bayern ist in dieser Beziehung eine große Wohlthat, indem es auf der einen Seite die Bestrebungen unternehmungslustiger Triebwerksbesitzer, ihre Werke zu verbessern und die vorhandene Wasserkraft auszubeuten, unbeschadet der Rechte Dritter,

Beim Neubau oder Umbau eines Triebwerkes sollte der Mühlarzt immer ein genaues Nivellement des ganzen Baches von der Radstube der zunächst oberhalb gelegenen Mühle an bis zur Mahlschütze der unterhalb gelegenen Mühle aufnehmen (vergl. 13. Kapitel und 259) und in einen Längenprofilplan eintragen, in welchem die Höhen in 10mal größerem Maßstab als die Längen aufzutragen sind. In diesem Plan sollte die Höhenlage der Räder der zunächst oberhalb gelegenen, und die zuständige Wasserhöhe (der Aichpfahl) der untern Mühle, sowie die sämmtlichen Wehre und Schützen mit ihren Fachbäumen ihrer Höhenlage nach eingetragen sein, wie dieses auch in den Plänen und Urkunden bei der gerichtlichen Setzung eines Aichpfahls in Bayern nach der deßfallsigen Instruktion vom 11. Jan. 1855 vorgeschrieben ist. In diesem Längenprofil des Baches ist alsdann der neue Wasserbau mit dem Wasserrad nach den in 264—271 dargestellten Prinzipien so einzuconstruiren, daß ein möglichst großes Gefäll für das neue Werk sich ergibt, ohne daß die obere Mühle und der Uferbesitzer belästigt und eine nachtheilige Rückstauung von der untern Mühle dem neuen Triebwerk verursacht wird.

Nach gleichen Grundsätzen muß auch die Größe des Schadens beurtheilt werden, welcher von einer Mühle durch übermäßige Stauung (etwa durch Erhöhung des Wehres, Unterlassung des rechtzeitigen Ziehens der Leerschützen, des Grundablasses bei Hochwässern und Eisgängen ꝛc.) vorübergehend oder bleibend dem zunächst oberhalb gelegenen Triebwerkbesitzer zugefügt wird. Hat das obere Triebwerk beispielsweise 6′ Gefäll und wird durch eine der genannten

---

gegen allenfallsige aus Unkenntniß, Chikane oder Brodneid entspringende Einwendungen in Schutz nimmt, und die Entscheidungen auf Grund der Gutachten von unpartheiischen Sachverständigen anordnet; anderseits, indem es dafür sorgt, daß keine nutzlose Verschwendung des Wassers zum Nachtheil Anderer stattfinde, alle Aenderungen an den Triebwerken, welche auf den Stand und den Verbrauch des Wassers Einfluß haben, von der Genehmigung durch die Verwaltungsbehörden abhängig macht, die zuständige Wasserhöhe durch Aichpfähle fixiren läßt, Willkürlichkeiten vorbeugt, die Flußpolizei regelt ꝛc. Siehe §§. 53—85 des Gesetzes.

Ursachen die zuständige Wasserhöhe des untern Triebwerks um 1′ überschritten, also dem oberen Triebwerk 1′ Stauung seines Unterwassers (horizontalen Wasserspiegel angenommen) verursacht, so wird, wenn keine besonderen Nebenumstände einwirken, die Wasserkraft, der Nutzeffekt, die Rente und der Werth des oberen Triebwerks um $\frac{1}{6}$ vermindert werden. Hienach und nach der Dauer der schädlichen Stauung, dann nach dem jährlichen Reinertrag wird die Größe des verursachten Schadens zu bemessen sein. Ist der jährliche Ertrag eines Triebwerks nicht auf anderem Weg besser zu ermitteln, so kann das tägliche Mahlquantum für eine Mahlmühle und folglich auch die Größe des fraglichen Schadens aus der Größe der Wasserkraft und der Construktionsart des Triebwerks mit Hilfe der Angaben über den Betrieb von Mahl- und Sägmühlen aus Nr. 261 gefunden werden.

d) Haben 2 Triebwerke verschiedene Wassermengen und Gefälle, so verhalten sich ihre Wasserkräfte wie die Produkte aus der Wassermenge (per Sek.) und dem Gefäll.

Hat z. B. ein Triebwerk A per Sek. 5 c′ Wasserzufluß und 4′ Gefäll, ein andres B 6 c′ Wasser und 3′ Gefäll, so verhalten sich ihre Wasserkräfte

$$\begin{aligned} A : B &= 5 \times 4 : 6 \times 3 \\ &= 20 : 18 \\ &= 10 : 9 \\ &= 1 : 0{,}9 \end{aligned}$$

d. h. die Wasserkraft des Triebwerks B ist nur 0,90 oder 90 Prozent derjenigen des Triebwerks A. Haben beide Triebwerke gleiche Einrichtung, haben sie z. B. im vorliegenden Fall, beide unterschlächtige Räder und

gleiche innere Einrichtung, so wird auch die Rente und der Werth des Triebwerkes B 90 Prozent von jenem des Triebwerkes A sein.

Hat eine unterschlächtige Mühle A 10 c′ Wasserzufluß und 3′ Gefäll, eine oberschlächtige B 1,5 c′ Wasser und 20′ Gefäll, so verhalten sich ihre absoluten Wasserkräfte wie

$$A : B = 10 \times 3 : 1{,}5 \times 20$$
$$= 30 : 30$$
$$= 1 : 1$$

d. h. die absoluten Wasserkräfte sind bei beiden Mühlen gleich; da aber ein unterschlächtiges Rad nur 30 Procent, ein oberschlächtiges 60 Prozent oder das Doppelte an Nutzeffekt abwirft, so wird die oberschlächtige Mühle B (alles Uebrige gleich vorausgesetzt) das Doppelte der unterschlächtigen A leisten. —

Auf diese Art läßt sich aus der bekannten Leistungsfähigkeit eines Triebwerks ein Schluß auf die Leistung eines anderen Triebwerks machen, wenn deren Wassermengen und Gefälle sowie die Construktionsarten der Wasserräder und des innern Werks bekannt sind. —

Eilftes Kapitel.

Aërostatik oder Lehre vom Gleichgewicht der Luft.

273. Erklärungen. — Die Luft hat mit dem Wasser die Schwere, vermöge welcher sie einen Druck ausübt, und die leichte Verschiebbarkeit ihrer Theile, folglich auch die von diesen Eigenschaften abhängenden Erscheinungen gemeinschaftlich; unterscheidet sich aber vom Wasser vorzüglich dadurch, daß, während jenes auch durch die größte Kraft nicht zusammengedrückt werden kann, diese einen hohen Grad von Zusammendrückbarkeit und Ausdehnsamkeit oder Elastizität besitzt. Unser leichter Gang in der Luft rührt von der leichten Verschiebbarkeit der Lufttheile her. Daß die Luft elastisch ist, sieht man an einer mit Luft gefüllten Blase, welche, stellenweise zusammengedrückt, bei nachlassendem Druck ihre frühere Form genau wieder einnimmt. Taucht man ein umgekehrtes Trinkglas zum Theil oder ganz unter Wasser, so wird die Luft darin zusammengedrückt, und das Bestreben, sich wieder auf ihren früheren Rauminhalt auszudehnen, äußert sich durch die Kraft, welche nöthig ist, das umgekehrte Glas unter Wasser zu halten.

274. Luftdruck. — Weil die Luft wie jeder andere Körper von der Erde angezogen wird, also schwer ist, so übt sie, wie das Wasser, nach allen Seiten einen Druck aus. Die unteren Luftschichten

auf unserer Erde sind deßhalb dichter, als die oberen. Auf dem nach allen Richtungen stattfindenden Luftdrucke, sowie auf der Zusammendrückbarkeit und Ausdehnsamkeit der Luft, beruht unter andern die Wirksamkeit der in der Technik so vielfach angewandten Pumpen, weßhalb eine nähere Kenntniß der Gesetze des Luftdrucks für den Bautechniker nicht ohne Wichtigkeit ist.

Füllt man eine etwa 30 Zoll lange, an einem Ende zugestopfte gläserne Röhre mit Quecksilber, hält dann das offene Ende mit dem Finger zu, kehrt die Röhre um, und bringt das zugehaltene Ende unter den Spiegel des in einem Gefäße befindlichen Quecksilbers, und zieht man nun den Finger weg, so sinkt das Quecksilber in der Röhre nur um etwa 2 Zoll, so daß es auf einer Höhe von 28″ über dem Quecksilber im Gefäße stehen bleibt; wird aber das zugestopfte Ende geöffnet, so fällt das Quecksilber herab.

Der Grund dieser Erscheinung kann nur im Druck der Luft zu suchen sein; denn bringt man diese mit Quecksilber bis 28″ gefüllte Röhre mit dem Gefäß voll Quecksilber, worin sie steht, unter die Glocke einer Luftpumpe, und pumpt man die äußere Luft hinweg, so fällt das Quecksilber ganz aus der Röhre; läßt man wieder Luft hinzu, so drückt diese wieder eine Quecksilbersäule von 28″ in die Höhe.



Um sich diese Erscheinung zu erklären, denke man sich in den einen Schenkel einer umgebogenen Glasröhre etwas Quecksilber, in den andern Wasser gegossen. Diese beiden Flüssigkeiten werden, wenn sie zur Ruhe gekommen, also im Gleichgewicht sind, verschiedene Höhe einnehmen, und zwar wird das Wasser,

weil es ohngefähr 14mal leichter als Quecksilber ist, eine 14mal höhere Säule bilden, als das Quecksilber. Hiebei ist die Höhe der Wasser- und Quecksilbersäule von der Berührungsfläche 0—0 beider Flüssigkeiten gemessen zu denken, da der unterhalb der Trennungsfläche liegende Theil, gleichviel ob Wasser oder Quecksilber, für sich in Ruhe ist. (In der Figur ist die Säule rechts zwischen den beiden Horizontallinien als Wasser, die kleine Säule links und der gekrümmte Theil unter 0—0 als Quecksilber anzusehen.) Steht z. B. das Quecksilber 1″ hoch, so muß die Wassersäule 14″ Höhe haben. Ein Zoll Quecksilber in der Röhre links ist also so schwer, wie 14″ Wasser in der Röhre rechts oder hält diesen das Gleichgewicht. Wird die Quecksilbersäule 28″ hoch, so muß die Wassersäule 14 × 28″ = 392″ oder 32′ hoch werden. Ein Gleiches gilt von der Luft und dem Quecksilber. Nur muß hier die Luftsäule noch viel höher sein als die Wassersäule, weil die Luft viel leichter ist als das Wasser.

275. Größe des Luftdrucks. — Denkt man sich den einen Schenkel der eben betrachteten Röhre bis in die höchsten Luftschichten reichend und mit Luft gefüllt, in dem andern eine Quecksilbersäule von 28″ Höhe, darüber aber einen luftleeren Raum und die Röhre zugeschmolzen, so hält diese Quecksilbersäule von 28″ Höhe einer Luftsäule, welche von der höchsten Atmosphäre bis zur Erde reicht und dieselbe Grundfläche hat, das Gleichgewicht.

Der Druck der Luft auf irgend eine Fläche ist daher gleich dem Gewicht einer Quecksilbersäule, welche die gedrückte Fläche zur Grundfläche und 28″ Höhe hat.

Oder: Der Luftdruck auf irgend eine Fläche ist gleich dem Gewicht einer Wassersäule, welche die gedrückte Fläche zur Grundfläche und 32′ Höhe hat.

Der Druck der Luft an der Oberfläche der Erde ist also eben so groß als der Wasserdruck in einer Tiefe von 32′ unter dem Wasserspiegel. Auf 1 □′ z. B. beträgt der Luftdruck so viel als das Gewicht einer Wassersäule von 1 □′ Grundfläche und 32′ Höhe oder von 32 c′ Wasser, d. i. 32 × 44,4 = 1420 Pfd. oder 14 Ctr. und auf den □″ also 14 Pfd. Daß man diesen Druck nicht spürt, kommt daher, weil derselbe nicht einseitig ist, sondern die Luft in allen Theilen des Körpers ebenso stark drückt und der äußeren das Gleichgewicht hält.

Die Luft ist etwa 800 mal leichter als das Wasser. Wäre die Luft in allen Schichten gleich dicht, so würde die Höhe der Luftsäule, welche einer 32′ hohen Wassersäule das Gleichgewicht hält, oder die Höhe der Atmosphäre 800 × 32′ = 25600′, d. i. etwas über eine Meile betragen. Die Atmosphäre ist aber wegen der Abnahme des Luftdrucks nach oben viel höher.

276. Der Barometer. — Wenn dem beim angegebenen Versuche gebrauchten Apparate eine solche Einrichtung gegeben wird, daß das Gefäß klein ist, die Röhre daran senkrecht befestigt und mit einer Skale, d. i. mit einer Eintheilung nach Zollen und Linien, zur Messung der Quecksilbersäule versehen wird, so hat man den sogenannten Barometer, welcher dazu dient: den Druck oder das Gewicht der über uns sich befindenden Luftsäule zu messen.

Die Hauptanwendung findet der Barometer bei Höhenmessungen, d. i. bei der Bestimmung der Höhen

der Berge, so wie überhaupt der Erhebung eines jeden Ortes über die Meeresfläche. Steigt man mit dem Barometer auf einen Berg, so drückt eine kürzere Luftsäule als im Thale; die gehobene Quecksilbersäule muß also niedriger sein, d. h. der Barometer muß tiefer stehen als im Thale oder an der Meeresfläche.

Die von dem Luftdruck gehobene Quecksilbersäule im Barometer ist nun:

an der Meeresfläche etwas über				28	Zoll
auf dem Brocken	steht es bei	3650′	Höhe auf	24½	"
" " St. Gotthard	" " "	7600′	" "	21	"
" " Montblank	" " "	14500′	" "	16	"

277. Von den Pumpen. — Der Luftdruck spielt als bewegende Kraft eine Hauptrolle bei den Pumpen. An einer Wasserpumpe sind drei Stücke zu unterscheiden: 1) die cylindrische Röhre, der Pumpenstock oder der Stiefel, 2) der darin bewegliche Kolben mit der Kolbenstange, und 3) die Ventile, die an bestimmten Stellen angebracht sind. Man unterscheidet zwei verschiedene Arten der Wasserpumpen, nämlich Saug- und Druckpumpen.

Unter Ventil überhaupt versteht man eine Vorrichtung, wodurch einer Flüssigkeit der Durchgang vorwärts gestattet, der Rückweg aber verschlossen wird. A sei ein Röhrenstück, auf dessen Mündung eine mit einem Scharnier versehene Klappe b genau paßt, so hat man ein sogenanntes Klappenventil. Eine Flüssigkeit, welche von unten an die Klappe stößt, öffnet dieselbe; ist sie durch die

Ventilöffnung hindurchgedrungen, und hört der Druck von unten auf, so schließt sich die Klappe, und die Flüssigkeit kann nicht mehr zurück. Hat die Röhrenmündung A eine kegelförmige Gestalt, und paßt in diese kegelförmige Höhlung genau ein metallener Kegel c, so hat man das Kegelventil. Stößt eine Flüssigkeit von unten nach oben gegen den Kegel, so geht dieser in die Höhe und die Flüssigkeit kann zwischen seiner Seitenwand und der Höhlung hindurchdringen. Damit er aber nicht ganz aus der Höhlung herausgeworfen werde, so hat er unten einen Stiel, der durch das Loch eines schmalen über die Mitte der Oeffnung sich hin erstreckenden Steges geht, und an seinem Ende einen Knopf, der das Ausweichen des Stieles aus dem Loche verhütet. Setzt man an die Stelle der kegelförmigen Höhlung eine kugelförmige, und an die Stelle des Kegels eine massive Kugel oder Halbkugel, die genau in jene Höhlung hineinpaßt, so hat man das Kugelventil.

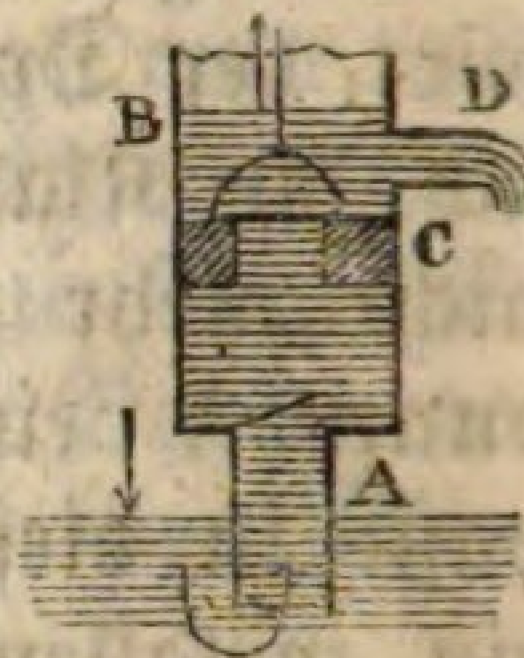




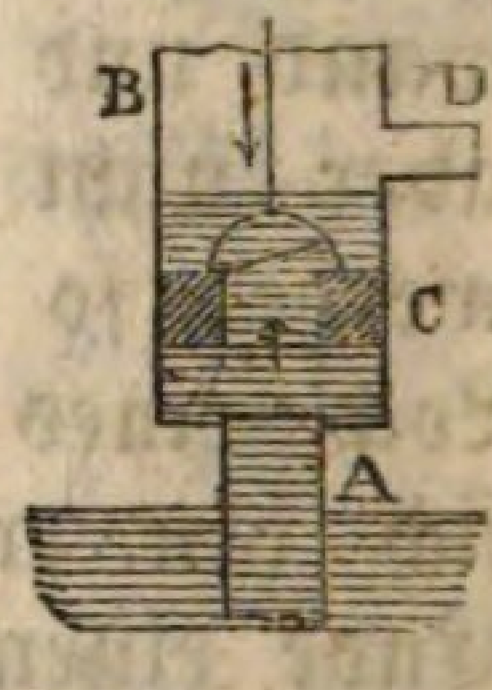
278. Die Saugpumpe. — Die Saugpumpe hat am unteren Theile des Stiefels B eine engere, luftdicht angesetzte Röhre A, welche bis ins Unterwasser reicht und Saugröhre genannt wird. An der Verbindungsstelle beider ist ein Ventil angebracht, das sich von unten nach oben öffnet, und ein ähnliches Ventil befindet sich am Kolben C. Ueber dem Kolben ist das Ausgußrohr D angebracht.

Ist der Kolben am Bodenventil, so sind beide Ventile geschlossen; so wie er sich aufwärts bewegt, müßte zwischen dem Bodenventil und Kolben ein luftleerer Raum entstehen, welcher durch den Druck der

äußeren Luft alsbald mit Wasser angefüllt wird. Es öffnet sich also beim Aufwärtsgehen des Kolbens das Bodenventil und es tritt Wasser unter den Kolben. Das Kolbenventil jedoch ist beim Aufwärtsgehen des Kolbens geschlossen, da die Luft über dem Kolben



(beim zweiten und dem folgenden Hub das gehobene Wasser) dasselbe niederhält. Bewegt sich der Kolben nieder, so sucht das Wasser in die Saugröhre A zurückzudringen, schließt dadurch das Bodenventil bei A, öffnet das Kolbenventil bei C und tritt über den Kolben. Ist der Kolben wieder unten angekommen, so sind wieder beide Ventile geschlossen. Beim zweiten Hub aufwärts wird von Neuem Wasser unter dem Kolben eingesogen, das über demselben befindliche aber allmählig durch weiteres Pumpen gehoben, so daß es durch die Ausgußröhre D abfließt.



Da, wo das Wasser nicht hoch zu heben ist, läßt man das Saugrohr ganz weg, und stellt den Stiefel unmittelbar ins Unterwasser; wo hingegen das Wasser hoch gehoben werden soll, bringt man selbst ober dem Kolben noch eine Ansatzröhre an, die nicht selten 50—100′ lang ist. Eine solche Pumpe heißt dann ein hoher Satz.

Geht der Kolben nicht bis zum Bodenventil, so darf der Raum zwischen dem ganz gehobenen Kolben und dem unteren Wasserstand nicht über 32 Fuß sein, weil höher das Wasser durch den Luftdruck nicht gehoben wird, also auch die Pumpe das Wasser nicht höher heben kann. In diesem Fall muß man dann

mehrere Pumpen über einander stellen, damit die untere der oberen das Wasser zuführe. Derlei Pumpen werden Wiederholungspumpen genannt.

279. Die Menge des bei jedem Kolbenhub an der Saugpumpe gehobenen Wassers ist gleich dem Inhalt eines Wasserprisma's, welches die Kolbenfläche zur Grundfläche und den Kolbenhub zur Höhe hat.

Ist z. B. die Kolbenfläche 12 □″ dd, der Hub 10″ dd, so werden bei jedem Hub $12 \times 10 = 120$ c″ dd Wasser oder $\frac{120}{74} = 1{,}6$ Maß gehoben.

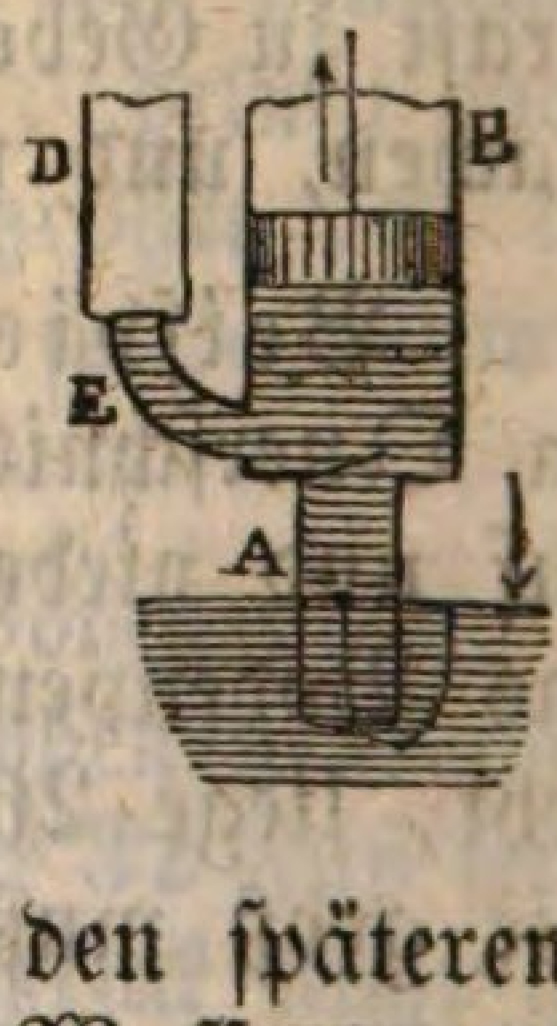
Beim Pumpen muß aber eine Kraft angewendet werden, welche nicht bloß die Last der gehobenen Wassersäule, sondern auch noch die Reibung des Kolbens an den Wänden des Stiefels zu überwinden vermag. Man nimmt an, daß es hinreichend sei, wenn die bewegende Kraft nur $\frac{1}{5}$ größer ist, als diejenige, welche der drückenden Säule das Gleichgewicht hält. Eine viel größere Kraft anzuwenden ist nicht einmal vortheilhaft, weil sonst der Kolben schneller steigt, als ihm das Wasser folgen kann. Steht mehr Kraft zu Gebote, so ist es besser, die Röhren weiter zu machen, und mit einem Hube mehr Wasser zu heben.

Beispiel. Ein Kolben, welcher 8 Quadratzoll im Querschnitt hält, gehe in einer Minute 12mal auf und nieder und hebe sich auf 2′ oder 24″ Höhe; das Bodenventil, bis zu welchem der Kolben niedergeht, liege 26′ oder 312″ unter der Ausgußröhre; wie groß muß die Kraft zum Betriebe dieser Pumpe genommen werden, und wie viel Wasser gibt dieselbe in einer Minute?

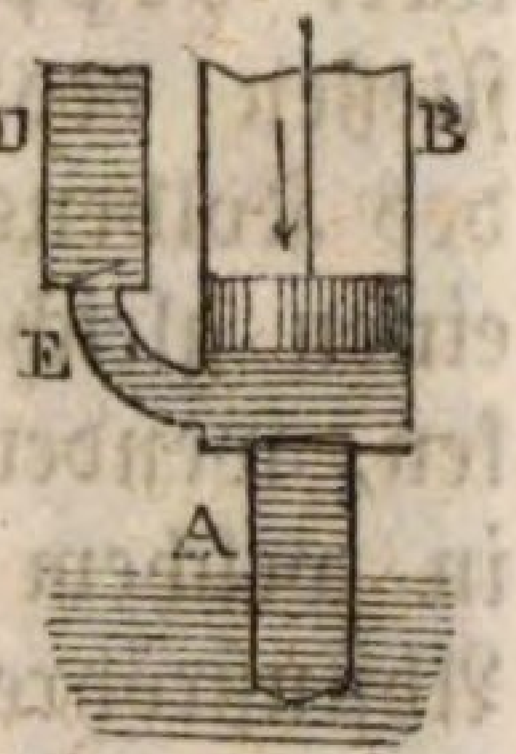
Der Inhalt der nach längerem Pumpen zu hebenden Wassersäule ist 8 × 312 = 2496 c″ = 1,44 c′ und ihr Druck beträgt 1,44 × 44,4 = 63,936 oder 64 Pf.; hievon $\frac{1}{5}$ oder 13 Pf. für die Summe der Widerstände angesetzt gibt eine Kraft von 64 + 13 = 77 Pf. Die Wassermenge, welche die Pumpe in 1 Minute liefert, beträgt 8 × 12 × 24 = 2304 c″, oder da 1 Maß 74 Duodezimal c″ hat, 31 Maß.

Das berechnete Wasserquantum fällt in der Wirklichkeit immer etwas geringer aus, weil durch die Fugen einiges Wasser entweicht. Diesen Verlust bringt man, der Erfahrung gemäß, dadurch hinreichend in Rechnung, daß man für jeden Fuß des Kolbenhubs 1 Zoll weniger, demnach für 1 Fuß Hub nur 11 Zoll, für 2 Fuß Hub nur 1 Fuß 10 Zoll u. s. w. ansetzt.

280. Die Druckpumpe. — Bei der Druckpumpe hat der Kolben kein Ventil, dagegen ist außer dem Bodenventil zwischen dem Saugrohr A und dem Kolben ein solches in der Seitenröhre D, welche das Steigrohr heißt, bei E angebracht. Ist der Kolben am Bodenventil, so sind beide Ventile geschlossen. Geht der Kolben in die Höhe, (Figur 1.) so wird wie bei der Saugpumpe das Bodenventil bei A durch den Druck der Luft auf die äußere Wasserfläche gehoben und das Wasser füllt den unter dem Kolben entstehenden luftverdünnten Raum aus; zu gleicher Zeit ist das Ventil E in dem Steigrohr D, beim



ersten Hub durch den Druck der Luft, bei den späteren durch den Druck des darüber stehenden Wassers geschlossen. Geht der Kolben nieder, (Figur 2.), so



schließt sich das Bodenventil bei A, das von dem Kolben gepreßte Wasser öffnet, da es keinen andern Ausweg hat, das Ventil E in dem Steigrohr D, steigt in diesem in die Höhe, und kann durch fortgesetztes Pumpen, wenn hinreichende Kraft zu Gebote steht, auf eine beliebige Höhe hinaufgedrückt werden.

281. Die Last, welche der Kolben bei einer Druckpumpe zu heben oder vielmehr hinauf zu pressen hat, ist gleich dem Gewicht einer Wassersäule, welche die Kolbenfläche zur Grundfläche und die Höhe der gehobenen Wassersäule, (den Abstand der unteren Kolbenfläche vom Ausflußrohre) zur Höhe hat.

Hat z. B. der Kolben 1 □′ Fläche und ist der Abstand des Ausgußrohres vom Bodenventil 48 Fuß, so hat der Kolben, am Bodenventil angekommen, einen Druck zu überwinden von 48 c′ Wasser oder $48 \times 44{,}4 = 2131{,}2$ Pf. $= 21$ Ztr.

Die bei jedem Hub (auf und abwärts) gehobene Wassermenge ist gleich dem Inhalt eines Wasserprisma's, welches die Kolbenfläche zur Grundfläche und die Hubhöhe desselben zur Höhe hat.

Ist z. B. der Hub im vorigen Beispiel 2 Fuß, so werden bei jedem Niedergang des Kolbens 2 c′ Wasser in das Steigrohr gedrückt, welche am Ausgußrohr zum Ausfluß kommen.

Befinden sich an einem Druckwerk 2 Kolben, von denen der eine gleichzeitig abwärts geht, während der andere gehoben wird, so heißt das Druck-

werk **doppeltwirkend**. Um das stoßweise Ausfließen des Wassers, welches bei jedem Niedergang des Kolbens hervorgebracht würde, zu vermeiden und einen gleichförmigen Ausfluß des Wassers zu bewirken, wendet man den sogenannten **Windkessel** an, in welchem das Wasser vor seinem Eintritt in die Abflußröhre hineingepumpt wird. Die in dem Windkessel durch das eingepumpte Wasser zusammengepreßte Luft treibt alsdann das Wasser in einem ununterbrochenen Strahl durch die Abflußröhre hinaus.

282. Die Feuerspritze ist eine doppelt wirkende, mit einem Windkessel versehene Druckpumpe. Ihre Hauptbestandtheile (Taf. I. Fig. 3) sind: A A der Behälter, in welchen das Wasser gegossen wird, die beiden Stiefel mit den luftdicht schließenden Kolben B und C und der überall luftdicht geschlossene Windkessel D, das Sprungrohr E und der Hebel MN, an dessen Enden die Kraft wirkt, welche die beiden Kolben in Bewegung setzt. Der Wasserkasten A A ist von Holz, mit Blech ausgefüttert und oben mit einem blechernen Sieb verschlossen, um die Unreinigkeiten des Wassers abzuhalten. Die Stiefel, die Kolben und der Windkessel sind von Metall. Am Boden der Stiefel sind die beiden nach aufwärts sich öffnenden Ventile m und p, und seitwärts die in den Windkessel D mündenden Ventile n und q. Wird der Hebel MN in Bewegung gesetzt, und geht der Kolben B in die Höhe, so entsteht unter demselben ein luftverdünnter Raum; die Luft in dem Windkessel drückt auf das Ventil n und schließt dasselbe; der Druck der atmosphärischen Luft über dem Wasser in dem Behälter A aber treibt das Wasser durch das sich nach oben öffnende Ventil m unter den Kolben.

Geht der Kolben B nieder, so steigt der Kolben C und saugt auf gleiche Weise, wie oben am Kolben B erklärt wurde, das Wasser durch das Ventil p in den Stiefel; wird nun durch eine neue Bewegung des Hebels der Kolben C niedergedrückt, so schließt sich das Bodenventil p und das Wasser unter dem Kolben wird durch das Seitenventil q in den Windkessel D gepreßt. Hiebei ist das Seitenventil n des andern Stiefels, weil gleichzeitig der Kolben B in die Höhe geht, geschlossen. Bei fortgesetztem Pumpen steigt allmählig das Wasser in dem Windkessel D und preßt die Luft in demselben in einen immer kleineren Raum zusammen. Vermöge ihrer großen Elastizität sucht die über dem Wasser in dem Windkessel enthaltene und zusammengepreßte Luft sich wieder auf den vorherigen Raum auszudehnen, und drückt auf die Oberfläche des Wassers in dem Windkessel, welches jedoch nicht anders entweichen kann, als durch das Sprungrohr E oder den an der Oeffnung r angeschraubten Schlauch. Wird das Ende des Sprungrohrs oder des Schlauches beim Beginn des Pumpens einige Zeit mit dem Daumen zugehalten, bis die Luft in dem Windkessel gehörig verdichtet ist, und dann der Finger weggezogen, so springt das Wasser in einem ununterbrochenen Strahl mit um so größerer Kraft hervor, je stärker die Luft im Windkessel verdichtet ist, und dieß dauert so lange fort, als durch fortgesetztes Pumpen die Luft im Windkessel in dieser Zusammenpressung erhalten wird.

Wenn der Windkessel auf $\frac{2}{3}$ seines Inhalts mit Wasser gefüllt ist, so nimmt die Luft davon nur noch $\frac{1}{3}$ ein. Die Ausdehnungskraft (Elastizität) der Luft im Windkessel ist dann dreimal so groß, als die der

äußern Luft, die erstere treibt also, weil noch der Gegendruck der atmosphärischen Luft zu überwinden ist, das Wasser mit dem doppelten atmosphärischen Drucke fort, und erhebt es daher auf eine Höhe von 2 × 32 oder 64 Fuß. Sind $\frac{3}{4}$ des Windkessels mit Wasser gefüllt, so ist die Luft in den vierten Theil des Raumes zusammengepreßt, und treibt daher das Wasser mit dem dreifachen atmosphärischen Drucke fort und erhebt es somit bis auf 3 × 32 oder 96 Fuß u. s. w.

283. Pumpwerke für Wasserleitungen. — In großen Städten pflegt das Wasser aus Pumpbrunnen und Röhrenleitungen von Quellen nicht hinzureichen, und man muß daher auf künstlichem Weg laufende Brunnen in den Straßen, Häusern rc. herstellen. Dieß geschieht dadurch, daß man mit einer starken durch Dampf- oder Wasserkraft getriebenen doppelt wirkenden Druckpumpe eine hinreichende Menge Wasser in ein auf einem etwa 100′ hohen Thurm befindlichen Reservoir hinaufpumpt, von wo aus das Wasser lediglich durch seine eigene Schwere in einem Hauptrohr herabsinkt und durch ein vielverzweigtes Röhrennetz in der ganzen Stadt, und wegen der hohen Lage des Reservoirs bis unter die Dächer der Häuser geleitet wird. In Folge des bedeutenden Druckes der Wassersäule bei der angenommenen Höhe von 100 Fußen, läßt sich eine solche Wasserleitung unmittelbar als Feuerspritze anwenden, indem zu diesem Zweck besondere Anstiche (sogenannte Nothpfosten) in der Leitung unter der Straße angebracht sind, an welche nur ein Schlauch angeschraubt zu werden braucht, um einen 60—80′ hoch steigenden Wasserstrahl zu erhalten.

Eine der größten derartigen „Wasserkünste" ist die zu Rothenburgsort bei Hamburg, wo eine von den zwei vorhandenen Dampfmaschinen von 45 Pferdekräften täglich 302400 c′ filtrirtes Elbewasser auf einen 220′ hohen Thurm (zum Theil auf 220′ zum Theil nur auf 110′ Höhe) pumpt, von wo es durch ein 239500′ oder 10 deutsche Meilen langes eisernes Röhrennetz von 20—4 Zoll innerer Weite in alle Theile der Stadt, selbst bis unter die Dächer der höchsten Häuser geleitet wird. 1300 in den Straßen vertheilte Nothpfosten gestatten bei Feuersgefahr an eben so vielen Punkten je zwei 80′ hoch steigende Wasserstrahlen zum Löschen anzuwenden. Für einen laufenden Brunnen, welcher täglich 10 c′ Wasser (232 bayer. Maß) liefert, wird per Jahr 7 Mark banco = 6 fl. 11 kr. bezahlt.

Zwölftes Kapitel.

Von der Festigkeit der Baumaterialien.

284. Erklärungen. — Wenn eine Kraft so auf einen Körper wirkt, daß sie die Theilchen desselben zu trennen sucht, so setzen letztere vermöge ihres innern Zusammenhangs (Cohäsion) dieser Kraft einen Widerstand entgegen, welchen man die Festigkeit des Körpers nennt.

Die Festigkeit eines Baumaterials hängt nicht allein von der Beschaffenheit desselben ab, sondern auch von der Art und Weise, wie die Kraft (die Belastung) auf dasselbe einwirkt, d. i. wie die Theilchen des Körpers von der Belastung angegriffen werden. Es kann nehmlich die Belastung entweder so

20*

auf den Körper einwirken, daß sie die Theilchen desselben zu **zerdrücken** sucht, wie dieß z. B. bei den Bausteinen eines Gebäudes, einer Brücke u. s. w. der Fall ist; oder sie sucht den Körper zu **zerreißen**, wie z. B. eine an einer Hängsäule, an einer Schlauder wirkende Kraft oder wie eine an einem Seil hängende Last; oder endlich es sucht die Belastung den Körper zu **biegen**, in welchem Falle sich z. B. die Balken eines belasteten Gebälkes, einer Brückenfahrbahn u. s. w. befinden. In jedem dieser Fälle setzt **ein und dasselbe** Material der Belastung einen anderen Widerstand entgegen. **Steine** z. B. werden leichter zerrissen oder abgebrochen (gebogen) als zerdrückt; **Hölzer** hingegen leisten mehr Widerstand gegen das Brechen (Einbiegen) und Zerreißen als gegen das Zerdrücken; **Gußeisen** bietet einen größeren Widerstand gegen das Zerdrücken als gegen das Zerreißen und Einbiegen dar, während **Schmiedeisen** wiederum eine größere Festigkeit gegen das Zerreißen als gegen das Zerdrücken besitzt.

Man unterscheidet daher hauptsächlich dreierlei Arten von Festigkeit der Körper:

1) **Die rückwirkende Festigkeit**, oder den **Widerstand**, den ein Körper einer Kraft entgegensetzt, welche denselben in der Richtung seiner Länge zusammenzudrücken oder zu **zerdrücken** sucht;

2) **die absolute Festigkeit** oder den Widerstand, mit welchem ein Körper einer Kraft widersteht, welche denselben in der Richtung seiner Lage zu **zerreißen** strebt;

3) **die relative Festigkeit** oder den Widerstand, welchen ein Körper einer Kraft entgegensetzt,

welche, senkrecht zur Richtung seiner Länge wirkend, ihn einzubiegen oder zu brechen sucht.

Die Hauptresultate der vielfachen Versuche, welche über die Festigkeit verschiedener Baumaterialien angestellt wurden, sind im Folgenden nach Navier's Zusammenstellung und Angaben unter Beisetzung der betreffenden Werthe in bayer. Maß und Gewicht angegeben.

285. Rückwirkende Festigkeit oder Widerstand der Materialien gegen das Zerdrücken. — Die rückwirkende Festigkeit eines Körpers ist proportional der gedrückten Fläche oder dem Querschnitt, d. h. um einen Körper von einer gewissen Oberfläche zu zerdrücken, ist eine um so größere Kraft nöthig, je größer die gedrückte Fläche ist.

Hat z. B. von 2 aus gleichem Material bestehenden Säulen die eine den doppelten Querschnitt von der andern, so ist auch bei demselben Grad von Sicherheit die Tragfähigkeit (rückwirkende Festigkeit) der ersten doppelt so groß als die der zweiten.

Kennt man also die rückwirkende Festigkeit eines Materials für irgend eine Flächeneinheit, z. B. für einen Quadratcentimeter (1 □ Ctm.) oder einen Quadratfuß (1 □'), so findet man die Festigkeit desselben Materials für eine gegebene Fläche, wenn man diese mit der rückwirkenden Festigkeit für die Flächeneinheit (1 □ Ctm. oder 1 □') multiplizirt.

286. Widerstand der Steine gegen das Zerdrücken. — Nach Rondelet's und Rennie's Versuchen werden kleine Würfel von 5

Centimeter Seite oder 25 □ Ctm. Grundfläche der folgenden Steine durch die beigesetzten Gewichte zerdrückt:

Steinarten.	Spez. Gewicht.	Zerdrückendes Gewicht.	
		auf 25 □ Ctm. in Kilogr.	auf 1 □′ bayer. in bayer. Ctrn.
Sandstein, harter	2,50	21700	13200
Granit . . .	2,72	15000	9100
Marmor . . .	2,65	12100	7400
Kalkstein . . .	2,33	4900	3000
Ziegel . . .	—	2460	1500
„ . . .	2,12	1215	740
Mörtel, 1½ J. alt	1,66	1116	680
„ römischer, ca. 1800 J. alt	1,55	1903	1160

Die Versuche mit dem Mörtel wurden 1½ Jahre nach der Bereitung angestellt. 15 Jahre später wiederholt zeigten sie, daß der Widerstand des Mörtels aus Kalk und Sand um $\frac{1}{8}$, der des Cements um $\frac{1}{4}$ zugenommen hatte.

Eine Uebersicht der Belastungen, welche die Bausteine einiger berühmten großen Bauwerke zu tragen haben, gibt nach Rondelet folgende Tabelle:

Bauwerke.	Belastung	
	auf eine Fläche von 25 □ Ctm. in Kilogr.	auf 1 □′ bayer. in bayer. Ctrn.
Pfeiler (der Kuppel) der Peterskirche in Rom . . .	409	249
Pfeiler der Paulskirche in London	484	294
Pfeiler des Invalidenhauses in Paris	369	224
Pfeiler des Pantheons in Paris	736	448
Säulen der Paulskirche in Rom	494	300
Pfeiler des Thurms der Kirche in St. Mery	735	447
Säulen der Allerheiligenkirche in Angers	1107	674

Nach Perronet sind die Pfeiler der Neuilly-Brücke mit 20000 Pfd. per □′ (14112 Pfd. bayer. auf 1 □′ bayer.) oder mit $\frac{1}{12}$ des Gewichts belastet, bei welchem der Stein zerdrückt würde.

Nach Quantin's Versuchen wird ein gut gebrannter Mauerstein noch nicht zerdrückt, wenn er bei einer Grundfläche von 1 □′ 1830 Fuß hoch von gleichem Material aufgebaut wird.

Im Allgemeinen soll man Bausteine der Erfahrung gemäß nur mit dem zehnten Theil des Gewichtes belasten, bei welchem kleine Würfel desselben Materials zerdrückt werden. Für die Praxis ist also nur der zehnte Theil des in der Tabelle angegebenen Zerdrückungsgewichtes für 1 □′ bayer. zu nehmen.

Dieser zehnte Theil des wirklichen Zerdrückungs-Gewichtes heißt die **rückwirkende Festigkeit** des Materials für **die Dauer**; und die Sicherheit, welche die mit dieser Zahl berechneten Construktionen gegen das Zerdrücken darbieten, wird eine zehnfache genannt.

Beispiel. Welche äußerste Belastung kann eine Sandsteinsäule von 4 bayer. □′ Querschnitt auf die Dauer tragen?

Antwort: Die Tabelle gibt für 1 □′ Sandstein ein Zerdrückungsgewicht von 13200 Ctr. Hievon für eine zehnfache Sicherheit der zehnte Theil gibt 1320 Centner. Die Säule hat daher bei 4 □′ Querschnitt eine Tragkraft von 4 × 1320 = 5280 Ctr.

287. Widerstand der Hölzer gegen das Zerdrücken. — Nach **Rondelet's** Versuchen wurden kleine Würfel der nachstehenden zwei Holzarten durch die beigesetzten Gewichte zerdrückt:

Holzarten.	Zerdrückendes Gewicht.	
	auf den □ Ctm. in Kilogr.	auf 1 □′ bayer. in bayer. Ctrn.
Eichenholz	385	5856
"	463	7043
Tannenholz	463	7043
"	538	8183

Nach **Rennie's** Versuchen wurden kleine Würfel der nachstehenden Holzarten von 1 engl. c″ Größe durch die beigesetzten Gewichte zerdrückt:

Holzarten.	Zerdrückendes Gewicht.	
	auf den □ Ctm. in Kilogr.	auf 1 □' bayer. in bayer. Ctrn.
Eichenholz	3860	4126
Tannenholz	1928	2061
Fichtenholz	1606	1717

Für eine dauernde Belastung darf man die Hölzer nur mit dem zehnten Theil des Gewichts belasten, durch welches sie zerdrückt werden.

Freistehende Hölzer, welche dem Zerdrücken ausgesetzt sind und eine große Last zu tragen haben, sollen, damit sie sich nicht einschlagen, nicht über das Zehnfache der Dicke zur Länge haben.

Ist die Länge freistehender Hölzer größer als zehnfache der Dicke, so ist die Tragfähigkeit derselben bedeutend geringer. (Vergl. 289.)

Grundpfähle von 0,8' bis 1,0' Durchmesser sollen nach Peronnet höchstens mit einem Gewicht von 450 bis 890 Centner belastet werden.

288. Widerstand des Eisens gegen das Zerdrücken. — Ein Würfel von 1 c" Schmiedeisen wird nach Rondelet zerdrückt durch ein Gewicht von 4945 Kilogramm auf den □ Centimeter (752 Centner auf den bayer. □" dec.). Ist die Höhe das Dreifache der Dicke, so wird der Körper eher eingebogen als zerdrückt.

Gußeisen leistet gegen das Zerdrücken einen viel größeren Widerstand als Schmiedeisen. Aus diesem Grunde werden Säulen, Bogenrippen und alle

Theile einer Eisenconstruktion, welche dem Zerdrücken ausgesetzt sind, am besten aus Gußeisen hergestellt.

Nach Reynold's Versuchen wird ein Würfel von $\frac{1}{4}$ engl. Zoll Seite von grauem weichem Gußeisen zerdrückt bei einem Gewicht von 8960 engl. Pfund (1532 Centnern per □″ dec. bayer.).

Nach Rennie werden kleine Würfel von $\frac{1}{4}$ engl. Zoll Seite der folgenden Metalle von den beigesetzten Gewichten zerdrückt.

Metalle.	Zerdrückendes Gewicht.	
	Pfund engl. auf $\frac{1}{16}$ □″ engl.	Ctnr. bayer. auf 1 □″ dec. bayer.
Gußeisen, spez. Gewicht 7,09 . .	10341	1769
Kupfer, gegossen . .	7318	1251
Blei, „ . .	483	83

Im Mittel kann man für das Gußeisen 10000 Kilogr. auf 1 □Ctm. (1520 Ctr. auf 1 □″ dec. bayer.) als zerdrückendes Gewicht annehmen und hievon den vierten Theil (380 Ctr. auf 1 □″) als die äußerste auf die Dauer zulässige Belastung, wobei jedoch die Länge der Gußeisenstücke das vierfache der Dicke nicht überschreiten darf.

Die solchergestalt berechneten Construktionen bieten alsdann eine vierfache Sicherheit gegen den Bruch dar.

289. Widerstand langer freistehender prismatischer Stäbe von Holz oder Eisen gegen das Zerdrücken. — Aus den angeführten Versuchen folgt, daß man die Widerstandsfähigkeit

eines prismatischen Stabes, dessen Länge nur das Ein- oder Zweifache seiner Dicke beträgt, im Mittel annehmen kann für

		Kilogr. per □ Centim.		Centner per □″ bayer.
Eichen- und Tannenholz	zu	300	=	46
Schmiedeisen	„	4000	=	608
Gußeisen	„	10000	=	1520

von welchen Zahlen für den Fall der Anwendung bei Holz der zehnte Theil, bei Eisen der vierte Theil zu nehmen ist.

Diese Zerdrückungsgewichte sind aus Versuchen mit kleinen Würfeln abgeleitet. Die Tragfähigkeit eines prismatischen freistehenden Stabes aber, dessen Länge die Dicke um Vieles übertrifft, ist wegen der Möglichkeit des Einbiegens, in Folge dessen ein Bruch entstehen kann, viel geringer.

Versuche hierüber haben zu Folgendem geführt:

Bei freistehenden Hölzern ist der Widerstand gegen das Zerdrücken nur $\frac{5}{6}$ von dem angegebenen Zerdrückungsgewicht, wenn die Länge das 12fache der Dicke und nur die Hälfte desselben Gewichts, wenn die Länge das 24fache der Dicke beträgt.

Bei freistehenden Stäben von Schmiedeisen ist der Widerstand gegen das Zerdrücken nur $\frac{5}{8}$ des angegebenen Zerdrückungsgewichts, wenn der Stab 12mal so lang als dick, und nur die Hälfte, wenn derselbe 24mal so lang als dick ist.

Bei freistehenden Stäben (Säulen) von Gußeisen ist der Widerstand gegen das Zerdrücken nur $\frac{2}{3}$ des angegebenen Zerdrückungsgewichtes, wenn die Länge das 4fache der Dicke; nur die Hälfte, wenn

die Länge das 8fache der Dicke; und nur $\frac{1}{15}$, wenn die Länge das 36fache der Dicke des Stabes beträgt.

Beispiele. 1. Welche äußerste Belastung vermag eine eichene Säule von 1 □′ Querschnitt und 12′ Länge auf die Dauer zu tragen?

Antwort: Nach den angegebenen mittleren Zerdrückungsgewichten beträgt der Widerstand des Eichenholzes gegen Zerdrücken 46 Ctr. auf 1 □″ dec. bayer., sohin auf den □′ (= 100 □″) 4600 Ctr. Hievon für die Dauer und 10fache Sicherheit der zehnte Theil, gibt 460 Ctr. Da nun die Länge der Säule das 12fache der Dicke ist, so ist hievon noch $\frac{5}{6}$ zu nehmen; es ist sonach die Tragfähigkeit $= \frac{5}{6} \times 460 = 383$ Ctr. Wäre die Säule 24′ hoch, so hätte man die Tragfähigkeit $= \frac{1}{2} \times 460 = 230$ Ctr. Für eine Höhe von 18 Fuß wäre die Tragfähigkeit das arithmetische Mittel von beiden Resultaten oder $= \frac{4}{6} \times 460 = 306$ Ctr.

2. Beispiel. Welches ist die Tragfähigkeit einer hohlen gußeisernen Säule von 5″ dec. äußerem und 4″ dec. innerem Durchmesser und 12′ Höhe?

Antwort: Der Querschnitt der Säule ist

$$= \frac{(5^2 - 4^2) \times 3{,}14}{4} = \frac{(25 - 16) \times 3{,}14}{4} = \frac{9 \times 3{,}14}{4} =$$
$$= 7{,}06 \text{ □}''.$$

Das Zerdrückungsgewicht des Gußeisens ist 1520 Centner auf 1 □″ dec. Hievon für die Dauer und vierfache Sicherheit $\frac{1}{4}$ gibt 380 Ctr.; und weil die Länge der Säule das 24fache der Dicke oder nahezu das Mittel zwischen dem 8fachen und 36fachen beträgt, so ist hievon noch ein Mittel zwischen der Hälfte und $\frac{1}{15}$ oder ungefähr $\frac{1}{8}$ zu nehmen, das ist $\frac{1}{8} \times$

380 = 47 Ctr. Die Tragfähigkeit der gußeisernen Säule ist also

$$= 7{,}06 \times 47 = 332 \text{ Ctr.}$$

290. Absolute Festigkeit oder Widerstand der Materialien gegen das Zerreißen. — Die absolute Festigkeit eines Körpers ist gleichfalls proportional dem Querschnitte desselben; d. h. hat von 2 Körpern von gleichem Material der eine den 3fachen Querschnitt des andern, so kann der erste bei derselben Sicherheit gegen das Zerreißen auch eine 3mal größere Last tragen als der zweite.

Kennt man also den Widerstand eines Materials gegen das Zerreißen für die Flächeneinheit, z. B. für 1 □″, so kann man hieraus die Tragfähigkeit dieses Materials für einen beliebigen Querschnitt durch Rechnung finden.

291. Widerstand der Hölzer gegen das Zerreißen. — Nach Rondelet beträgt die Cohäsion des Eichenholzes für 1 □ Ctm. Querschnitt 981 Kilogr. (150 Ctr. auf 1 □″ dec. bayer.). Bei einem Gewicht von 150 Ctr. wird also ein Stab von Eichenholz von 1 □″ Querschnitt zerrissen.

Nach den Versuchen von Barlow zerreißt ein Stab von 1 □″ Querschnitt (engl.) bei den folgenden Gewichten:

Eichenholz 10389 Pfd. engl. = 111 Ctr. per □″ dec. b.
Tannenholz 12203 „ „ = 130 „ „ „ „

Nach Minard und Desormes zerreißt das Eichenholz bei einem Gewicht von 600—700 Kilogr. per □ Centim. (91—106 Ctr. per □″ dec. bayer.)

Im Mittel kann man die Zerreißungskraft der Hölzer zu 800 Kilogr. per □Centim. (122 Ctr. per □″ dec. bayer. oder genauer 12160 Ctr. per □′ bayer.) annehmen. Für die Praxis ist hievon der 10te Theil (1216 Ctr. auf den □′ bayer.) als die äußerste auf die Dauer zulässige Belastung anzuwenden.

Vergleicht man hiemit das mittlere Resultat des Zerdrückungsgewichtes der Hölzer, welches (nach 289) für 1 □′ Querschnitt 608 Ctr. beträgt, so sieht man, daß dieses nur halb so groß ist, als jenes, woraus für die Praxis der Satz folgt, daß ein Holz bei einer angehängten Last (Hängsäule) noch einmal so viel trägt, als wenn die Last auf demselben ruht (Stuhlsäule).

292. Widerstand der Metalle gegen das Zerreißen. —

Schmiedeisen. — Nach vielfachen Versuchen von Perronet, Rondelet, Minard und Desormes, Telford, Emil Martin u. A. beträgt die Zerreißungskraft des Schmiedeisens 40 Kilogramm per □Millimeter oder 4000 Kilogramm per □Centimeter (60844 Pfd. oder 608 Ctr. per □″ dec. bayer.). Eine schmiedeiserne Stange von 1 bayer. □″ dec. Querschnitt wird also bei einer angehängten Last von 608 Ctr. zerrissen.

Nach Navier's Versuchen ist die Zerreißungskraft des Eisenblechs die nämliche.

Die absolute Festigkeit des Eisendrahts ist um ein Bedeutendes größer. Nach den Versuchen von Buffon, Seguin, Dufour und Lamé beträgt die Zerreißungskraft des Eisendrahts 40 bis 88,

im Mittel 64 Kilogr. per □Millimeter (97351 Pfd. oder 974 Ctr. auf 1 □″ dec. bayer.)

Der 3 Millimeter dicke Draht Nro. 18, aus welchem die Drahtseile der großartigen Freiburger Drahtbrücke hergestellt wurden, zerriß bei einem Gewicht von 72 Kilogramm per □Millimeter.

Ausgeglühter Draht trägt nach Dufour nur die Hälfte dieses Gewichts.

Der Widerstand des Eisens gegen das Zerreißen wächst mit dem Grad der Bearbeitung seiner Oberfläche durch Hämmern oder Walzen, weßhalb auch der Draht und unter diesem wieder der feinere, verhältnißmäßig die größte absolute Festigkeit besitzt.

Gußeisen. — Der Widerstand des Gußeisens gegen das Zerreißen beträgt nach den Versuchen von Minard und Desormes, Brown und Rennie 12,8 Kilogr. per □Millimeter (19470 Pfd. oder 195 Ctr. per □″ dec. bayer.)

Die absoluten Festigkeiten der übrigen Metalle sind nach den Versuchen von Minard und Desormes, Dufour und Rennie die folgenden:

	Kilogr. per □Millim.		Zentner per □″ dec. bayer.
Kupferdraht, ungeglüht	54	=	821
Messingdraht "	64	=	974
Kupfer, gewalzt	21	=	319
Blei "	1,4	=	21

Für die Anwendung in der Praxis ist von den angegebenen Zerreißungsgewichten der Metalle für dauernde Belastung höchstens der 5te Theil anzunehmen.

Die äußerste Belastung des **Schmiedeisens** für die Dauer beträgt also hienach auf den bayer. □″ dec. $\frac{1}{5} \times 60844$ Pfd. = 12168 Pfd. oder 122 Ctr.

293. **Widerstand der Hanfseile gegen das Zerreißen.** — Versuche (von **Duhamel**, **Coulomb** und **Noirfontaine**) haben gelehrt, daß **getheerte** Seile nur $\frac{2}{3}$ oder $\frac{3}{4}$ der Tragfähigkeit der **ungetheerten** Hanfseile besitzen; letztere tragen durchschnittlich 6 Kilogramm per □Millimeter (9126 Pfund oder 91 Ctr. per □″ dec. bayer.).

In der Praxis soll man Hanfseile höchstens mit der Hälfte dieses Gewichts (45 Ctr. per □″ Querschnitt) belasten.

Beispiele. 1. Der Horizontalschub der Sparren eines Dachstuhls (vergl. 162) betrage 400 Ctr., welchen Querschnitt muß der horizontale Balken (Tram) besitzen, damit er diesen Schub auf die Dauer aushalten kann?

Antwort: Das Zerreißungsgewicht der Hölzer beträgt (nach 291) für 1 □′ Querschnitt 12160 Ctr., hievon für die Dauer der 10te Theil gibt 1216 Ctr. Der Querschnitt des Balkens ist daher

$$= \frac{400}{1216} = 0{,}329 \;\square' \text{ oder fast } 33 \;\square''.$$

Der Balken muß daher ohngefähr 6 auf 6 oder 7 auf 5 dec. Zoll Stärke besitzen.

2. **Beispiel.** Wenn in dem vorigen Beispiel der Balken durch eine schmiedeiserne Stange ersetzt werden soll, wie stark wird dieselbe sein müssen?

Antwort: Die äußerste Belastung für ein □″ Schmiedeisen beträgt (nach 292) bei 5facher Sicherheit

gegen das Zerreißen 122 Ctr.; sohin ist der Querschnitt der Eisenstange

$$= \frac{400}{122} = 3{,}28 \;\square'' \text{ dec.}$$

Ist der Querschnitt der Stange ein Quadrat, so wird also die Seite desselben $= \sqrt{3{,}28} = 1{,}8$ dec. Zoll.

3. Beispiel. Welche Last kann ein ungetheertes Hanfseil von 1 Zoll dd. Stärke auf die Dauer tragen?

Antwort: Es ist 1″ dd = 0,833″ dec. Also der Querschnitt des Seils $= \frac{3{,}14 \times 0{,}833^2}{4} = 0{,}545$ □″ dec. Da nun 1 □″ dec. 45 Ctr. trägt, so ist die Tragkraft des Seils

$$= 0{,}545 \times 45 = 24{,}5 \text{ Ctr.}$$

294. Relative Festigkeit, oder Widerstand der Materialien gegen das Einbiegen und den Bruch. —

Die relative Festigkeit eines Körpers, welche durch eine senkrecht zur Längenrichtung desselben wirkende Kraft hervorgerufen wird, hängt nicht allein von dem Material und der Größe des Querschnitts, sondern auch von der Form des Querschnitts und der Länge des Körpers ab.

Wenn man einen an beiden Enden frei aufliegenden prismatischen Balken in der Mitte mit einem Gewicht so lange belastet, bis er sich einbiegt, so werden offenbar die untern Fasern des Balkens ausgedehnt, und die oberen zusam-



mengepreßt. Diese Ausdehnung (Expansion) der unteren Faserschichten des Materials und die Zusammendrückung (Compression) der obern nimmt gegen die Mitte des Querschnitts des Balkens ab, und es muß also in der Mitte des Balkens (die punktirte Mittellinie des Balkens in der Figur) eine Faserschichte geben, welche bei der Biegung des Balkens weder ausgedehnt noch zusammengepreßt wird, und welche man daher die neutrale Schichte (neutrale Axe) nennt. War das aufgelegte Gewicht nicht so groß, daß durch die hervorgebrachte Zusammendrückung der obern und Ausdehnung der untern Fasern eine bleibende Veränderung in dem Balken hervorgebracht wurde, so nimmt der Balken nach Hinwegnahme des Gewichts seine ursprüngliche Gestalt wieder an. Man sagt dann, die Elastizitätsgrenze des Materials sei nicht überschritten. Innerhalb dieser Grenzen ist auch die Durchbiegung des Balkens proportional dem aufgelegten Gewicht, d. h. ein doppelt so großes Gewicht bringt auch eine doppelt so große Einbiegung hervor. Ist das aufgelegte Gewicht aber so groß, daß entweder die oberste Faserschichte des Balkens zerdrückt, oder die unterste zerrissen wird, so erfolgt der Bruch des Balkens. Dieser findet in der Mitte zwischen den beiden Unterstützungspunkten statt, weil hier die Ausdehnung und Zusammendrückung der Fasern am größten wird. Bevor dieß eintritt, rückt jedoch die neutrale Faserschichte der oberen oder unteren Kante des Balkens näher, je nachdem der Widerstand des Materials gegen Ausdehnung oder Zusammendrückung größer ist.

Bei Hölzern z. B. ist nach dem früheren der Widerstand gegen das Zerreißen größer als der gegen

das Zerdrücken; im Augenblick des Bruchs eines hölzernen Balkens liegt daher die neutrale Faserschicht näher der oberen Kante, und zwar, wie Barlow beobachtete, gewöhnlich bei $\frac{5}{8}$ der Höhe von unten gerechnet. Beim Bruch eines hölzernen Balkens werden daher $\frac{5}{8}$ der Fasern zerrissen und $\frac{3}{8}$ zerdrückt.

295. Berechnung der relativen Festigkeit. — Zur Berechnung der relativen Festigkeit eines prismatischen Balkens, dessen Querschnitt ein Rechteck ist, dienen nun folgende Sätze der angewandten Mechanik, deren Richtigkeit durch vielfach angestellte Versuche bestätigt wird:

Die relativen Festigkeiten prismatischer Balken von rechteckigem Querschnitt und gleichem Material verhalten sich direkt wie ihre Breiten, wie die Quadrate ihrer Höhen und umgekehrt wie ihre Längen.

Das heißt: Macht man einen Balken 2, 3, 4mal so breit, so trägt er das 2, 3, 4fache; macht man ihn 2, 3, 4mal so hoch, so trägt er das 4, 9, 16fache; macht man ihn aber 2, 3, 4mal so lang, so trägt er nur $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ der ursprünglichen Belastung.

Aus diesem Grund soll man Balken von rechteckigem Querschnitt zur Verstärkung ihres Tragvermögens immer auf die schmale Seite (hohe Kante) legen. Hat z. ein Balken 4 auf 8 Zoll Stärke, so trägt er, auf die schmale Seite gestellt, gerade viermal so viel, als wenn er mit der breiten Seite aufliegt, weil im ersten Fall seine Höhe doppelt so groß ist, als im zweiten Fall.

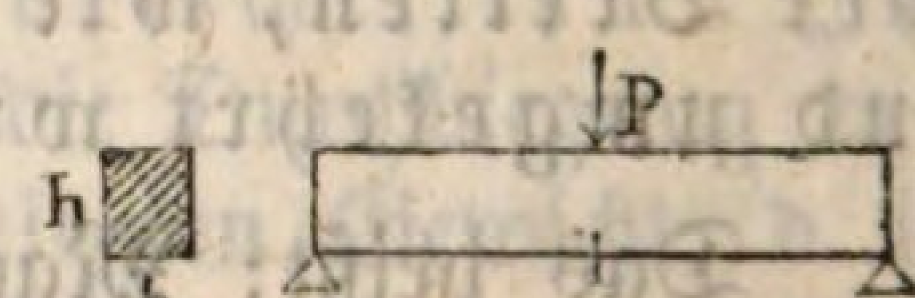
Die Einbiegungen prismatischer Balken in der Mitte verhalten sich direkt wie die

Belastungen und umgekehrt wie die Würfel der Längen.

Das heißt: Belastet man einen Balken mit dem 2, 3, 4fachen Gewicht, so werden die entsprechenden Einbiegungen 2, 3, 4mal so groß; macht man aber bei derselben Belastung den Balken 2, 3, 4mal so lang, so werden die Einbiegungen in gleicher Ordnung 8, 27, 64mal so groß.

Hat man die Tragfähigkeit eines Balkens durch einen Versuch gefunden, so kann man mit Hilfe des erstgenannten Satzes die Tragfähigkeit eines andern Balkens von demselben Material durch Rechnung finden.

Bezeichnet man die Breite eines Balkens mit b, die Höhe desselben mit h, seine Länge zwischen den beiden Unterstützungspunkten mit l, und das Gewicht, welches einen Balken, dessen Querschnitt die Flächeneinheit (z. B. 1 □′) ist, abbricht,



mit R (Bruch- oder Rupturmodel), so findet man das in der Mitte angehängte Gewicht P, welches den Bruch des Balkens herbeiführt nach der Formel

$$P = \tfrac{2}{3} \times R \times \frac{b \times h^2}{l}.$$

In Worten: Die Tragfähigkeit eines Balkens wird gefunden, wenn man das Produkt aus der Breite und dem Quadrat der Höhe mit der Länge dividirt mit dem Bruchmodul multiplicirt und von dem Resultat $\frac{2}{3}$ nimmt.

Beispiel. Welche Belastung kann ein fichtener Balken von 0,8″ Breite, 1,2″ Höhe und 20′ Länge

in der Mitte tragen, bis er bricht, wenn der Bruchmodul des Fichtenholzes 9000 Ctr. per □′ beträgt?

Antwort: Hier ist b = 0,8′; h = 1,2; l = 20′; R = 9000 Ctr., also

$$P = \frac{2}{3} \times 9000 \times \frac{0,8 \times 1,2^2}{20}$$
$$= 6000 \times \frac{0,8 \times 144}{20} = 300 \times 1,152$$
$$= 345,6 \text{ Ctr.}$$

Nimmt man, wie gewöhnlich, hievon den zehnten Theil als für die Dauer zulässig an, so trägt der Balken mit Sicherheit 34,56 Ctr. in der Mitte, wobei jedoch auf dessen Eigengewicht keine Rücksicht genommen ist.

296. Widerstand verschiedener Materialien gegen den Bruch. — Die Größe des Bruch- oder Rupturmoduls R für verschiedene Baumaterialien ist durch vielfache Versuche ermittelt worden. Folgende Tabelle gibt eine Uebersicht derselben mit Angabe des Autors und Reduktion des Werthes für R auf den bayer. □′ und bayer. Centner.

Materialien.	Größe des Bruchmoduls R		Name des Autors.
	engl. Pfd. auf 1 □″ engl.	bayer. Ctr. auf den □′ bayer.	
Marmor, weißer, spez. Gew. 2,706	2100	2250	Tredgold
Sandstein . .	750	800	Tredgold
Ziegelstein . .	225	240	Barlow

Materialien.	Größe des Bruchmoduls R		Name des Autors.
	Kilogr. per □ Ctm.	bayer. Ctr. auf den □′ bayer.	
Eichenholz . .	586	8914	Buffon
" . .	592	9065	
" . .	644	9796	Barlow
Tannenholz . .	710	10800	Tredgold
" . .	511	7772	Barlow
Gußeisen . . .	3181	48386	Banks
" . . .	2810	42742	Gauthey
" . . .	2942	44750	Rondelet
" . . .	3174	48276	Tredgold.
Schmiedeisen .	2400	36500	

Nimmt man aus diesen Versuchen das Mittel, so erhält man für

			Kilogr. auf 1 □ Ctm.		Centner auf 1 □′ bayer.
Eichen- und Tannenholz	R	=	600	=	9126
Gußeisen	"	=	3200	=	45630
Schmiedeisen	"	=	2400	=	36500

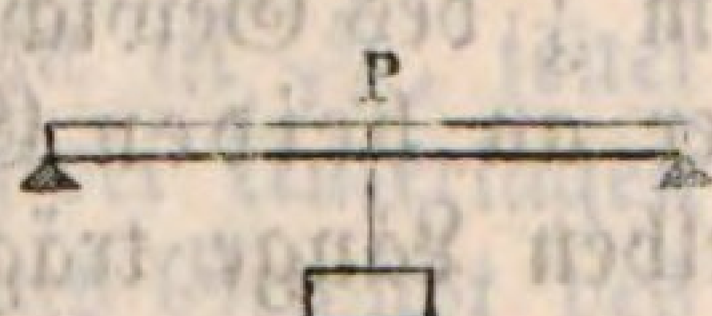
Von allen diesen Zahlen ist jedoch für eine dauernde Belastung nur ein gewisser Bruchtheil anwendbar. Bei Holz und Stein nimmt man den zehnten Theil, bei Eisen den vierten Theil des angegebenen Bruchmoduls.

Bezeichnet man diesen Bruchmodul für die Dauer mit R′, so erhält man für die Berechnung des relativen Tragvermögens der hauptsächlich vorkommenden Baumaterialien folgende Werthe von R′:

Materialien.	Größe des Bruchmoduls R′ auf die Dauer.	
	engl. Pfd. auf 1 □″ engl.	Centner auf 1 □′ bayer.
Marmor	210	225
Sandstein	75	80
Ziegel	22,5	24
	Kilogr. auf 1 □ Ctm.	
Eichen- und Tannenholz } . . .	60	900
Schmiedeisen	600	9000
Gußeisen	800	12000

Wird die Stärke eines Balkens durch Anwendung dieses Bruchmoduls für die Dauer berechnet, so gewährt derselbe, wenn er von Holz oder Stein ist, die zehnfache, und wenn er von Eisen ist, die vierfache Sicherheit gegen Bruch.

297. Relatives Tragvermögen prismatischer Balken bei verschiedenen Arten der Unterstützung und Belastung. — Um in allen vorkommenden Fällen von den angegebenen Zahlen den richtigen Gebrauch machen zu können, müssen noch folgende für die Praxis wichtige Sätze der angewandten Mechanik über belastete prismatische Balken vorausgeschickt werden:

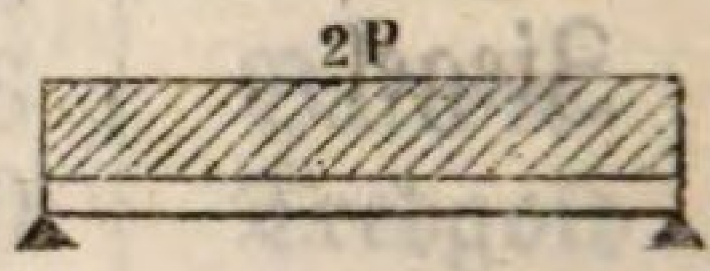


1) Liegt ein Balken von einer gewissen Stärke und Länge mit seinen beiden Enden frei auf 2 Unterstützungspunkten, so trägt er nach

dem Vorhergehenden in seiner Mitte irgend ein Gewicht, welches mit P bezeichnet werden soll.

Wird die Belastung desselben frei aufliegenden Balkens statt in der Mitte angebracht, auf seine ganze Länge gleichförmig vertheilt, so trägt er die doppelte Last oder 2 P.

Die Einbiegung in der Mitte ist dabei nur $\frac{5}{8}$ derjenigen, welche dieselbe Last, in der Mitte angebracht, hervorbringt.

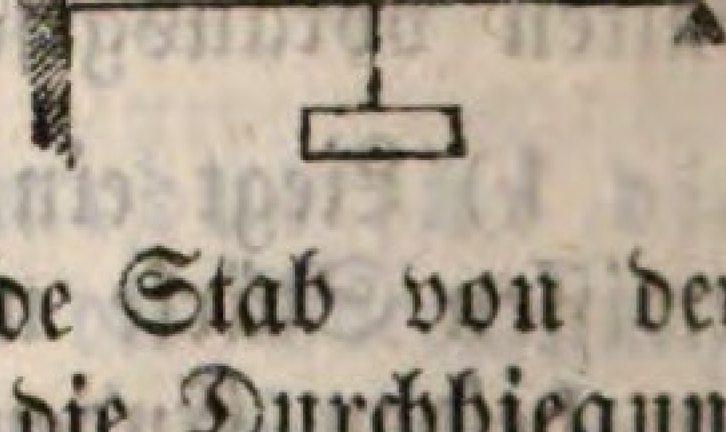


Trägt z. B. ein Balken in der Mitte eine Last von 100 Ctr., so trägt er mit derselben Sicherheit auch eine gleichvertheilte Last von 200 Ctr.

Um also eine gleichförmig vertheilte Last in Rechnung zu bringen, denkt man sich die Hälfte derselben in der Mitte des Balkens angebracht.

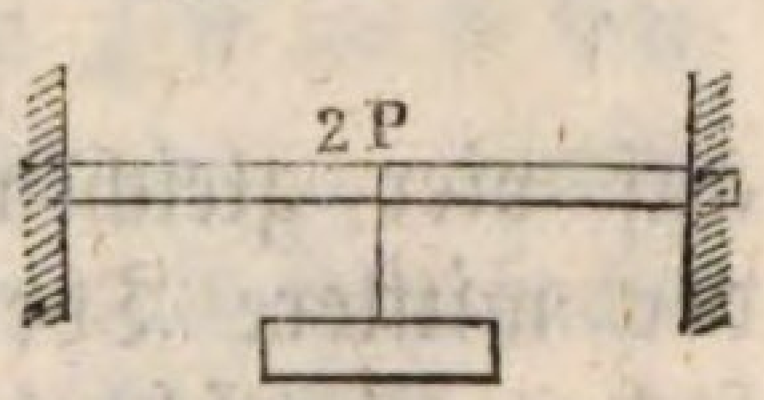
Das Eigengewicht eines Balkens ist eine solche gleichvertheilte Last. Das Eigengewicht eines Balkens wird daher dadurch in Rechnung genommen, daß man sich die Hälfte desselben in der Mitte des Balkens wirkend denkt. Man muß also bei Berechnung des Tragvermögens eines Balkens immer die Hälfte seines Eigengewichts von letzterem in Abzug bringen.

3) Ist ein Balken an einem Ende frei aufgelegt, am andern aber horizontal festgehalten (eingeklemmt oder eingemauert), so trägt derselbe um $\frac{1}{3}$ des Gewichtes mehr, welches der an beiden Enden frei aufliegende Stab von derselben Länge trägt, oder $\frac{4}{3}$ P; und die Durchbiegung bei derselben Belastung ist an der tiefsten Stelle,

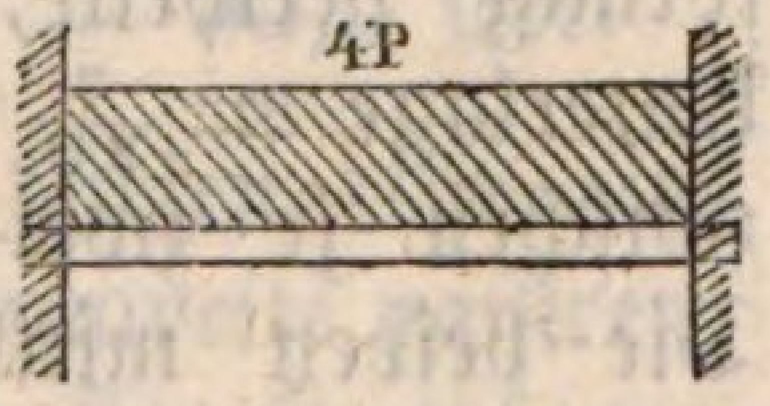


welche etwas außerhalb der Mitte gegen die Unterstützung zu liegt, nur 0,44 von der im ersten Falle. Der Druck auf diese Unterstützung ist nur $\frac{5}{16}$ des in der Mitte des Balkens angebrachten Gewichts.

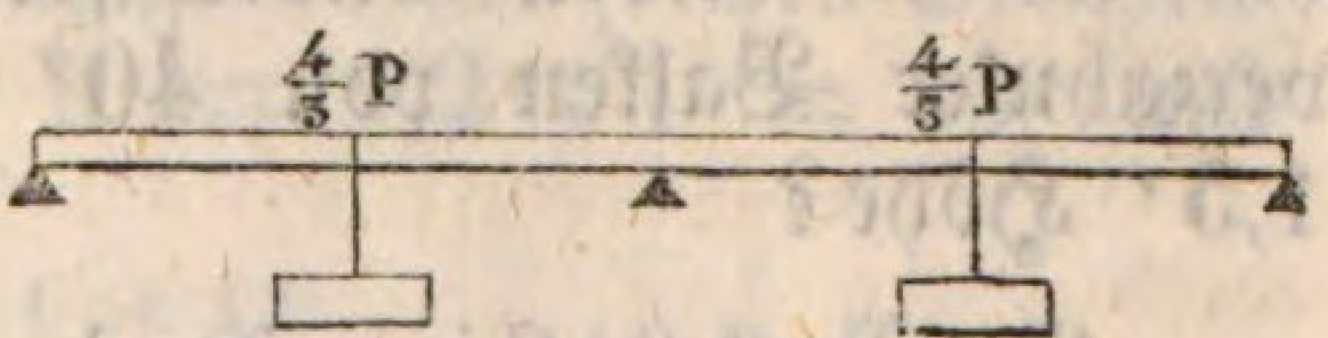
4) Ist derselbe Balken an beiden Enden horizontal festgehalten oder eingemauert, so trägt er, in der Mitte belastet, das doppelte Gewicht, oder 2P, und die Einbiegung in der Mitte ist nur der vierte Theil derjenigen, welche der frei aufliegende durch dasselbe Gewicht erleidet.



Gleichförmig belastet trägt der an beiden Enden horizontal eingeklemmte Balken wieder das doppelte des vorigen Gewichts, also 4P oder viermal so viel der an beiden Enden frei aufliegende, in der Mitte belastete Balken von derselben Länge.

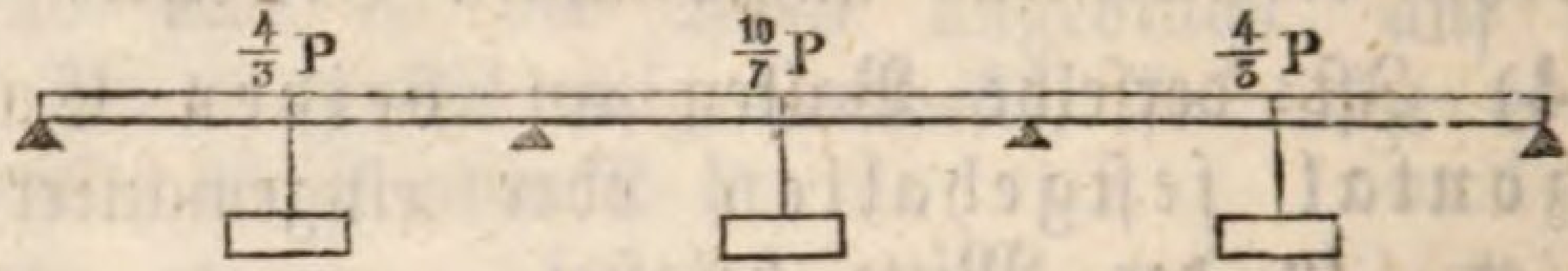


5) Liegt ein Balken von der doppelten Länge auf drei gleich weit entfernten Unterlagen, so ist jede Hälfte in demselben Fall, wie wenn der Balken von der einfachen Länge an dem einen Ende horizontal eingeklemmt und am andern frei aufgelegt wäre; er trägt also auf jeder Seite $\frac{4}{3}$ des einfachen Gewichts P und die Einbiegungen sind 0,44 derjenigen im ersten Falle. Der Druck auf jede der beiden äußeren Unterstützungen ist $\frac{5}{16}$, jener auf die mittlere $\frac{22}{16}$ des zwischen je zwei Unterlagen angehängten Gewichts, wobei jedoch das Gewicht des Balkens selbst außer Rücksicht gelassen ist. Der Druck



auf die mittlere Unterlage ist also nahezu $\frac{2}{3}$ der ganzen Belastung.

6) Liegt ein Balken von der dreifachen Länge



auf vier gleich weit entfernten Unterlagen, so trägt der mittlere Theil $\frac{10}{7}$, jeder der äußeren $\frac{4}{3}$ des einfachen Gewichtes P, welches der an beiden Enden frei aufliegende Balken von der einfachen Länge in seiner Mitte trägt. Sind die Belastungen in der Mitte zwischen je zwei Unterlagen gleich, oder ist die Belastung des Balkens auf seine ganze Länge gleichförmig vertheilt, so ist der Druck auf jede äußere Unterlage $= \frac{7}{20}$ und der auf jede innere $= \frac{23}{20}$ des zwischen je zwei Unterlagen angehängten Gewichts. Die beiden mittleren Unterlagen tragen also nahezu $\frac{3}{4}$ der ganzen Belastung.

298. Beispiele. 1) Welche Tragfähigkeit hat ein an beiden Enden frei aufliegender, fichtener, verzahnter Balken von **40′** Länge, **1′** Breite und **1,5′** Höhe?

Antwort: Hier ist b = **1,0′**; h = **1,5′**; l = **40′** und R′ für Hölzer = **900** Ctr. per □′ bayer. Daher, weil (nach 295) die Belastung P in der Mitte des Balkens nach der Formel

$$P = \frac{2}{3} \times R' \times \frac{b \times h^2}{l}$$

gefunden wird, in diesem Falle:

$$P = \frac{2}{3} \times 900 \times \frac{1 \times 1{,}5^2}{40} = 15 \times 2{,}25$$
$$= 33{,}75 \text{ Ctr.}$$

Hievon muß aber (nach 297) die Hälfte des Eigengewichts, welches mit w bezeichnet werden soll, in Abzug kommen.

Nun ist der Kubikinhalt des Balkens $= 1 \times 1{,}5 \times 40 = 60$ c′, daher sein Eigengewicht, den Kubikfuß Holz zu 20 Pfd. gerechnet, $w = 60 \times 20 = 1200$ Pfd. oder 12 Ctr., also $\frac{1}{2} w = 6$ Ctr.

Die in der Mitte angebrachte Belastung, welche der verzahnte Balken auf die Dauer mit zehnfacher Sicherheit gegen Bruch tragen kann, ist daher

$$P - \frac{1}{2} w = 33{,}75 - 6 = 27{,}75 \text{ Ctr.}$$

Wird die Belastung auf dem Balken gleichförmig vertheilt, so trägt derselbe doppelt so viel oder

$$2 \times (P - \frac{1}{2} w) = 2 \times 27{,}75 = 55{,}5 \text{ Ctr.}$$

2. Beispiel. Welche Lasten dürfen eine einfache hölzerne Jochbrücke von 45′ Spannweite passiren, wenn die 21′ breite Fahrbahn von 11 Straßenträgern von 1′ Breite 1,2′ Höhe getragen wird und mit 0,5 hohen Querhölzern (Fahrriegeln) gedeckt ist?

Antwort: Die Tragfähigkeit eines solchen Straßenträgers ist, da $b = 1'$; $h = 1{,}2'$; $l = 45'$ und $R' = 900$ Ctr.

$$P = \frac{2}{3} \times 900 \times \frac{1 \times 1{,}2^2}{45} = 19{,}2 \text{ Ctr.}$$

Das halbe Eigengewicht eines Trägers ist

$$\frac{1}{2} w = \frac{1}{2} \times (1 \times 1{,}2 \times 45) \times 20$$
$$= \frac{1}{2} \times 1080 \text{ Pfd.} = 5{,}4 \text{ Ctr.}$$

Die Tragfähigkeit eines Trägers auf die Dauer ist daher

$$P - \frac{1}{2} w = 19{,}2 - 5{,}4 = 13{,}8 \text{ Ctr.}$$

Eilf solcher Straßenträger haben eine Tragkraft von 11 × 13,8 = 151,8 Ctr.

Das Gewicht der Fahrriegel ist eine gleich vertheilte Last, die Hälfte davon muß also in der Mitte wirkend gedacht und von der Tragkraft der Träger abgezogen werden.

Der Kubikinhalt der Fahrriegel ist = 21 × 45 × 0,5 c′, und ihr Eigengewicht = 21 × 45 × 0,5 × 20 = 9450 Pfd., wovon die Hälfte = 47,8 Ctr.

Die Gesammttragkraft T eines Brückenfeldes in der Mitte der Fahrbahn ist daher für eine dauernde Belastung

$$T = 151{,}8 - 47{,}8 = 104 \text{ Ctr.}$$

Begegnen sich daher zwei Wagen auf der Brücke, so darf jeder nur 52 Ctr. schwer sein.

3. Beispiel. Es seien zur Verstärkung der ebengenannten Brücke statt der beiden äußeren einfachen Straßenträger je zwei solche auf einander gelegt, welche durch Schraubenbolzen zu einem Träger verbunden, und mittelst unter der Fahrbahn weggehender Querriegel mit dieser fest verbunden, welches wird dann das Tragvermögen der Brücke seyn?

Antwort: Die Tragkraft der übrigen neun einfachen Straßenträger ist nach Abzug des halben Eigengewichts

$$9 \times (P - \tfrac{1}{2} w) = 9 \times 13{,}8 = 124{,}2 \text{ Ctr.}$$

Jeder der beiden äußeren verdoppelten Träger ist 1′ breit, 2,4′ hoch, 45′ lang, hat also eine Tragkraft von

$$P' = \frac{2}{3} \times 900 \times \frac{1 \times 2{,}4^2}{45} = 600 \times \frac{5{,}76}{45}$$
$$= 76{,}8 \text{ Ctr.}$$

Das halbe Eigengewicht eines solchen Trägers ist

$$\frac{1}{2} w' = \frac{1}{2} \times (45 \times 1 \times 2{,}4) \times 20$$
$$= \frac{1}{2} \times 2160 \text{ Pfd.} = 10{,}8 \text{ Ctr.}$$

Es bleibt daher das wirkliche Tragvermögen eines äußeren Trägers

$$P' - \frac{1}{2} w' = 76{,}8 - 10{,}8 = 66 \text{ Ctr.}$$

Zwei solcher Träger tragen daher

$$2 \times (P' - \frac{1}{2} w') = 2 \times 66 = 132 \text{ Ctr.}$$

Die äußeren und inneren Träger haben daher zusammen ein Tragvermögen von

$$9 \times (P - \frac{1}{2} w) + 2 \times (P' - \frac{1}{2} w')$$
$$= 124{,}2 + 132{,}0 = 256{,}2 \text{ Ctr.}$$

Hievon ist noch das halbe Gewicht der Fahrbahn abzuziehen. Das halbe Gewicht der Fahrriegel ist, wie in Beispiel 2) = 47,8 Ctr. Rechnet man hiezu das halbe Gewicht des Geländers und der untern Querriegel mit 10 Ctr., zusammen also 57,8 Ctr., so bleibt das Tragvermögen der Brücke

$$T = 256{,}2 - 57{,}8 = 198{,}4 \text{ Ctr.}$$

Zwei in der Mitte der Brücke sich begegnende Wagen können also ein Gewicht von je 99,2 oder 100 Ctr. haben.

Zur vollkommenen richtigen Beurtheilung des Tragvermögens einer solchen Brücke muß noch der Fall betrachtet werden, wo ein dichtes Menschengedränge auf der Brücke stattfindet. Man pflegt für

diesen Fall 125 Pfd. und $2\frac{1}{2}$ □′ per Kopf zu rechnen, was einer gleichförmig vertheilten Belastung von 50 Pfd. per □′ entspricht. Unsere Brücke hat 21′ Breite, 45′ Länge, sohin in genanntem Falle eine gleichförmig vertheilte Belastung von

$$21 \times 45 \times 50 = 47250 \text{ Pfd.} = 472{,}5 \text{ Ctr.}$$

zu tragen. Hievon ist die Hälfte in der Mitte wirkend zu denken, was eine Belastung von

$$\tfrac{1}{2} \times 472{,}5 = 236 \text{ Ctr.},$$

etwas mehr als die vorhin berechnete Tragkraft der Brücke gibt. Die Brücke besitzt indessen auch für diesen Fall hinreichende Tragfähigkeit, da in diesem seltenen Falle eine Vermehrung der Belastung von 198,4 auf 236 Ctr., also um c^a. 24 Prozent, immer noch zulässig ist, indem dadurch nur momentan die Sicherheit gegen Bruch von einer zehnfachen auf eine $7\frac{1}{2}$fache herabgedrückt wird.

Anmerkung. Im Allgemeinen ist die Tragfähigkeit der so berechneten Holzbrücken bei guter Construktion und Ausführung noch etwas größer, und zwar aus zwei Gründen:

1) weil die Belastungen durch Wägen u. s. w. nur vorübergehende sind; und

2) weil der Werth des Bruchmoduls R = 900 Ctr. etwas gering ist. Erfahrungen und Rechnung an bestehenden großen Holzbrücken zeigen, daß man ohne Gefahr R zu 1000, ja 1200 Centner per □′ annehmen kann. Nimmt man 1200 Ctr. per □′ für R an, so ist die Sicherheit gegen Bruch immer noch eine achtfache.

4. Beispiel. Wie hoch läßt sich das Getreide auf einem Getreideboden aufschütten, dessen Balken von 10″ dd. Breite und 12″ dd. Höhe, 3′ vom Mittel zu Mittel entfernt, auf 25′ Länge frei aufliegen?

Antwort: Die Tragkraft eines solchen Balkens ist, da b = 10″dd. = $\frac{10}{12}$′; h = 12″dd. = 1,0′; und l = 25′ ist:

$$P = \frac{2}{3} \times 900 \times \frac{\frac{10}{12} \times 1^2}{25} = 600 \times \frac{10 \times 1}{12 \times 25}$$
$$= 20 \text{ Ctr.}$$

Das halbe Eigengewicht des Balkens ist

$$\frac{1}{2} w = \frac{1}{2} \times (25 \times \frac{10}{12} \times 1) \times 20$$
$$= 208 \text{ Pfd.} = 2 \text{ Ctr.}$$

also das wirkliche Tragvermögen des Balkens

$$P - \frac{1}{2} w = 20 - 2 = 18 \text{ Ctr.}$$

Für ein gleichförmig vertheiltes Gewicht, wie Getreide, trägt aber der Balken das doppelte des in der Mitte getragenen Gewichts oder 2 × 18 = 36 Centner.

Auf einen Balken trifft nun ein Getreide-Prisma von 25′ Länge 3′ Breite und der gesuchten Höhe. Das Gewicht dieses Prisma's ist 36 Ctr. oder 3600 Pfund; daher sein Kubikinhalt k, da 1 c′ Getreide (Weizen) 34 Pfd. wiegt,

$$k = \frac{3600}{34} = 105{,}8 \text{ c}'$$

Die Grundfläche g des Prisma's ist aber, weil die Länge 25′ die Breite 3′ beträgt,

$$g = 25 \times 3 = 75 \;\square';$$

folglich seine Höhe oder die gesuchte Höhe der Aufschüttung

$$h = \frac{k}{g} = \frac{105{,}8}{75} = 1{,}4'.$$

5. **Beispiel.** Welche Höhe kann die Erdmasse eines Eisenbahndammes auf einem mit Sand-

steinplatten gedeckten steinernen Durchlaß haben, bis dieselben einbrechen, wenn die Deckplatten auf 4 Fuß frei liegen und 1 Fuß Stärke haben?

Antwort: Betrachtet man eine Deckplatte von 4′ Länge, 1′ Breite und 1′ Höhe, so ist b = 1′,0; h = 1,0; l = 4,0 und R der Bruchmodul für Sandstein = 800 Ctr. per □′. Die Deckplatte trägt daher, bis sie bricht, ein in der Mitte aufgelegtes Gewicht von

$$P = \frac{2}{3} \times 800 \times \frac{1 \times 1^2}{4} = 133 \text{ Ctr.}$$

Für eine gleichförmig vertheilte Last, wie die darauf ruhende Erdmasse ist die Tragkraft die doppelte oder 2 × 133 = 266 Ctr.

Das Eigengewicht der Deckplatte kann man diesem Gewicht gegenüber vernachlässigen.

Da nun 1 c′ feuchte Erde 75 Pfd. oder 0,75 Ctr. wiegt, so beträgt der Kubikinhalt k eines Erdprisma's, welches obiges Gewicht hat,

$$k = \frac{266}{0{,}75} = 354{,}6 \text{ c}'.$$

Die Grundfläche des Prisma's ist 4 □′, daher seine Höhe

$$h = \frac{354{,}6}{4} = 88{,}6 \text{ Fuß.}$$

Unter einem 88 Fuß hohen Erddamm würden also die 1′ starken Sandsteindeckplatten eines 4′ weiten Durchlasses einbrechen.

6. Beispiel. Welche Tragfähigkeit hat ein in der Mitte belasteter gußeiserner Träger von 1,5″ dec. Breite, 3″ dec. Höhe und 10′ Länge?

Antwort: Hier ist b = 1,5, h = 3″, l =

100″ und R′ für Gußeisen = 12000 Ctr. per □′ oder = 120 Ctr. per □″ dec. Daher

$$P = \tfrac{2}{3} \times 120 \times \frac{1,5 \times 3^2}{100} = 10,8 \text{ Ctr.}$$

Der Kubikinhalt des Trägers ist

$$= 1,5 \times 3 \times 100 = 450 \text{ c}'' = 0,45 \text{ c}';$$

daher sein halbes Eigengewicht, da 1 c′ Gußeisen 320 Pfd. wiegt,

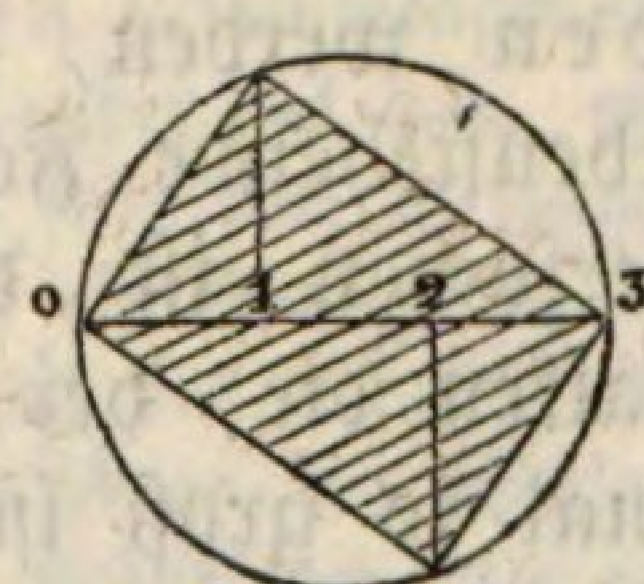
$$\tfrac{1}{2} \text{ w} = \frac{0,45 \times 320}{2} = 72 \text{ Pf.} = 0,7 \text{ Ctr.}$$

Das wirkliche Tragvermögen des Trägers ist daher

$$T = P - \tfrac{1}{2} \text{ w} = 10,8 - 0,7 = 9,1 \text{ Ctr.}$$

Ist die Last gleichförmig vertheilt, so trägt er das Doppelte oder 18 Ctr.

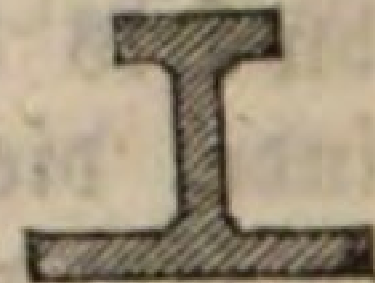
299. Construktion des stärksten Balkens aus einem runden Baumstamm. — Um aus einem runden Baumstamm den stärksten Balken zu hauen, theilt man den Durchmesser in 3 gleiche Theile, errichtet in dem ersten Theilpunkt eine Senkrechte aufwärts, im zweiten eine solche abwärts bis zum Kreis, und verbindet die Durchschnittspunkte mit den Endpunkten des Durchmessers,



wie nebenstehende Figur darstellt. Das so erhaltene Rechteck im Kreis ist der gesuchte Querschnitt des stärksten Balkens aus dem runden Stamme. Bei diesem Rechteck ist nämlich das Produkt $b \times h^2$ aus Breite und dem Quadrat der Höhe größer, als das Produkt aus Breite und Quadrat der Höhe jedes andern Rechtecks, das sich in den Kreis beschreiben läßt, wie man durch Construktion und Rechnung

leicht finden kann. Man findet auch, daß die Breite b sich zur Höhe h in diesem Falle verhält, wie ohngefähr 5 : 7, oder daß die Breite $\frac{5}{7}$ der Höhe ist. Durch das Weghauen der Schwarten geht ohngefähr 35 Prozent der Trägfähigkeit des runden Holzes verloren. Um diesen Verlust zu verringern, läßt man daher oft etwas von der Rundung der Kanten stehen.

300. Guß- und schmiedeiserne Balken. Schlaudern. — Balken von Eisen macht man, um bei gleicher Tragfähigkeit an Material zu sparen, schmal und hoch, oder höhlt sie in der Mitte des Querschnittes etwas aus, und setzt das Ausgenommene oben und unten wieder an. Weil ein auf zwei Unterlagen frei aufliegender Balken (nach 294) durch eine aufgelegte Belastung an seiner oberen Fläche zusammengedrückt, an der unteren ausgedehnt wird, das Gußeisen aber bei weitem weniger Festigkeit gegen das Zerreißen als gegen das Zerdrücken besitzt, so muß der Querschnitt gußeiserner Balken unten stärker als oben werden, und man gibt denselben daher die nebenstehende Form. Nach Hodgkinson's Versuchen ist die beste Form gußeiserner Balken die, bei welcher die untere Flansche 6mal so groß ist als die obere. Dieß entspricht ganz dem Verhältniß des Zerdrückungs- und Zerreißungswiderstandes des Gußeisens, indem ersterer (1500 Ctr. per □′) 6mal so groß ist als letzterer (200 Ctr. per □′.)

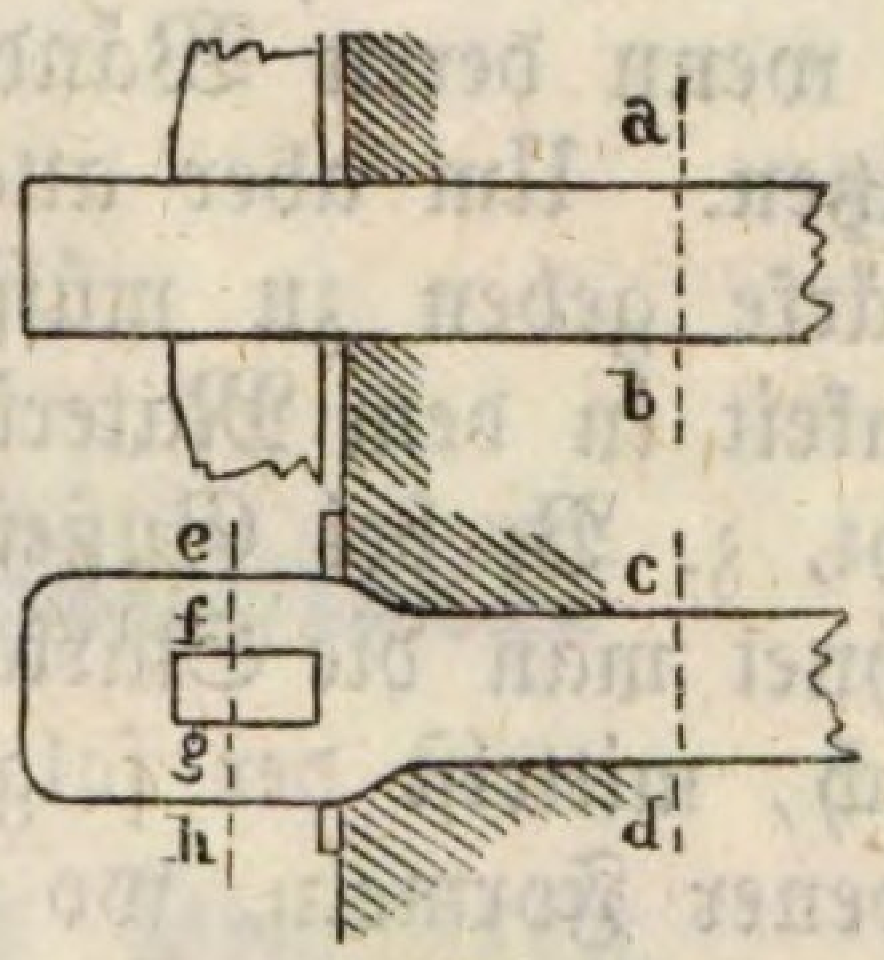


Schmiedeiserne Balken dagegen müssen oben stärker sein als unten, weil der Widerstand des Schmiedeisens gegen Zerdrücken kleiner ist als jener gegen das Zerreißen.



Man gibt ihnen daher die nebenstehende Form, wie dieß z. B. bei vielen Eisenbahnschienen der Fall ist.

Bei allen eisernen Construktionen soll das Prinzip der gleichen Widerstandsfähigkeit besonders beobachtet, d. h. jeder einzelne Theil mit Rücksicht auf den Angriff, welchen er zu erleiden hat, möglichst gleich stark construirt werden. Dieß gilt insbesondere von den eisernen Schlaudern, welche die gegenüberstehenden Mauern eines Hauses, Thurmes unter sich oder mit dem Gebälk zusammenzuhalten bestimmt sind. Ist z. B. der Querschnitt ab, cd in der Mitte einer Schlauder = 1 □ Zoll dec. (was nach 292 einer Widerstandsfähigkeit auf die Dauer von 122 Centnern entspricht), so müssen auch alle übrigen Theile der Schlauder den gleichen Widerstand gegen das Zerreißen darbieten, also denselben Querschnitt haben. Die Querschnitte ef und gh des Kopfes der Schlauder müssen daher zusammen genommen gleichfalls eine Stärke von 1 □ dec. Zoll, jeder für sich also $1/2$ □ dec. Zoll Querschnitt haben. Mindestens dieselbe Stärke müssen alle Theile des Kopfes und der Schließe besitzen; Vorsicht halber macht man dieselben noch etwas stärker. Sind aber die beiden Querschnitte ef und gh zusammengenommen kleiner als jener in der Mitte der Schlauder bei ab, oder cd, so tritt in dem Fall, daß die Schlauder sehr viel auszuhalten hat, wenn auch nicht ein Reißen, so doch ein Nachgeben des Kopfes ein, und die ganze auf den Ueberschuß des Querschnitts in der Mitte und auf den größten Theil der Länge der Schlauder verwendete Eisenmasse ist ohne Zweck. Aehnliches gilt von den bei Hängewerken zur Anwendung kommenden Hängeisen, wo die Stärke der Schienen, Nägel, Bolzen, Schrauben ꝛc. immer mit Rücksicht auf die Größe des Angriffs, welchen diese Theile zu erleiden haben, zu bestimmen ist, wenn keine Verschwendung an Eisen stattfinden soll. Kommen bei solchen Hängeisen Schrauben vor, so sind es gewöhnlich die Gewinde und Muttern, welche alsdann den schwächsten Theil bilden. (Vergl. 213.)



301. Stärke der Röhrenleitungen gegen den Wasserdruck. — Lange Röhrenleit-

ungen mit starkem Gefäll müssen eine gewisse Stärke besitzen, um den Druck des Wassers aushalten zu können. In einer Röhrenleitung, deren obere Mündung 50′ höher liegt als die untere oder die Ausflußöffnung, übt das Wasser einen Druck auf die untersten Röhrentheile aus, von $50 \times 44{,}4 = 2220$ Pfd. auf den □′ oder 22 Pfd. auf den □″; ein Druck, welcher die Röhre zu sprengen im Stande ist, wenn deren Wände nicht die erforderliche Stärke besitzen. Um aber auch der Röhre keine übermäßige Stärke geben zu müssen, und die möglichste Sparsamkeit in dem Material, aus welchem die Röhre besteht, z. B. bei Gußeisen oder Blei zu erreichen, berechnet man die Stärke der Röhrenwand nach Weisbach, mittelst der folgenden durch die Erfahrung gegebener Formeln, wo s die gesuchte Stärke der Röhrenwand, h die Druckhöhe, d. i. den Höhenunterschied der Ein- und Ausflußöffnung in bayer. Fußen und d den inneren Durchmesser der Röhre in bayer. dec. Zollen bezeichnet.

		Bayer. dec. Zoll.
Gußeisen . .	$s = 0{,}0000672 \times h \times d$	$+ 0{,}355$
Blei	$s = 0{,}0000683 \times h \times d$	$+ 0{,}215$
Holz	$s = 0{,}000912 \times h \times d$	$+ 1{,}12$
Natürl. Stein	$s = 0{,}00104 \times h \times d$	$+ 1{,}24$
Künstl. Stein	$s = 0{,}00152 \times h \times d$	$+ 1{,}65$

Beispiel. Welche Stärke muß eine gußeiserne Röhrenleitung von 2 bayer. dec. Zoll Weite erhalten, wenn die Druckhöhe 50′ ist?

Antwort: Hier ist $h = 50$; $d = 2$, sohin für Gußeisen

$$s = 0{,}0000672 \times 50 \times 2 + 0{,}355$$
$$= 0{,}00672 + 0{,}355 = 0{,}36 \text{ Zoll}$$

oder 3,6 dec. Linie.

Wird dieselbe Röhrenleitung von Blei hergestellt, so wird ihre Stärke = 0,22 Zoll oder 2,2 dec. Linie, und von künstlichem Stein = 1,8 Zoll.

Dreizehntes Kapitel.

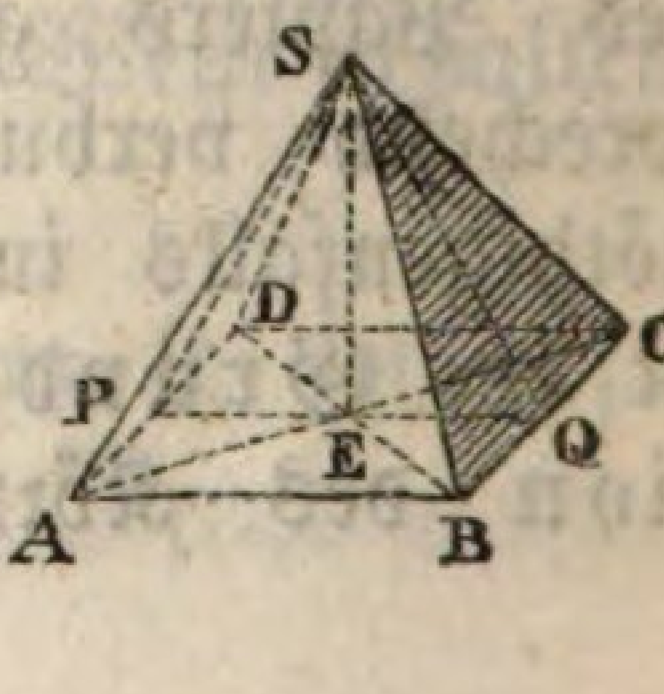
Vom Vermessen und Nivelliren.

302. Erklärungen. — Zur vollständigen Darstellung eines geometrischen Körpers durch eine Zeichnung (graphische Darstellung, Plan) sind im Allgemeinen zwei Ansichten desselben nöthig. Bei der einen, welche Grundriß (Horizontal-Projektion) heißt, denkt man sich das Auge senkrecht über dem darzustellenden Körper, und zwischen beiden eine horizontale (wagrechte) Ebene, etwa die des Papiers. Auf diese wird nun der Körper projizirt, d. h. dadurch abgebildet, daß man sich von allen Eckpunkten desselben vertikale (lothrechte) Linien bis zur Ebene des Papiers gezogen, und deren Fußpunkte entsprechend verbunden denkt. Die entstehende Figur, nöthigenfalls in verkleinertem Maßstab aufgetragen, ist der Grundriß oder die Horizontal-Projektion des Körpers. Bei der andern Darstellung,

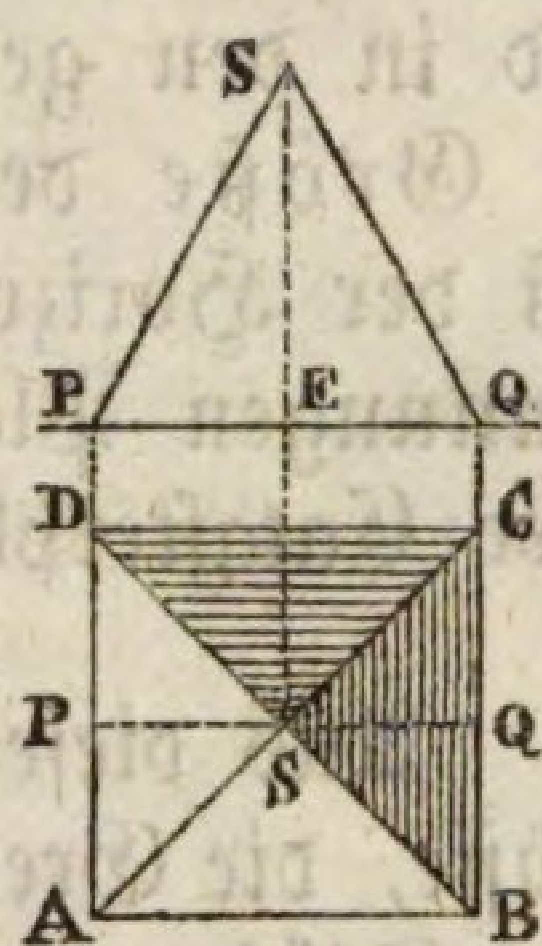
welche Aufriß (Vertikal-Projektion) heißt, denkt man sich das Auge vor dem darzustellenden Körper, und zwischen beiden eine vertikale (lothrechte) Ebene, z. B. die vertikal herabhängende Papierfläche. Wird der Körper nun auf diese Ebene projizirt, d. h. werden von allen Eckpunkten des Körpers Linien senkrecht zur Ebene des Papiers gezogen, und deren Fußpunkte in der Papierfläche gehörig mit einander verbunden, so entsteht ein Bild des Körpers in natürlicher Größe, welches in entsprechendem Maßstab verkleinert, der Aufriß oder die Vertikal-Projektion heißt.

303. Aus der Art und Weise, wie der Grundriß und Aufriß eines Körpers entstanden zu denken ist, geht hervor, daß in dem Grundriß nur jene Linien unverkürzt und in ihrer wahren Größe erscheinen, welche mit der horizontal gedachten Ebene des Papiers parallel laufen. Es können also aus dem Grundriß eines Körpers nur die horizontalen oder wagrechten Linien unmittelbar herausgemessen werden. Ebenso erscheinen im Aufriß nur diejenigen Linien in ihrer wahren Größe, und können unmittelbar gemessen werden, welche mit der vertikalen Papierfläche parallel laufen, also alle vertikalen oder lothrechten Linien, und außer diesen von den schiefen noch diejenigen, welche in Ebenen liegen, die mit jener des Papiers parallel sind, wie z. B. im Querschnitt eines Dachstuhls die Sparren.

304. So erscheint z. B. eine vierseitige regelmäßige Pyramide ABCDS im Grundriß als ein Quadrat ABCD, die Spitze S als der Mittelpunkt, und die in der Spitze zusammenlaufenden vier Kanten SA, SB, SC, SD als



die Diagonalen desselben. Die Seitenkanten der Grundfläche AB, BC, CD, DA sind horizontale Linien und erscheinen deßhalb im Grundrisse in ihrer wahren Größe, die vier Kanten SA, SB, SC, SD aber verkürzt, können also nicht aus dem Grundriß gemessen werden. Denkt man sich vor der Pyramide und parallel mit der Seite AB die Ebene des Papiers vertikal aufgestellt, so sieht man, daß mit dieser Ebene nur die Linien AB, PQ, DC, die Höhe SE und die zwei schiefen Linien SP und SQ (die Höhen in den Seitenflächen) parallel laufen. Aus dem Aufriß SPQ der Pyramide lassen sich also nur die Seite PQ, die Höhe SE und die Linien SP und SQ messen, die Länge der Kanten aber nicht, weil diese mit der vertikalen Ebene des Papiers, auf welcher der Aufriß der Pyramide entsteht, nicht parallel laufen. Gleichwohl ist die Länge der Kanten durch Grund- und Aufriß der Pyramide bestimmt, nur muß dieselbe durch eine besondere Construktion erst herausgetragen werden.



305. Darstellung des Terrains in einem Plan. — Die gleichen Grundsätze wie bei der Darstellung eines geometrischen Körpers durch eine Zeichnung gelten auch bei der Darstellung eines Theiles der Erdoberfläche oder des Terrains, obwohl dieses in den wenigsten Fällen eine regelmäßige Gestalt besitzt oder aus geraden, horizontalen und vertikalen Linien zusammengesetzt ist. Zur vollständigen Darstellung der Gestalt eines Theils der Erdoberfläche gehört also ebenfalls die Horizontal- und

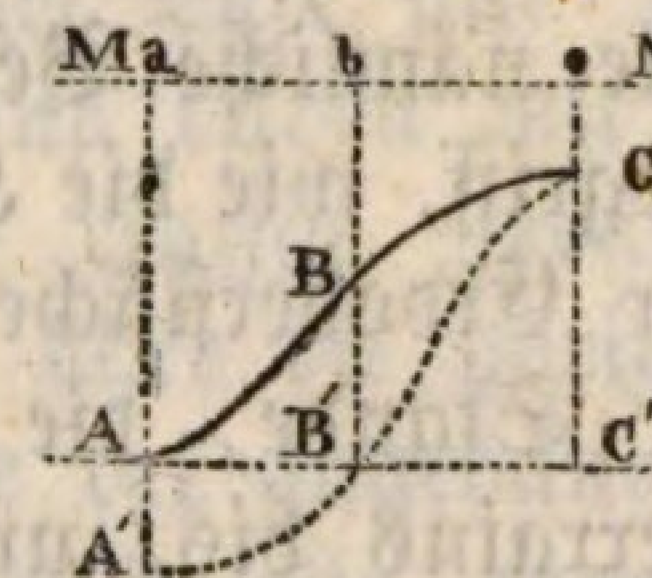
Vertikalprojektion derselben. In ebenen Gegenden und in den gewöhnlichen Fällen, wo es sich nur um die Größe der Flächen handelt, genügt die Kenntniß der Horizontal-Projektion, welche unter den Benennungen Plan, Situationsplan, Flurplan, Steuer- oder Catasterplan, Karte u. s. w. bekannt ist.

Aus diesen läßt sich die Lage der Häuser, Straßen, Flüsse, die Grenze eines Waldes, Feldes u. s. w. und die Größe dieser Flächen entnehmen; in einzelnen Fällen jedoch und in unebenem Terrain, z. B. bei Aufführung eines Gebäudes an einem Abhange, bei Anlage einer Straße, eines Kanals, einer Eisenbahn u. s. w. ist es unumgänglich nöthig, auch die Höhenverhältnisse der verschiedenen Punkte der Erdoberfläche durch einen Plan (Längen- und Querprofile), erkenntlich zu machen.

306. Horizontalprojektion des Terrains. — Um sich einen richtigen Begriff von der Art und Weise zu machen, wie die Horizontal- und Vertikalprojektion eines Theils der Erdoberfläche aufgenommen werden muß, stelle man sich vor, die aufzunehmende Fläche sei bis auf eine gewisse Höhe ganz mit Wasser bedeckt, dessen Oberfläche im Zustand der Ruhe eine vollkommene horizontale Ebene bildet. Denkt man sich nun von jedem in den Plan aufzunehmenden Punkt, z. B. von jedem Markstein, Hauseck, Kirchthurm u. s. w. eine Vertikale (Lothrechte) bis zur Wasseroberfläche gezogen, und die Fußpunkte aller dieser unter sich parallelen lothrechten Linien in der Wasseroberfläche gehörig mit einander verbunden, so erhält man die Horizontal-Projektion der Fläche in natürlicher Größe, welche

in entsprechendem Maße verkleinert, den Plan des betrachteten Theils der Erdoberfläche gibt.

Hieraus geht hervor, daß alle an einem Abhang liegenden Flächen nothwendig im Plan verkürzt erscheinen müssen. Es seien z. B. AB, BC die Längen zweier an einem Abhang liegenden Grundstücke, und MN die angenommene Wasseroberfläche oder die horizontale Ebene des Planes. Denkt man sich von den Grenzpunkten A, B, C die Senkrechten Aa, Bb, Cc zur horizontalen Ebene MN gezogen, so sind ab, bc die im Plane sich ergebenden Linien der Grenzlinien AB, BC. Jede andere in der Erdoberfläche liegende, gerade oder krumme Linie, z. B. A′B′C, welche zwischen denselben Senkrechten Aa, Cc liegt, erscheint im Plane in derselben Größe wie die erstere ABC und ebenso groß wie eine zwischen denselben Senkrechten liegende horizontale Fläche AC′. Man nennt die im Plane sich ergebenden Linien ab, bc die Horizontalprojektionen der Linien AB, BC oder auch die auf den Horizont reduzirten Längen von AB, BC. Fallen die Horizontalprojektionen ab, bc der Längen gleich groß aus, so sind auch die Flächeninhalte der Grundstücke AB, BC (gleiche Breite derselben vorausgesetzt) gleich und die beiden Grundstücke haben bei derselben Ertragsfähigkeit des Bodens gleichen Werth, da man von der Voraussetzung ausgeht, daß der Ertrag einer geneigten Fläche AB oder BC eben so groß ist, als der Ertrag einer zwischen denselben Senkrechten Aa, Bb, Cc enthaltenen horizontalen Fläche AB′ oder B′c′. Diese Voraussetzung liegt allen Flächenver-



messungen, Landesvermessungen, Steuer- oder Katasterplänen zu Grunde, und es wird auch deßhalb von den geneigten Grundflächen AB, BC dieselbe Grundsteuer erhoben, wie von den horizontalen Flächen AB′, B′c′.

307. Vertikalprojektion des Terrains. Die nämliche Betrachtungsweise gibt aber auch einen Begriff, wie die Höhenlage der verschiedenen Punkte der Erdoberfläche festgestellt wird. Ist man nämlich im Stande, die Länge der von jedem Punkte des Terrains bis zur angenommenen horizontalen Wasserfläche gezogenen Senkrechten, oder was das Nämliche ist, die Tiefe eines Punktes unter dem gedachten Wasserspiegel anzugeben, so hat man durch einfaches Subtrahiren zweier solcher Wassertiefen augenblicklich den Höhenunterschied beider Punkte der Erdoberfläche.

308. Vermessen. Nivelliren. — Die Aufnahme der Horizontalprojektion oder des Planes einer Fläche nach den angegebenen Grundsätzen geschieht nun durch das Vermessen derselben mit Maßstäben, Meßketten u. s. w.; die Aufnahme der Vertikalprojektion aber oder die Ermittelung des Höhenunterschiedes zweier Punkte durch das sogenannte Nivelliren. Von Beiden muß der Bautechniker, insbesondere der Straßen- und Wasserbaumeister die nöthige Kenntniß besitzen, welche im Folgenden kurz zusammengefaßt werden soll.

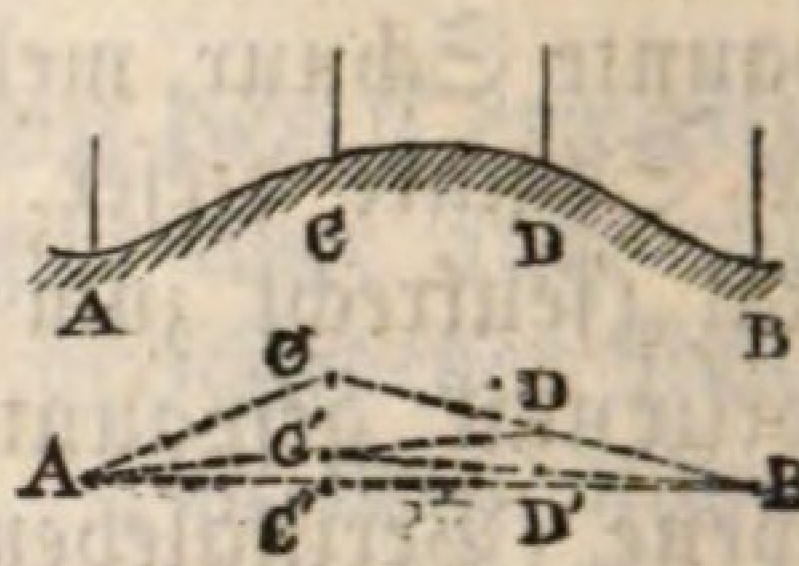
309. Abstecken gerader Linien. — Eine genaue gerade Linie zwischen zwei gegebenen Endpunkten von geringer Entfernung gibt eine gespannte Schnur, wie sie von dem Maurer zur Legung des Fundaments eines Gebäudes angewendet wird.

Um eine solche Schnur gehörig zu spannen, wird dieselbe an jedem Ende über ein Brett, welches an zwei in den Boden geschlagenen Pflöcken befestigt ist und Schnurgerüst heißt, gespannt und mit Steinen belastet. Werden an eine solche über ein Gerüst gespannte Schnur mehrere Senkel angehängt, so hängen die Schnüre dieser Senkel bei ruhiger Luft alle vertikal (senkrecht zum Wasserspiegel) und bilden mit der horizontal gespannten Schnur eine einzige vertikale Ebene (Vertikalebene). Visirt man über die horizontal gespannte Schnur und über eine der angehängten Senkelschnüre, so müssen alsdann auch alle anderen Senkel sich decken. Auf diese sehr einfache Art kann jede beliebige Vertikalebene und gerade Linie nach vor- und rückwärts, auf- und abwärts verlängert werden.

Zur Absteckung einer geraden Linie auf größere Entfernung bedient man sich der Visirstäbe, welche 1″ stark, ohngefähr 10′ lang und von Schuh zu Schuh abwechselnd roth und weiß angestrichen sind, um sie aus der Ferne besser sehen zu können und an ihrem unteren Ende eiserne Spitzen haben, um sie in die Erde bohren und genau senkrecht stellen zu können. Bei ihrem Gebrauch ist nur zu bemerken, daß sie alle gleich dick sein müssen und daß man, um größere Genauigkeit zu erreichen, in einer Entfernung von einigen Schritten hinter dem ersten derselben stehend, an ihren Rändern vorbeivisiren und dieselben mittelst eines Senkels in genau vertikale Lage bringen muß.

Es kann der Fall eintreten, daß man eine gerade Linie zwischen zwei Punkten A und B abzustecken hat, deren einer von dem andern aus nicht sichtbar

ist, wie z. B. wenn zwischen A und B ein Hügel, ein Wald sich befindet, oder wenn man sich hinter den Punkten A und B nicht aufstellen kann, wie z. B. wenn A und B zwei Häuserecken oder 2 Kirchthürme sind. In diesem Fall erhält man die gerade Linie zwischen A und B folgendermaßen. Zwei Beobachter C und D stellen sich, jeder mit einem Visirstab an 2 Zwischenpunkten C und D so auf, daß der Beobachter in C nach D und B, und der Beobachter in D nach C und A sehen kann, was leicht möglich ist. C visirt nun den D in die Richtung CB nach D ein. Ist dieß wenn auch nur annähernd geschehen, so läßt sich C von D in die Richtung DA nach C′ einvisiren, das heißt, C bringt seinen Stab nach C′. Hierauf visirt wieder C′ den D in die Richtung C′B nach D′, d. h. D bringt seinen Stab nach D′. Ist dieß geschehen, so visirt wieder D′ den C′ in die Richtung D′A nach C″ u. s. w. bis C den D in der Richtung CB und D gleichzeitig den C in der Richtung DA sieht, in welchem Fall alsdann ACDB eine gerade Linie ist, welche nun durch Zwischenstäbe beliebig weiter abgesteckt und verlängert werden kann.



310. Messung einer geraden Linie. — Zum Messen kleiner geraden Linien bedient man sich der Maßstäbe von 3—5′ Länge oder der Meßlatten von 10—20′ Länge.

Größere Linien werden mit der Meßkette gemessen. Die Meßkette ist gewöhnlich 50′, seltener 100′ lang und durch Ringe in einzelne Schuhe, durch eiserne Plättchen, worauf die Zahlen stehen, von 5′

zu 5′ eingetheilt. Die Mitte bezeichnet ein ähnliches Plättchen von Messing. An den beiden Enden sind Ringe, durch welche die 1½ Zoll starken, 4—5′ langen Kettenstäbe gesteckt werden. Wird die Kette horizontal ausgespannt, so muß von der Mitte eines Ringes bis zur Mitte des andern genau 50′ sein. Ist dieß nicht der Fall, so muß die Kette corrigirt werden. Zum Kettenmessen gehören ferner 10 ohngefähr 1 Schuh lange Stäbchen, von denen der vorausgehende Gehilfe je eines nach jedem Kettenzug an die Stelle des Kettenstabes in den Boden steckt, wodurch er dem zweiten Gehilfen den Ort bezeichnet, wo er seinen Kettenstab einzusetzen hat, und auch das Zählen der Züge entbehrlich wird. Nach je 10 Zügen (bei der 50füßigen Kette auf 500′, bei der 100füßigen auf 1000′ Länge) wird gewechselt, d. h. der zweite Gehilfe gibt die nach und nach gesammelten Stäbchen an den vorausgehenden ab. Beim Kettenmessen ist zu beobachten, daß die Kette immer in der Richtung der zu messenden Linie und möglichst horizontal angespannt wird.

311. Messung an Gehängen. — Ist die zu messende Linie nicht horizontal, sondern an einem Bergabhang gelegen, so darf die Messung keineswegs in der geneigten Fläche stattfinden, sondern es muß die Kette immer horizontal ausgespannt, und wenn die Fläche stark geneigt ist, in Abständen von nur 25′, 20′ oder 10′ gemessen werden. Ist z. B. ABC eine auf einem Bergabhang zu messende Linie, so spannt man den Anfang der Meßkette von dem obersten Punkt A an möglichst horizontal aus, sucht mit-



telst eines Senkels oder mittelst eines Visirstabes, welcher genau eingesenkelt und an einen beliebigen Punkt b der Kette, z. B. bei 25′ angehalten wird, den entsprechenden Punkt B des Bodens, bringt den Punkt b der Kette nach B, spannt den Rest der Kette wieder horizontal aus, senkelt bei c (am Ende der Kette) wieder herab, und findet so den Punkt C des Terrains, welcher (in horizontalem Sinn gemessen) von dem Anfangspunkt A 50′ entfernt ist. Auf diese Art wird in treppenförmigen Absätzen weiter gemessen, und die solchergestalt horizontal gemessene Linie ist es, welche für die geneigte oder gebrochene Linie der Erdoberfläche in den Plan eingetragen werden muß, um ein nach den Grundsätzen der Projektionslehre richtiges Bild der darzustellenden Fläche zu erhalten.

Sehr genau wird die horizontale Entfernung mehrerer an einem sehr steilen Abhange befindlichen Punkte A, B, C gefunden, wenn man die Abstände AB, BC der durch Pflöcke mit eingeschlagenen Nägeln bezeichneten Punkte in schiefer Richtung mit einer angespannten Schnur genau mißt, die Höhenunterschiede Bb, Cc der Punkte durch Nivelliren bestimmt, und die horizontalen Entfernungen Ab, Bc durch Rechnung aus den rechtwinkligen Dreiecken ABb, BCc mit Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes ermittelt.

Kleine Fehler sind bei Kettenmessungen aus leicht begreiflichen Gründen unvermeidlich. Man nimmt an, daß bei jedem Kettenzug mit einer genauen 50füßigen Kette im schlimmsten Fall ein Fehler von $\frac{1}{2}$ Zoll begangen werden kann, was auf 100 Fuß 1 Zoll, und auf 1000 Fuß 1 Fuß oder $\frac{1}{1000}$ des Ganzen beträgt. Wird also eine Linie von 1000′ Länge mit der Kette mehremal gemessen, so kann man die Genauigkeit des Resultats hinreichend nennen, wenn man nicht unter 999 und nicht über 1001 Fuß erhält. Werden Kettenmessungen in kleinem Maßstabe, z. B. im 2500 oder 5000 theiligen Maße aufgetragen, so wird ein solcher Fehler ohnehin unbemerkbar und ohne nachtheiligen Einfluß bleiben.

Soll eine lange Linie genau gemessen werden, so sind hiezu zwei gleiche Meßlatten von je 10 oder 20 Fuß Länge nöthig, deren eine abwechselnd am Boden liegen bleibt, während die andere in derselben Richtung vorsichtig und genau an die erstere angestoßen wird, wobei für den Fall, daß die Enden der beiden Latten wegen der Unebenheiten des Bodens in einiger Entfernung senkrecht übereinander zu liegen kommen, die Enden der Latten zusammengesenkelt werden müssen.

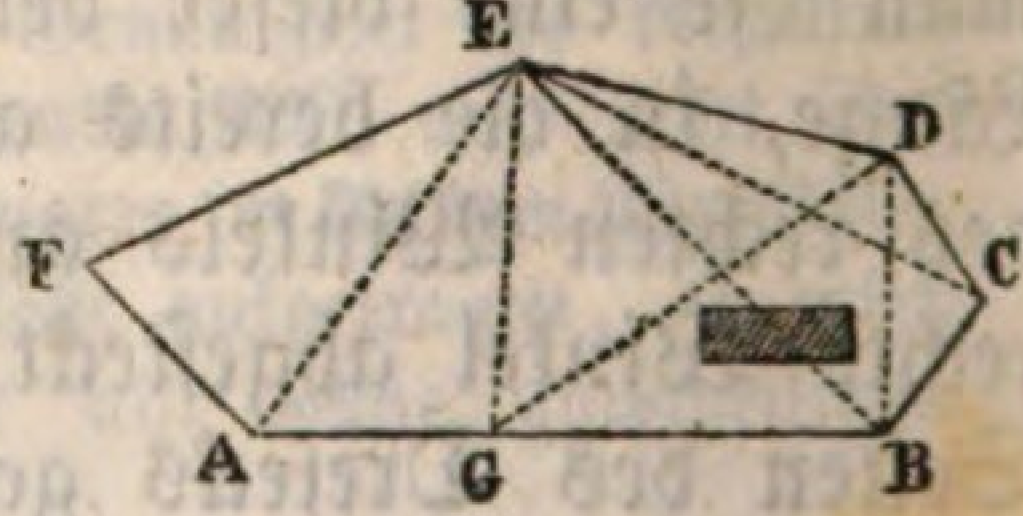
Werden Messungen in einem größeren Maßstab als $\frac{1}{5000}$ der natürlichen Größe aufgetragen, so wendet man daher statt der Kette besser zwei 20füßige hölzerne runde Stangen zur Messung an, welche glatt und an ihren Enden etwas dünner gehobelt, daselbst mit eisernen Ringen beschlagen und von Schuh zu Schuh leicht kenntlich ringsum eingetheilt sind. Solche Meßstangen sind leicht zu dirigiren, gewähren große Genauigkeit und sind besonders bei Messungen in bergigem Terrain von großem Vortheil.

312. Abstecken des rechten Winkels mit der Kette. — Wenn es auf keine große Genauigkeit ankommt, und man es mit einem ebenen Terrain zu thun hat, so läßt sich mit Hilfe der Meßkette ein rechter Winkel auf folgende Art abstecken. Man bilde aus der 50füßigen Kette ein Dreieck, dessen eine Seite 12′, die zweite 16′ und dessen dritte Seite 20′ Länge hat, so daß von der ganzen 50füßigen Kette noch 2 Fuß übrig bleiben, alsdann wird der zwischen den beiden kleineren Seiten von 12′ und 16′ Länge gebildete Winkel ein rechter sein. Legt man die eine dieser beiden Seiten, etwa die von 12′ Länge, in die bereits abgesteckte Linie, und die Spitze des rechten Winkels an den Punkt, in welchem der rechte Winkel abgesteckt werden soll, und spannt die Seiten des Dreiecks gehörig an, so gibt die andere

Seite von 16′ Länge die Richtung der gesuchten Senkrechten an. Da nehmlich nach dem pythagoräischen Lehrsatz (73) ein Dreieck, dessen Seiten 3, 4, und 5′ betragen, rechtwinklig ist, so muß jedes Dreieck, dessen Seiten ein Vielfaches dieser 3 Zahlen, z. B. 4 × 3 oder 12; 4 × 4 oder 16 und 4 × 5 oder 20′ betragen, ebenfalls rechtwinklig sein. Größere Genauigkeit erhält man hiebei, wenn man eine 100 füßige Kette anwendet, in welchem Fall die 3 Seiten des Dreiecks 8 × 3 oder 24; 8 × 4 oder 32 und 8 × 5 oder 40 Fuß lang gemacht werden können, so daß nach Bildung des Dreiecks noch 4 Fuß der Kette übrig bleiben.

Ist in unebenem Terrain ein rechter Winkel abzustecken, so geschieht dieß entweder mit dem Winkelspiegel (314) oder mit einem aus Latten gebildeten rechten Winkel unter gleichzeitiger Anwendung eines Senkels. Hiebei muß jedoch der rechte Winkel immer in horizontaler Lage angewendet werden.

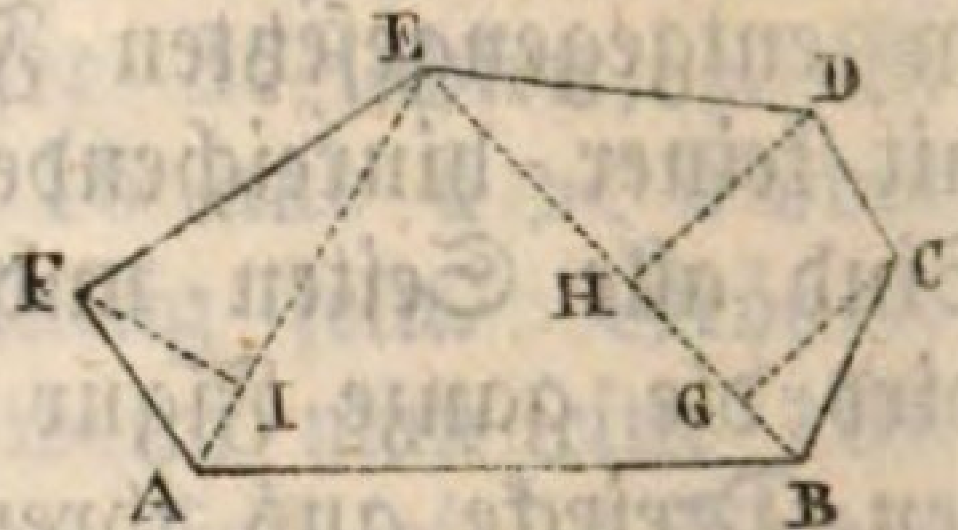
313. Aufnahme geradlinig begrenzter Figuren. Situationspläne. — Vor dem Ausmessen einer Figur entwirft man sich aus freier Hand eine Skizze (Brouillon) der zu vermessenden Fläche, in welche alle zu messenden Linien eingezeichnet und die gefundenen Ausmaße später eingetragen werden. Ist nun eine geradlinig begrenzte Fläche, z. B. ein Bauplatz ABCDEF aufzunehmen, so zerlegt man sich denselben durch die Diagonalen AE, BE, CE in Dreiecke, mißt die sämmtlichen Seiten der Figur und ebenso die Diagonalen AE,



BE, CE, so daß von jedem Dreieck die 3 Seiten bekannt sind. Bei der Zerlegung der Figur in Dreiecke muß jedoch darauf gesehen werden, daß die Dreiecke nicht zu stumpf- und spitzwinklig ausfallen, weil im entgegengesetzten Falle das Auftragen der Figur mit keiner hinreichenden Genauigkeit geschehen kann. Sind alle Seiten und die Diagonalen gemessen, so wird die ganze Figur durch Construktion der einzelnen Dreiecke aus ihren gemessenen drei Seiten leicht aufgetragen. Man fängt z. B. mit dem Dreieck ABE an, trägt das gefundene Maß für AB in verjüngtem Maßstab auf einer geraden Linie auf, nimmt das Maß der Diagonale AE in den Zirkel, setzt bei A ein, und beschreibt einen Kreisbogen; hierauf nimmt man das für die Diagonale BE gefundene Maß in den Zirkel, setzt bei B ein, und beschreibt einen zweiten Kreisbogen. Der Durchschnittspunkt E beider Bögen ist die Spitze des Dreiecks ABE. Fährt man so fort, indem man das zweite Dreieck BCE an die Linie BE, das dritte CDE an die Linie CE und das vierte AEF an die Linie AE anhängt, so erhält man den Plan der aufgenommenen Fläche. Hat man eine Linie mehr gemessen, als zum Auftragen der Figur nöthig ist, z. B. DB, so muß das gefundene Maß mit der im Plan erhaltenen Linie DB übereinstimmen, was eine Controle für die Richtigkeit der Messung und Zeichnung abgibt. Ist die Messung einer Diagonale unmöglich, ist z. B. innerhalb des Bauplatzes ein Haus, so zerlegt man die Figur aus einem andern Punkte G, von welchem aus die Messung der Linien nach den Ecken möglich ist, in Dreiecke und verfährt im Uebrigen auf gleiche Weise. Liegt die Figur an einem Abhange, so müssen

alle Linien nach der oben (311) gegebenen Vorschrift horizontal gemessen werden.

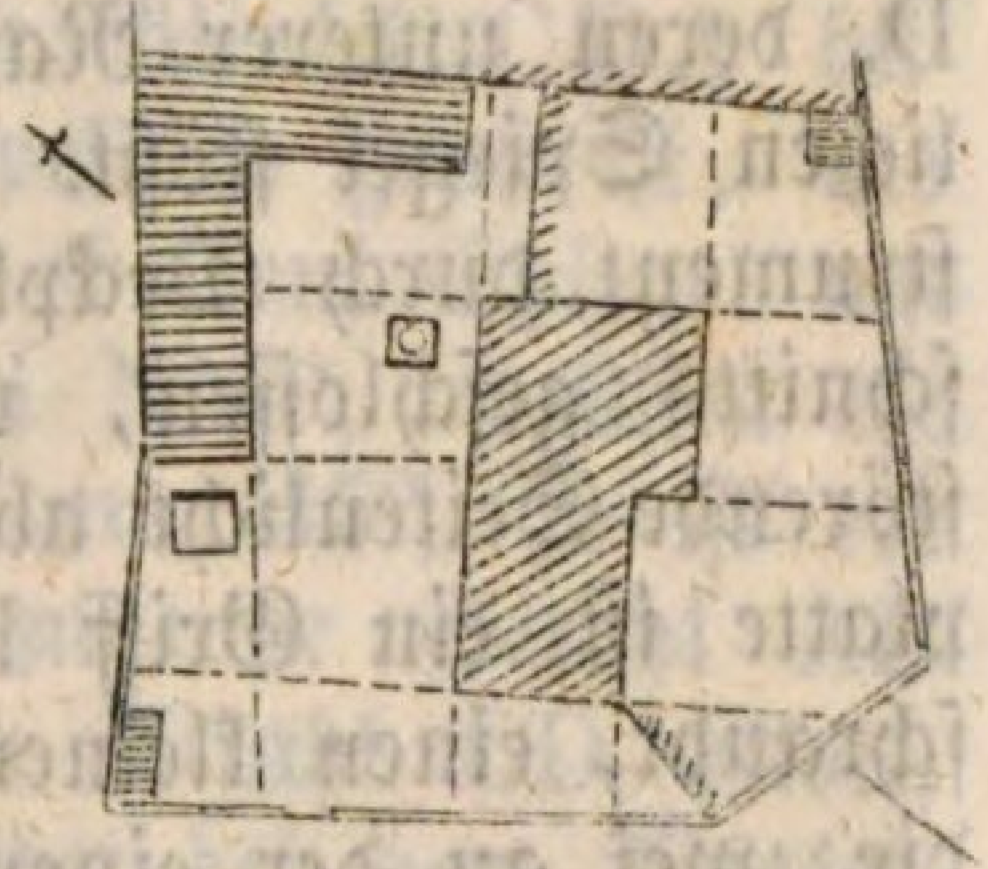
Weniger umständlich und im Falle die Winkel an den Eckpunkten C, D sehr stumpf sind, auch genauer, wird die Aufnahme der Figur, wenn man den rechten Winkel zu Hilfe nimmt. Ist nehmlich das Dreieck ABE mit seinen 3 Seiten gemessen, so sucht



man entweder mit Hilfe des von der Kette gebildeten rechtwinkligen Dreiecks oder mittelst des Winkelspiegels (siehe 314) in der Diagonale BE die Fußpunkte G und H der Senkrechten CG und DH, und auf gleiche Weise in der Diagonale AE den Fußpunkt I der Senkrechten FI. Werden nun die Stücke BG, BH, AI und die dazu gehörigen Senkrechten GC, HD, IF gemessen, so sind die Eckpunkte C, D, F bestimmt und brauchen die Seiten BC, CD, DE, FA und FE nicht gemessen zu werden. Man wird jedoch gut thun, die Seiten BC, CD ꝛc. gleichfalls zu messen, um eine Controle für die Richtigkeit der ganzen Aufnahme zu haben.

Dem Bauhandwerker kommt häufig die Aufnahme des Situationsplanes eines Gebäudes mit Umgebung, Nebengebäuden, Höfen, Gärten, Brunnen, Straßen u. s. w. vor. Eine solche Aufnahme ist wegen der mitunter verworrenen Lage der einzelnen Gebäude, der unregelmäßigen Form der Höfe, Gärten, dann wegen der Unmöglichkeit, Diagonalen zu messen, nicht selten mit Schwierigkeit verbunden und erfordert Umsicht und Genauigkeit, wenn der aufzutragende Situationsplan richtig werden soll. Das zweckmäßigste Verfahren bei Aufnahme eines solchen Situationsplanes ist daher im Allgemeinen Folgendes. Zuerst ist eine möglichst annähernd richtige Skizze des Gebäudecomplexes oder eines Theiles desselben (und zwar möglichst groß, damit die einzuschreibenden Maße Platz finden) zu entwerfen. Sodann beginnt man mit der Bestimmung der Form und Größe des Hauptgebäudes,

welches ohnehin gewöhnlich die Figur eines Rechteckes hat. Die Bestimmung der Lage der Nebengebäude, der Hof- oder Gartenmauer 2c. geschieht nun am einfachsten dadurch, daß man die 4 Mauerflächen des Hauptgebäudes durch Visiren soweit verlängert, bis die Verlängerung die Hof- oder Gartenmauer 2c. schneidet, und diese Verlängerung vom Eck des Hauptgebäudes weg einmißt. Ebenso verfährt man mit den einzelnen Nebengebäuden. Hierauf werden die Abstände dieser Schnittpunkte von den Ecken des Vielecks (des Hofes, Gartens 2c.) und die Seiten des letztern selbst, sowie alle Längen und Breiten der Gebäude 2c. gemessen, wie dieß aus der nebenstehenden Figur, wo die punktirten Linien die zu messenden Verlängerungen vorstellen, zu ersehen ist. Dabei ist zu beachten, daß man wo möglich einen Theil des Planes sogleich nach geschehener Aufnahme, an Ort und Stelle im Maßstab des Situationsplanes aufträgt, weil dadurch Messungsfehler sogleich entdeckt und verbessert werden können, auch die Aufmerksamkeit bei Zeiten auf die schwierigeren Theile der Aufnahme gelenkt wird, unnöthige Messungen vermieden und nothwendige Controllinien (Diagonalen) bei der Messung nicht übersehen werden. Jeder Situationsplan ist mit dem betreffenden Maßstab und der Orientirungslinie (ein von Süd nach Nord gerichteter Pfeil) zu versehen.



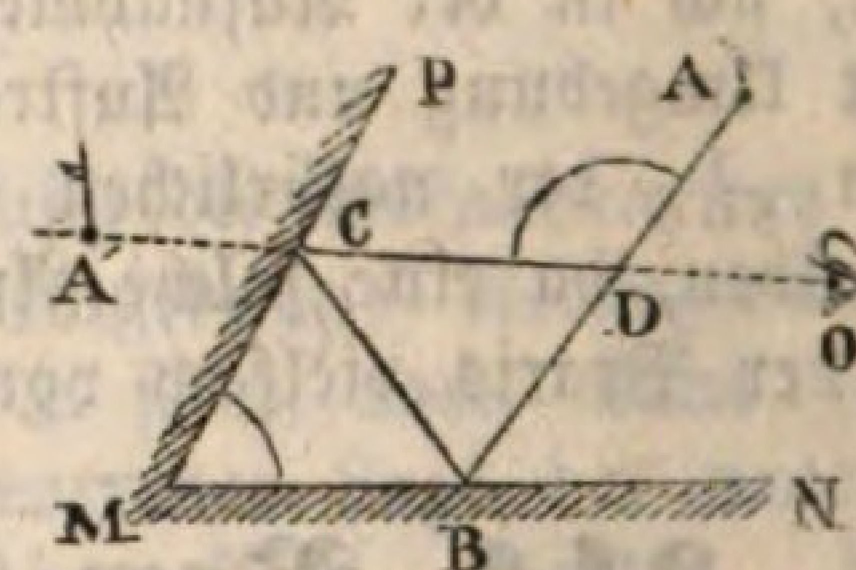
Es wird jedem angehenden Bauhandwerker dringend empfohlen, sich in der Aufnahme solcher Situationspläne von Gebäuden mit Umgebung und Auftragen derselben in dem üblichen Maßstab von $\frac{1}{500}$ der natürlichen Größe (eine Decimallinie = 25 Fuß) zu üben, da eine solche Arbeit in hohem Grad lehrreich ist und in der Praxis vielfach vorkömmt.

314. Vom Winkelspiegel. — Zum Abstecken eines genauen rechten Winkels auf größere Entfernungen bedient man sich des Winkelspiegels. Die wesentlichen Theile des Winkelspiegels, welcher in Fig. 4, Taf. I. abgebildet ist, bestehen aus zwei unter einem Winkel von 45° gegen einander geneigten Spiegeln A und B, welche auf der innern Seite zweier unter demselben Winkel mit einander fest ver-

bundenen Messingplatten F und G befestigt sind. Jede dieser beiden Messingplatten hat an ihrem oberen Ende eine rechtwinklig ausgeschnittene Oeffnung C, D, deren unterer Rand hart an den darunter befindlichen Spiegel stößt. Oben und unten ist das Instrument durch Deckplatten in Form eines Kreisausschnitts geschlossen, und innen geschwärzt, um das störende Seitenlicht abzuhalten. An der unteren Deckplatte ist ein Griff E angeschraubt, welcher, abgeschraubt, einen kleinen Schraubenzieher trägt, womit die zwei an der einen Seitenplatte befindlichen Stellschräubchen x und y corrigirt werden können.

315. Um die Wirkung und den Gebrauch dieses Instruments einzusehen, müssen einige Erklärungen aus der Naturlehre (Physik) und zwar aus der Lehre vom Licht (Optik) vorausgeschickt werden.

Wenn ein Lichtstrahl auf eine spiegelnde Fläche fällt, so wird er, wie ein an das Band eines Billards gespielter Ball, unter demselben Winkel, unter welchem er die Spiegelfläche trifft, zurückgeworfen. Ist z. B. AB ein Lichtstrahl, welcher die Spiegelfläche MN unter dem Winkel ABN trifft, so wird derselbe in B nach der Richtung BC zurückgeworfen (reflektirt), welche man erhält,



wenn man den Winkel CBM dem Winkel ABN gleich macht. Fällt der zurückgeworfene (reflektirte) Strahl BC in C auf einen zweiten Spiegel MP, so wird er hier ebenfalls so zurückgeworfen, daß der Winkel PCD gleich dem Winkel MCB wird. Ein in O befindliches Auge empfängt also den Strahl CD so, als wenn er von A′ käme, sieht also den Punkt A in A′. Nun

läßt sich beweisen, daß der solchergestalt zweimal zurückgeworfene Strahl CD mit dem ursprünglich einfallenden AB einen Winkel CDA bildet, welcher allemal genau doppelt so groß ist, als der Winkel NMP, welchen die beiden Spiegel mit einander bilden. Ist der Winkel NMP, welchen die beiden Spiegel mit einander bilden, 45°, so ist der Winkel CDA, welchen der kommende Strahl AB mit dem 2mal zurückgeworfenen Strahl CD bildet, 90° oder ein Rechter. Dieß findet bei dem Winkelspiegel statt, weßhalb derselbe auch zum Abstecken der rechten Winkel gebraucht wird. Ist nemlich MN (Fig. 5, Taf. I.) eine auf dem Feld abgesteckte Gerade und P ein seitwärts befindliches Signal, und soll der Fußpunkt Q der Senkrechten PQ auf die Gerade MN mit Hilfe des Winkelspiegels gefunden werden, so begibt man sich, den Winkelspiegel in der gezeichneten Lage vor das Auge O haltend, in die Gerade MN, visirt am Rande des Spiegels BD vorbei durch die über dem andern Spiegel AC befindliche Oeffnung C auf das Objekt N und geht so lange in der Linie MN vor- oder rückwärts, bis man in dem unter der Oeffnung C befindlichen Spiegel AC das Signal P genau mit dem durch die Oeffnung C gesehenen Objekt N in eine Vertikale zusammenfallen sieht. Der Punkt Q der Linie MN, über welchen das Instrument in diesem Augenblick gehalten wird, ist der gesuchte Fußpunkt der Senkrechten PQ.

In diesem Fall fällt nemlich der von P ausgehende Strahl PQ auf die Spiegelfläche BD, wird in D nach der Richtung DC, und in C von der zweiten Spiegelfläche AC nach CQ so reflektirt, daß er den ankommenden Strahl PQ in einem rechten

Winkel CQP schneidet, und parallel mit dem von N kommenden durch die Oeffnung C gehenden Strahl NCO ins Auge O des Beobachters gelangt, welches am untern Rand der Oeffnung C und gleichzeitig am obern Rand des Spiegels AC hinsehend, den oberen Theil des Signals P in P′ mit dem unteren Theil des Objekts N in einer und derselben Vertikalen erblickt.

Hiebei erscheint das Bild P′ des Signals freilich etwas schwach, weil dasselbe durch zweimalige Spiegelung, wobei immer etwas Licht verloren geht, entstanden ist.

Das Auge in O muß nahe an den Rand B gehalten werden, damit dasselbe mit dem Punkt Q, in welchem eigentlich der rechte Winkel entsteht, möglichst nahe zusammenfällt.

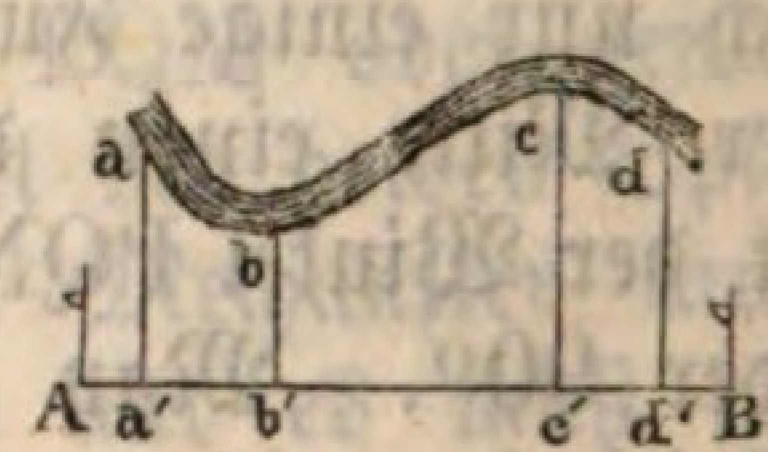
Damit der Winkel PQN = PQM oder genau ein Rechter werde, muß der Winkel der beiden Spiegel AEB genau 45° sein. Der Mechaniker kann dieß nur annähernd bewerkstelligen und es muß daher der Winkelspiegel vor dem jedesmaligen Gebrauch mit Hilfe der beiden Correktionsschrauben x und y corrigirt werden. Dieß geschieht mit Hilfe des fehlerhaften Instruments selbst auf folgende Art. Man steckt auf einem ebenen Terrain mit 3 Visirstäben M, Q, N möglichst genau eine gerade Linie von wenigstens 300—400′ Länge ab, wobei die 3 Stäbe M, Q, N genau vertikal stehen müssen. Man stellt sich nun mit dem Instrument in Q auf, visirt durch die Oeffnung am Winkelspiegel nach N, und zu gleicher Zeit in dem unter der Oeffnung befindlichen Spiegel auf



den seitwärts bei P in einer Entfernung QP = QN befindlichen Gehilfen, welchen man durch Zeichengeben seinen vertikal gehaltenen Stab so lange verrücken läßt, bis letzterer im Spiegel gesehen, mit dem Signal N zusammenfällt, worauf man denselben an dieser Stelle, etwa in P′, feststecken läßt. War nun der Winkel der beiden Spiegel nicht 45°, sondern z. B. nur 44°, so muß der abgesteckte Winkel P′QN = 2 × 44° oder 88° sein. Kehrt man sich nun auf demselben Punkt Q mit dem Instrument um, visirt nach M, und läßt den Gehilfen einen zweiten Stab in P″ so feststecken, daß er im Spiegel gesehen mit dem durch die darüber befindliche Oeffnung gesehenen Signal M zusammenfällt, so muß der abgesteckte Winkel P″QM ebenfalls 88° betragen. Der gesuchte rechte Winkel wird nun erhalten, wenn man die Entfernung P′P″ der beiden Stäbe, welche gewöhnlich nur einige Fuße beträgt, genau halbirt und in der Mitte einen dritten Stab P einsetzt. Alsdann ist der Winkel PQN = PQM, daher jeder ein Rechter oder 90°. Man muß also den Winkel der beiden Spiegel, welcher nur 44° war, vergrößern, was dadurch geschieht, daß man die eine der beiden Correktionsschrauben, die Stellschraube y (Fig. 4 Taf. I.), (welche daran kenntlich ist, daß ihr Kopf von der Platte des Instruments weiter absteht), etwas zurück, und die andere die Anziehschraube x (deren Kopf an der Platte festsitzt), etwas hinein schraubt, wodurch der äußere Spiegelrand der Platte genähert, also der Winkel der Spiegel vergrößert wird. Diese Correktion ist so oft vorzunehmen, bis beim zweimaligen Visiren nach N und M jedesmal der Stab P genau unter N und M erscheint, in welchem Fall der Winkelspiegel corrigirt ist.

Um zu unterscheiden, ob bei der Correktion der Spiegel, diese einander genähert oder von einander entfernt werden müssen, darf man nur, vorausgesetzt, daß man zuerst nach N visirt, beobachten, ob der zuerst ausgesteckte Stab P′ näher an N oder an M zu stehen kam. Trifft P′ näher an N, und P″ näher an M, so war der Winkel der Spiegel zu klein; trifft aber (bei derselben Ordnung der Beobachtung) P′ auf die Seite von M und P″ auf die Seite gegen N, so war der Winkel zu groß, und die Correktur muß in entgegengesetztem Sinn stattfinden.

316. Aufnahme einer Fläche mit dem Winkelspiegel. — Mit großem Vortheile wendet man den Winkelspiegel bei der Aufnahme krummlinig begrenzter Flächen an.



Es sei abcd die krummlinige Begrenzung einer Fläche, z. B. eines Bauplatzes, der Lauf eines Flusses oder die Form eines Ufereinbruches, welche aufgenommen werden soll. Man bezeichne die Hauptkrümmungspunkte a, b, c, d, zwischen welchen der Lauf des Flusses noch als gerade angesehen werden kann, mit Visirstäben und stecke in einiger Entfernung eine gerade Linie AB ab. Mit Hilfe des Winkelspiegels sucht man nun die Fußpunkte a′ b′ c′ d′ der Senkrechten aa′, bb′, cc′, dd′, welche von den Krümmungspunkten a, b, c, d auf die abgesteckte Gerade AB gefällt werden können. Dieß geschieht, indem man die Linie AB von einem bereits bekannten Punkte A aus mit der Kette mißt, und während des Messens, mit dem Winkelspiegel am Auge in der Linie AB von

A nach B visirend, so lange vorwärts geht, bis man in a′ den seitwärts ausgesteckten Visirstab a im Spiegel mit B zusammen fallen sieht. Die Entfernung des Fußpunktes a′ von A wird in das vorher entworfene Brouillon eingetragen, und ebenso das Maß der Senkrechten aa′. Auf gleiche Weise wird der Fußpunkt b′ der zweiten Senkrechten bb′ bestimmt, die Entfernung Ab′ und die Senkrechte bb′ gemessen und eingetragen und so bis zum letzten Punkte weiter gefahren. Die Entfernungen Aa′, Ab′, Ac′, Ad′ der Fußpunkte a′ b′ c′ d′, welche immer vom Anfangspunkt A aus gemessen und gezählt werden, heißen die Abscissen, die Senkrechten aa′, bb′, cc′, dd′, die Ordinaten der Punkte abcd. Die Linie AB heißt die Abscissen-Axe.

317. Abstecken mittelst des Winkelspiegels. — Soll mittelst des Winkelspiegels eine gerade oder krumme Linie abgesteckt werden, so schlägt man das umgekehrte Verfahren ein. Auf dem in hinreichend großem Maßstab gezeichneten Plane wird die abzusteckende Linie construirt, und von den einzelnen Punkten derselben auf eine passend gezogene Abscissen-Axe die nöthige Zahl von Ordinaten senkrecht gezogen, welche nebst den Abscissen genau aus dem Plane gemessen werden. Steckt man die gewählte Abscissenlinie auf dem Felde ab, trägt mit der Kette die Abscissen auf, errichtet in den Theilpunkten mit dem Winkelspiegel die Ordinaten senkrecht und macht diese den aus dem Plane gemessenen Ordinaten gleich, so geben die abgesteckten Endpunkte der Ordinaten die verlangte Absteckung der Linie.

Man kann übrigens auch mit einem uncorrigirten Winkelspiegel einen genauen rechten Winkel abstecken. Man verfährt

dabei wie bei der Correctur des Winkelspiegels, indem man (vergl. zweite Fig. zu 315) mit demselben einmal vorwärts nach N, dann rückwärts nach M visirt, und die Entfernung der beiden seitwärts abgesteckten Stäbe P′ P″ durch einen dritten Stab P halbirt, welcher alsdann in der verlangten Senkrechten zur Linie MN steht. Auf diese Art muß man erfahren, wenn die Linie MQN, auf welche in Q der rechte Winkel errichtet werden soll, krumm ist. Alsdann muß aber Q in der Mitte von MN oder die Entfernung QM = QN sein.

318. Abstecken des Fundaments eines Gebäudes, einer Brücke 2c. — Hiezu bedient sich der Bautechniker der Schnüre, Senkel, Maßstäbe, Maßlatten und großer hölzerner rechter Winkel von 15—20′ Seite. Ist die vordere Baulinie (das Alignement) genau bestimmt, so wird in dieser Richtung eine starke Schnur gespannt, welche an jedem Ende über ein gut befestigtes eingekerbtes Brett (das Schnurgerüst) geht und durch angehängte Steine beschwert wird. Die Länge der vorderen Haupt- oder Umfassungsmauer (der Façade) wird nun auf mehreren an ihren Enden zusammen genagelten Latten genau aufgetragen, diese Latte unter die Schnur gelegt, und von den beiden aufgetragenen Endpunkten an die Schnur heraufgesenkelt. An dem einen Ende der vordern Hauptmauer wird nun ein großer aus Latten gebildeter rechter Winkel mit einem Schenkel an die Baulinie angehalten und die Richtung des andern Schenkels (der Hauptquermauer) durch eine zweite gespannte Schnur bezeichnet. Ebenso verfährt man am andern Ende der vorderen Umfassungsmauer. Trägt man auf jeder dieser beiden Schnüre, welche die Richtung der Hauptquermauern bezeichnen, die Breite des Gebäudes auf gleiche Weise wie bei der vordern Baulinie auf, so gibt die Verbindungslinie der Endpunkte, welche durch eine vierte Schnur be-

zeichnet wird, die Richtung der hintern Hauptmauer an. Zur Versicherung untersucht man noch zuletzt mit einem großen rechten Winkel, ob die an der hintern Baulinie entstandenen Winkel rechte sind, und ob letztere die gleiche Länge, wie die vordere Baulinie hat, in welchem Fall der Umfang des Gebäudes richtig abgesteckt ist. Das Auftragen der inneren Mauerlinien und der Zwischenmauern hat nun keine Schwierigkeit mehr. Die Schnurgerüste müssen gut befestigt sein, damit während des Baugrubenaushebens keinerlei Verrückung an denselben Statt finden kann.

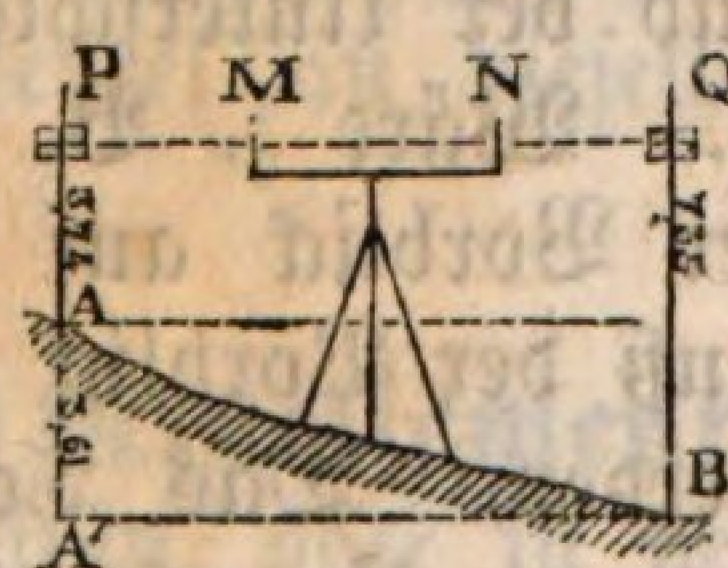
319. Vom Nivelliren. — Zur Aufnahme der Vertikalprojektion eines Theils der Erdoberfläche (der Längen und Querprofile) bedient sich der Praktiker, wenn er es mit kleinen Entfernungen zu thun hat, und keine große Genauigkeit verlangt wird, der Setzwage und der Setzlatte, deren Gebrauch bekannt ist.

Wie mit der Setzwage der Höhenunterschied zweier entfernter Punkte z. B. das Gefäll einer Mühle, gefunden wird, ist in 259 ausführlich gezeigt worden. Die Herstellung eines Längenprofils der Erdoberfläche auf größere Entfernungen und die Aufnahme der Querprofile, wobei es auf größere Genauigkeit ankommt, wie z. B. bei Anlage einer Straße, eines Abzugkanales, eines Wasserwerks, eines Durchstiches u. s. w. erfordert dagegen die Kenntniß eines allgemeinen Verfahrens, wonach der Höhenunterschied zweier oder mehrerer Punkte gefunden wird. Dieses Verfahren heißt Nivelliren (Abwägen), und ist für den Straßen- und Wasserbaumeister von der höchsten Wichtigkeit.

320. Die Kanalwage. — Das einfachste Nivellir-Instrument ist die Kanalwage, welche auf dem Prinzip der communicirenden Röhren beruht. Sie besteht aus einer an beiden Enden umgebogenen 4′ langen Messing- oder Blechröhre AB (Fig. 6 Taf. I.), an deren Enden zwei gleich weite cylindrische Glasröhren M, N eingekittet sind, welche durch Stöpsel verschlossen werden können. Das Rohr hat in der Mitte eine trichterförmige Hülse C, welche auf das 3füßige Stativ gesteckt wird und mit dem Rohr auf diesem umgedreht werden kann. Gießt man Wasser in die Röhre, bis es in beiden Glascylindern sichtbar wird, so bildet die Oberfläche desselben MN in den beiden Glascylindern eine horizontale Ebene, welche man durch Anvisiren beider Wasserränder bei M und N beliebig vor und rückwärts verlängern kann. Der andere Theil des Apparates besteht in der 10 Schuh langen Schieblatte, (Fig. 7. a Taf. I.) welche auf der Seite in Schuhe und Dezimalzoll eingetheilt ist, und an der vorderen Seite ein in einer Nuth verschiebbares Brettchen trägt, welches durch eine horizontale und eine vertikale Linie in 4 gleiche abwechselnd roth und weiß angestrichene Rechtecke getheilt ist, um die Mitte des Brettchens besser anvisiren zu können. Die mittlere Horizontallinie am Brettchen, welche anvisirt wird, ist um dasselbe herum verlängert und auf der Seite des Schiebers durch einen scharfen Strich markirt; dieser gibt an der neben daran befindlichen Eintheilung auf dem feststehenden Theil der Latte (der Nuth) die Höhe der anvisirten Mittellinie über dem Fuß der Latte an. Ist, wie gewöhnlich, das Brettchen 1′ hoch, so beginnt die Eintheilung der Latte $\frac{1}{2}$′ über dem unteren Ende mit 0,5 und endigt oben mit 10. Steht der

Strich des Schiebers auf 8 Fuß, so muß die Mitte des Brettchens 8 Fuß von dem unteren Ende der Latte entfernt sein. Um Höhen von über 10 Fuß ablesen zu können, dreht man die Latte (unterst zu oberst) um, schiebt das Brettchen über die Latte hinaus, und läßt am unteren Ende des Schiebers die Höhen ab. Zu diesem Zweck ist (Fig. 8. Taf. I.) auf der anderen Seite der Nuth die Fortsetzung der Eintheilung von 10′ bis 20′ angebracht und der Schieber mit dem Brettchen 10½′ lang, so daß, (wie die Figur zeigt) wenn das untere Ende des Schiebers z. B. auf 18′ steht, die Höhe der anvisirten Mittellinie des Brettchens vom jetzigen unteren aufstehenden Ende der Latte genau 18′ sein muß. Die Enden von Schieber und Latte sind der größeren Genauigkeit wegen mit Eisen beschlagen. Zum Festklemmen des Schiebers in der Latte sind an deren beiden Enden Klemmschrauben angebracht.

321. Einfaches Nivellement zweier Punkte. — Sollen mit der Kanalwage zwei Punkte A und B einnivellirt werden, d. h. soll der Höhenunterschied zweier Punkte A und B gefunden werden, so stellt man das Instrument möglichst in der Mitte zwischen beiden Punkten auf, läßt die Latte bei A aufstellen, visirt über die beiden zur Ruhe gekommenen Wasserräder NM nach P und läßt den Gehilfen in A das Brettchen P an der Schieblatte so lange auf- und abschieben, bis man die mittlere Horizontallinie desselben in der Visirlinie NM erblickt. Der Gehilfe in A schraubt alsdann den Schieber mit der hiezu angebrachten Flügelschraube



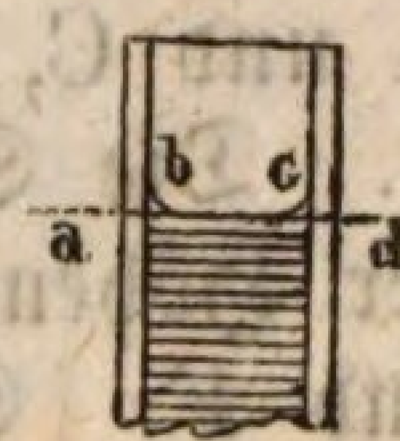
fest und liest die Zahl der Fuße und Zoll oder die Höhe AP ab, welche, wenn das Nivellement in der Richtung von A nach B und weiter fortgesetzt wird, der Rückblick genannt und notirt wird. Es sei der Rückblick AP = 3′ 7″ 4‴ dec. oder 3,74′. Hierauf richtet man das Instrument, ohne dessen Fuß zu verrücken, auf die in B aufgestellte Latte, deren Brettchen Q wieder so lange verschoben wird, bis dessen mittlere Horizontallinie in der Vision MN gesehen wird, und liest die Höhe BQ, welche der Vorblick genannt wird, ab. Es sei BQ = 7,35′ oder 7′ 3″ 5‴ dec. Der Höhenunterschied der Punkte A und B ist nun, wie einfach aus der Figur folgt = AA′ = BQ — AP = 7,35 — 3,74 = 3,61 Fuß. Um so viel liegt B tiefer als A.

Man erhält also hienach allemal den Höhenunterschied der zwei von derselben Station aus anvisirten Punkte, wenn man den Rückblick vom Vorblick abzieht. Ist wie im vorigen Beispiel der Rückblick bei A kleiner als der Vorblick bei B, so läßt sich der Rückblick vom Vorblick abziehen und der Unterschied ist das Gefäll von A nach B; ist aber der Rückblick bei A größer als der Vorblick bei B, so muß man den Vorblick vom Rückblick abziehen, und der Unterschied gibt die Steigung von A nach B. Wäre z. B. der Rückblick auf A = 5,23′ und der Vorblick auf B = 5,01′ gefunden worden, so muß der Vorblick 5,01 vom Rückblick 5,23 abgezogen werden. Das Terrain steigt also von A nach B, und der Unterschied 5,23 — 5,01 = 0,22′ gibt an, um wie viel der Punkt B höher liegt als der Punkt A.

Die Entfernung der beiden Punkte kann 100

bis 200 Fuß betragen, doch wird die Genauigkeit des Anvisirens bei mehr als 50 Fuß vor- und rückwärts nicht mehr groß.

Weil in einem Glase vermöge der Adhäsion das Wasser am Rande höher steht, als in der Mitte, so ist beim Visiren an der Kanalwage zu bemerken, daß man nicht den oberen Rand bc, sondern den untern ad an beiden Gläsern anzuvisiren hat. Auch soll man nicht durch die Glascylinder hindurch, sondern an ihren Rändern vorbei auf die Latte visiren.



Beim Visiren an der Kanalwage darf das Auge nicht nahe an die Glasröhre gehalten werden; man muß vielmehr aus einer Entfernung von einigen Fußen hinter der Glasröhre stehend, und an den Rändern der Glascylinder vorbeisehend, die beiden Wasserspiegel zusammen visiren. Um diese besser zu sehen, kann man das Wasser mit ein Paar Tropfen Dinte ꝛc. dunkel färben.

Bei Aufstellung der Latte und insbesondere bei hohen Ablesungen, wenn das Visirbrettchen über die Latte hinaus geschoben wird, muß darauf gesehen werden, daß dieselbe immer vertikal (lothrecht) gehalten wird, zu welchem Zweck ein Senkel an dieselbe angebracht werden kann.

322. Zusammengesetztes Nivellement. — Sind mehrere Punkte einzunivelliren, oder ist der Höhenunterschied zweier entfernten Punkte zu ermitteln, so hat man ein zusammengesetztes Nivellement. Es besteht nur aus einer Wiederholung des einfachen Nivellements zweier Punkte. Es seien z. B. A, B,

C, D, E, F (Taf. I. Fig. 9) sechs Punkte, welche einnivellirt werden sollen, oder was das Nämliche ist, es seien A und F zwei entfernte Punkte, deren Höhenunterschied gesucht werden soll. Man ermittle nach der angegebenen Verfahrungsweise den Höhenunterschied zwischen A und B, ebenso den zwischen B und C, C und D, D und E, und zwischen E und F. Die Summe aller Höhenunterschiede ist alsdann der Höhenunterschied der beiden äußersten Punkte A und F. Steigt und fällt abwechselnd das Terrain zwischen A und F, so ist die Summe aller Steigungen und die Summe aller Gefälle zu suchen, der Unterschied beider Zahlen gibt die Steigung oder das Gefäll von A bis F an, je nachdem die Summe der Steigungen oder die der Gefälle die größere ist.

323. Aufschreibung des Nivellements. — Die einfachste Methode, die Beobachtungen während eines Nivellements aufzuschreiben, ist die in folgender Tabelle enthaltene. Die erste Columne enthält die Bezeichnung der Punkte, die zweite die Entfernungen (vom Anfangspunkte an durchaus gezählt), die dritte die abgelesenen Höhen (Visionen, Vor- und Rückblicke), die vierte die daraus hervorgehenden Steigungen, die fünfte die Gefälle, die sechste die Lage der Punkte unter dem allgemeinen Horizont, die siebente Bemerkungen.

Gesetzt, es seien nun in den Punkten ABCDEF nach einander die in Taf. I. Fig. 9 beigesetzten Entfernungen mit der Kette gemessen und die gleichfalls beigesetzten Höhen an der Latte abgelesen worden, so geschieht die Aufschreibung der letzteren folgendermassen:

Nivellement von A nach F.

Punkte.	Länge.	Vision.	— Steigt.	+ Fällt.	Höhencote.	Bemerkung.
A		3,75			50,00	Straße.
B	100	12,34		8,59	58,59	"
B		7,14				
C	250	5,38	1,76		56,83	"
C		4,19				
W		(5,01)		(0,82)	(57,65)	Hochwasser.
D	450	8,80		4,61	61,44	Straße.
D		5,01				
E	550	3,27	1,74		59,70	"
E		8,49				
F	625	1,03	7,46		52,24	"
Summa			10,96	13,20		

Gesammtgefäll von A bis F = + 13,20
Gesammtsteigung von A bis F = — 10,96

Gefäll von A bis F = + 2,24

Der Gang der Aufschreibung ist hiebei folgender:

Die in der Station zwischen A und B abgelesene Vision auf A (Rückblick auf A = 3,75) wird neben A eingetragen, darunter die in derselben Station gemachte Vision 12,34 auf B (der Vorblick auf B = 12,34). Nun wird die Station gewechselt, d. h. das Instrument von seinem ersten Stand zwischen A und B weggenommen und möglichst in der Mitte zwischen B und C aufgestellt. Dieser Stationswechsel wird in der Aufschreibung

einfach durch einen horizontal abschließenden Querstrich nach geschehener Notirung des Vorblicks auf B angegeben. Um das einfache Nivellement zwischen B und C an das zwischen A und B anzuschließen, liest man in der neuen Stellung des Instruments zwischen B und C die Höhe eines der vorigen Punkte, z. B. von B rückwärts ab, welche Vision auf B (Rückblick auf B = 7,14) gleich unter den Strich gesetzt wird. Hierauf folgt die Vision nach C vorwärts (Vorblick auf C = 5,38), dann Stationswechsel (Querstrich), wieder Rückblick auf C (4,19) Vorblick auf D (8,80) u. s. w.

Ist in irgend einer Station, z. B. zwischen C und D ein Punkt seitwärts, z. B. ein Hochwasserzeichen W mit einzunivelliren, so geschieht dieß einfach dadurch, daß man nach geschehenem Rückblick auf C, ohne die Höhe des Instruments zu ändern, den Gehilfen mit der Latte nach W schickt, die in W aufgestellte Latte anvisirt, und die Vision 5,01′ wie einen Vorblick einträgt. So können beliebig viele Punkte rückwärts, vor- und seitwärts mit einnivellirt werden, welche aber alle als zu einer Station gehörend, innerhalb derselben horizontalen Querlinien eingetragen werden müssen und zu einem und demselben Rückblick (4,19) gehören.

Ist das Nivellement und die dazu gehörige Aufschreibung in den 3 ersten Columnen fertig, so folgt die Berechnung des Gefälls in der 4ten und 5ten Columne. Da der Vorblick auf B (12,34) größer ist als der Rückblick auf A (3,75), so fällt das Terrain von A nach B, und die Differenz 12,34 — 3,75 = 8,59 ist in die mit „fällt“ überschriebene Columne zu setzen. Zwischen B und C

aber steigt das Terrain, weil der Vorblick kleiner ist, als der Rückblick, und zwar um 7,14 — 5,38 = 1,76, welche Zahl in die mit „steigt" überschriebene Columne gesetzt wird. Zwischen C und W ist wieder ein Gefäll von 5,01 — 4,19 = 0,82. Zwischen C und D derselben Station fällt das Terrain gleichfalls und zwar um 8,80 — 4,19 = 4,61. Zwischen D und E ist aber wieder eine Steigung und zwar von 5,01 — 3,27 = 1,74 und zwischen E und F ist ebenfalls eine Steigung von 8,49 — 1,03 = 7,46. So oft also die obere Vision (der Rückblick) von der unteren (dem Vorblick) abgezogen wird, fällt das Terrain und der Unterschied (+) wird in die Columne „fällt" eingesetzt; muß dagegen die untere Vision von der oberen abgezogen werden, so steigt das Terrain und der Höhenunterschied (—) ist in die Columne „steigt" einzusetzen. Die Summe aller Steigungen 10,96 von der Summe aller Gefälle 13,20 (mit Ausnahme des Gefälls 0,82 vom Punkte W, welcher als ein seitwärts gelegener oder Nebenpunkt nicht in das fortlaufende Längennivellement gehört) abgezogen, gibt das Gesammtgefäll von A bis F = 13,20 — 10,96 = 2,24.

Ganz dasselbe Resultat des Gefälls zwischen A und F muß man erhalten, wenn man auf irgend einer andern Linie A, M, N, P, Q....F von A bis F nivellirt, die Zahl der Zwischenpunkte M, N, P, Q... mag groß oder klein sein, was eine Prüfung für die Richtigkeit des ersten Nivellements darbietet. Gewöhnlich wählt man zur Controlirung des Nivellements dieselbe Linie, und nivellirt alle Punkte derselben in umgekehrter Richtung durch, wobei alle

Visionen andere Zahlen werden können, die Steigungen und Gefälle zwischen je zwei derselben Punkte aber ganz dieselben werden müssen. Ein solches Nivellement heißt ein Contre-Nivellement und muß immer angestellt werden, wenn man sicher sein will, daß kein Fehler im Nivellement stattgefunden hat.

324. Auftragen des Nivellements. Höhencoten. — Um ein Nivellement aufzutragen, sucht man die Tiefe aller nivellirten Punkte unter einer und derselben horizontalen Ebene, welche man sich (vergl. 307) in einer bestimmten Höhe über dem höchstgelegenen der nivellirten Punkte gelegt denkt, so daß alle Punkte unter diese Ebene zu liegen kommen. Eine solche horizontale Ebene heißt der allgemeine Horizont des Nivellements. Die Zahl, welche die Tiefe eines jeden Punkts unter diesem Horizont angibt, heißt die Höhencote oder auch Cote des Punktes. Nimmt man z. B. für das betrachtete Nivellement von A bis F den allgemeinen Horizont 50′ über dem Punkte A an, so ist die Tiefe des Punktes A unter dem allgemeinen Horizont, oder die Höhen-Cote des Punktes A = 50,00. Addirt man hiezu das Gefäll von A bis B nach der Tabelle mit 8,59, so erhält man 58,59 als Cote des Punktes B. Von B nach C ist eine Steigung von 1,76; diese von der Cote von B abgezogen, gibt 58,59 — 1,76 = 56,83 als Cote des Punktes C. Von C nach D ist ein Gefäll von 4,61; dieses zur Cote von C addirt gibt die Cote für D = 56,83 + 4,61 = 61,44. Von D nach E steigt das Terrain um 1,74, daher ist die Cote für E = 61,44 — 1,74 = 59,70; und endlich hievon die Steigung von E bis F mit 7,46 abgezogen,

gibt die Höhencote für F = 59,70 — 7,46 = 52,24.

Man ersieht hieraus die allgemeine Regel, daß bei Berechnung der Cote eines Punktes aus der des vorhergehenden das Gefäll immer addirt, und die Steigung immer abgezogen werden muß. Eine tiefere Lage des Punktes entspricht also einer größeren Cote und umgekehrt. Als Probe für die Richtigkeit dieser fortlaufenden Berechnung dient die einfache Regel, daß die Höhencote des ersten Punktes mit der Gesammtsteigung oder dem Gesammtgefäll zwischen dem ersten und letzten die Höhencote des letzten Punktes geben muß. So ist das Gesammtgefäll von A bis F nach der Tabelle = 2,24; hiezu die Cote des Punktes A mit 50,00 gibt 52,24 die Cote des Punktes F. Sollte die Rechnung (etwa in Folge eines Rechnungsfehlers) noch nicht stimmen, so nimmt man die Summe aller Rückblicke = 3,75 + 7,14 + 4,19 . . . = 28,58 und die Summe aller Vorblicke = 12,34 + 5,38 + 8,80 . . . . = 30,82; die Differenz 30,82 — 28,58 = 2,24 muß ebenfalls den Höhenunterschied des ersten und letzten Punktes geben.

Soll nun das vorgenommene Längen-Nivellement aufgetragen werden, so zieht man eine horizontale Linie AF (Taf. I. Fig. 9), welche den allgemeinen Horizont vorstellt. Die sämmtlichen nivellirten Punkte werden nun nach ihren Entfernungen von A aus (B mit 100, C mit 250 u. s. w.) in einem gewissen Maßstab aufgetragen, in den Theilpunkten senkrechte Linien errichtet, auf diese die berechneten Coten (für A = 50,00; für B = 58,59; für C = 56,83 &c.) in einem 10mal größeren Maßstab

abwärts aufgetragen und die Endpunkte durch gerade Linien mit einander verbunden, wodurch man ein getreues Bild der Steigungsverhältnisse des Terrains erhält, welches Längenprofil (Längennivellementplan) genannt wird. Sowohl die Entfernungen der Punkte, als auch ihre Coten werden in das Längenprofil eingeschrieben.

Gewöhnlich wird, um die Unebenheiten des Terrains mehr hervortreten zu lassen, und eine allzugroße Länge des Planes zu vermeiden, der Maßstab der Längen AB,BC u. s. w. zehnmal kleiner angenommen, als der Maßstab der Tiefen, so daß ein solchergestalt aufgetragenes Terrain allerdings als ein Zerrbild erscheint, jedoch alle vertikalen und horizontalen Maße immer richtig abnehmen und auftragen läßt. Das Längennivellement (Fig. 9) ist auf diese Art aufgetragen, und zwar ist der Maßstab der Längen $\frac{1}{2000}$ jener der Höhen $\frac{1}{200}$ der natürlichen Größe (für die Längen $\frac{1}{2}$ dec. Zoll bayer. = 100′; für die Höhen $\frac{1}{2}$ dec. Zoll bayer. = 50′).

Welche Vortheile ein auf diese Art aufgetragenes und cotirtes Längen-Nivellement darbietet, ist aus folgenden Beispielen ersichtlich. Der Höhenunterschied zweier beliebigen Punkte desselben wird einfach dadurch gefunden, daß man ihre Coten von einander abzieht. So ist z. B. die Cote von B = 58,59, jene von E = 59,70; E liegt also um 59,70 — 58,59 = 1,11′ tiefer als B. Wird durch den richtig aufgetragenen Punkt W eine Horizontale oder Parallele zum allgemeinen Horizont AF gezogen, so sieht man auf einen Blick, daß bei dem einnivellirten Hochwasserstand W die Punkte B, D und E unter Wasser stehen. Die Höhen des Wasserstandes an

jedem dieser Punkte kann leicht aus der Zeichnung gemessen oder berechnet werden. Da nehmlich die Cote des Wasserspiegels W = 57,65, jene des Punktes B = 58,59 ist, so liegt B = 58,59 — 57,65 oder 0,94′ unter dem Hochwasser. D liegt 61,44 — 57,65 = 3,79′ und E = 59,70 — 57,65 = 2,05′ unter dem Hochwasser W. Stellt das Längenprofil AF eine Straße dar, und soll dieselbe von A bis F corrigirt und über das Hochwasser W gelegt werden, so gibt eine Linie von A nach C und von C nach F das Längenprofil einer neuen Straße, welche gänzlich über dem Hochwasser liegt. Nach diesem Projekt fällt die neue Straße von A bis C auf eine Länge von 250′ um 56,83 — 50,00 = 6,83 Fuß, also auf je 100 Fuß um $\frac{6,83}{250} \times 100$ = 2,7′ oder mit 2,7 %. Von C nach F steigt dieselbe auf eine Länge von 375′ um 56,83 — 52,24 = 4,59 Fuß oder mit $\frac{4,59}{375} \times 100 = 1,2$ %. Die Höhe des hiezu nöthigen Auftrags (Auffüllung) in B ergibt sich durch einfaches Messen zu 5,89 Fuß jene bei D wird 7,01 und jene bei E 6,47 Fuß betragen.

325. Längenprofil. Querprofil. — Ist das Längenprofil einer Linie hergestellt, so geschieht die Aufnahme der Querprofile auf gleiche Weise durch Nivelliren, wie bei dem Längenprofil. An den bereits einnivellirten Hauptpunkten des Längenprofils werden die Querprofile rechtwinklig zur Richtung des Längenprofils abgesteckt und diejenigen Punkte des Querprofils, an welchen die Gestalt des Terrains eine merkliche Aenderung zeigt, von der Mitte aus eingemessen und so einnivellirt,

daß immer der erste Rückblick an dem bereits einnivellirten Axenpunkt oder der Mitte des Querprofils genommen und das Nivelliren nach rechts und links fortgesetzt wird. Man entwirft sich zu diesem Zweck eine kleine Skizze des aufzunehmenden Querprofils in Gestalt eines wie in Fig. 9. aufgetragenen Längenprofils und schreibt die abgelesenen Visionen (Höhenmaße) an die Stelle der dort eingezeichneten Coten ein. An steilen Gehängen werden Querprofile einfacher mit einer langen Latte und einer Setzwage aufgenommen, weil man hiebei gleichzeitig die horizontalen Entfernungen erhält.

Bei der Aufnahme von Querprofilen ist darauf zu sehen, daß man immer nach derselben Richtung vorwärts gehend die Skizze entwirft und die Maße einschreibt, damit nicht später eine Verwechselung der rechten und linken Seite des Profils stattfinden kann.

Bei größeren Nivellements, welche Genauigkeit erfordern, wie z. B. bei Bestimmung des Gefälls eines Flusses, schlägt man an den einzunivellirenden Punkten eichene Pflöcke ein, welche oben mit einem Nagel versehen werden, auf dessen Kopf die Latte jedesmal aufgestellt wird.

Wie mit Hilfe des Längenprofils und der Querprofile die Größen der auf- und abzutragenden Erdkörper berechnet werden, ist in **140** gezeigt worden.

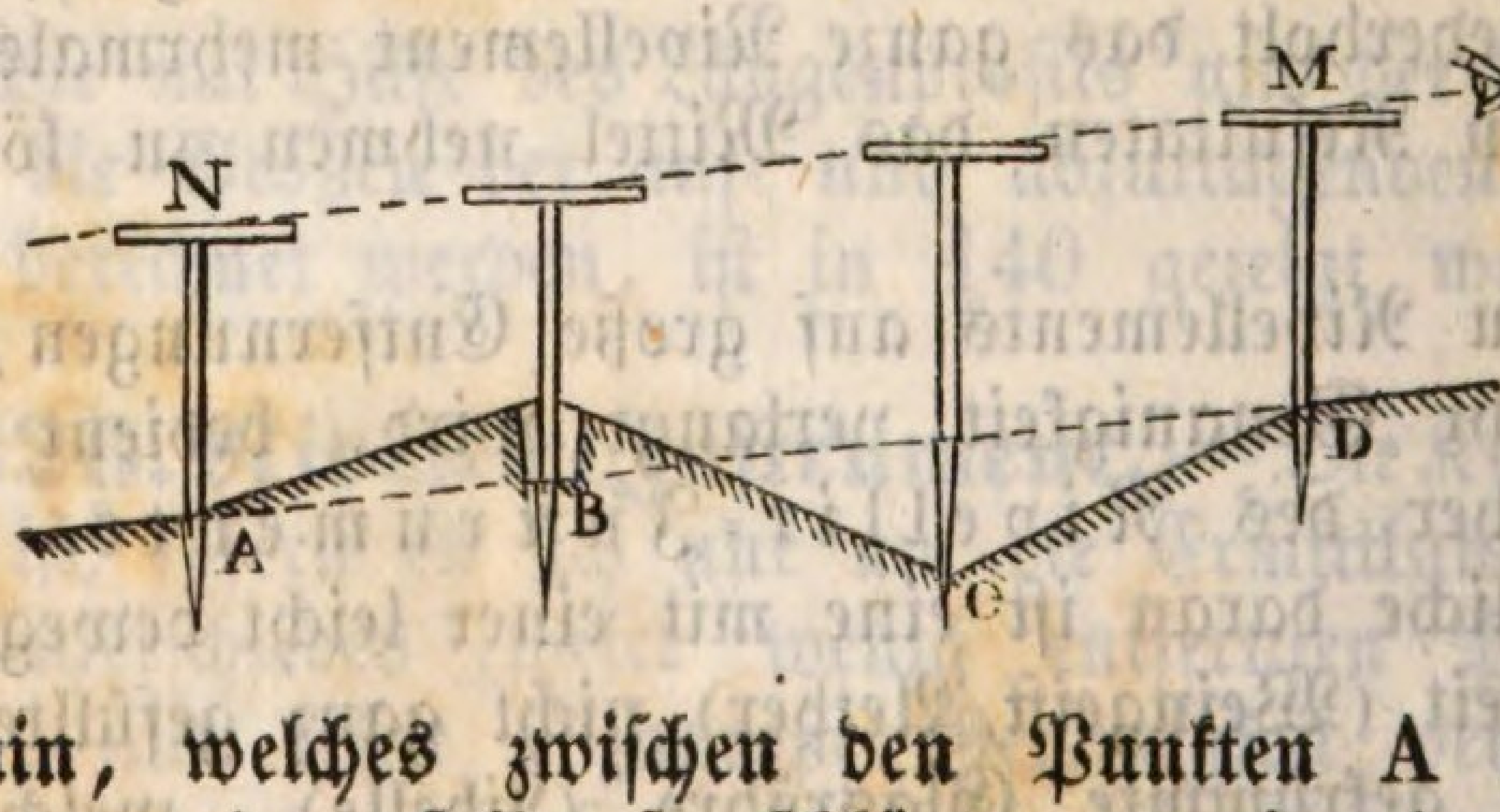
326. Nivellir-Instrument. — Die Kanalwage ist, sofern es sich nur um die Ermittlung des Höhenunterschiedes zweier wenig entfernten Punkte handelt, und keine allzugroße Genauigkeit verlangt wird, wegen der Einfachheit ihrer Einrichtung und

Behandlung für den Praktiker ein sehr brauchbares und bequemes Instrument. Auch erfordert die Anfertigung desselben nebst der dazu gehörigen Latte keine besondere Kunstfertigkeit und ist mit wenig Auslagen verknüpft. Der Straßenbaumeister bedarf derselben bei Aufnahme von Längen- und Querprofilen von alten, sowie bei Ausführung neuer Straßen, bei Planirungen, bei Pflasterarbeiten, bei der Anlage von Abzugskanälen, Entwässerungen u. s. w.; der Wasserbaumeister zur Ermittelung der Höhenlage von Fach- und Senkbäumen bei Schleussen, Ueberfällen, Mühlwerken, zur Bestimmung der Tiefe eines Fundaments, eines Pfahlrostes, bei Anlage eines Pegels, Setzung eines Aichpfahles u. s. w.; der Brunnenmeister endlich zur Ermittlung, Fixirung und Regulirung der Ausflußöffnungen von Brunnen, welche durch ein Druckwerk gespeist werden u. s. w. Da jedoch die Genauigkeit der Beobachtungen mit der Kanalwage davon abhängt, wie der eine Beobachter an den beiden Wasserrädern vorbeivisirt, und wie der andere an der Latte abliest, ersteres aber bei windigem Wetter mit keiner hinreichenden Schärfe geschehen kann, so ist die Genauigkeit des Nivellirens mit der Kanalwage im Allgemeinen nicht sehr groß. Man nimmt deßhalb die Stationen möglichst kurz und wiederholt das ganze Nivellement mehrmals, um aus den Resultaten das Mittel nehmen zu können.

Zu Nivellements auf große Entfernungen, wobei mehr Genauigkeit verlangt wird, bedient man sich daher des N i v e l l i r - I n s t r u m e n t s. Das Wesentliche daran ist eine mit einer leicht beweglichen Flüssigkeit (Weingeist, Aether) nicht ganz gefüllte sehr schwach gekrümmte Glasröhre (Libelle), welche zu

einem darunter befindlichen Fernrohr genau parallel ist. Wird die Luftblase der Libelle durch eine Stellschraube in die Mitte der Glasröhre gebracht, so ist die Axe des Fernrohrs, welche im Innern durch ein Fadenkreuz bezeichnet ist, genau horizontal, und der Beobachter liest durch dasselbe auf der Nivellirlatte die entsprechende Höhe in Fuß, Zoll, Linien und Zehentelslinien auf eine Entfernung von 100—300′ selbst ab. Alles Uebrige, die Art der Aufschreibung, Berechnung und Auftragung des Nivellements ist ganz dieselbe, wie oben angegeben. Mit einem solchen Instrumente ist man im Stande, den Höhenunterschied zweier auf eine Entfernung von 12000 Fuß (1 Stunde) entlegenen Punkte bis auf weniger als einen Zoll zu ermitteln.

327. Visirkreuze. — Wenn zwischen zwei gegebenen Punkten des Terrains durch Auftragen und Abtragen der Unebenheiten eine horizontale oder gleichförmig geneigte Ebene (Planie) hergestellt werden soll, so bedient sich der Praktiker der sogenannten Visirkreuze, deren wenigstens 3 vorhanden sein müssen. Diese haben eine T förmige Gestalt und müssen alle genau gleich hoch sein. Gewöhnlich sind dieselben 3—4′ hoch. Ist nun ABCD ein unebenes



Terrain, welches zwischen den Punkten A und D planirt werden soll, so schlägt man in A und D

Pflöcke dem Boden gleich ein, und läßt sodann ein Visirkreuz in A und ein zweites in D aufstellen. Man visirt nun mit dem Auge über den oberen Rand M des Visirkreuzes bei D hinweg nach dem oberen Rand N des Visirkreuzes bei A. Ein dritter Gehilfe schlägt hierauf in C einen entsprechend hohen Pflock allmählig so tief in den Boden ein, daß ein auf den Pflock gesetztes Visirkreuz mit seinem obern Rand dem Auge in M in der Visirlinie MN erscheint. Die Höhe des Pflockes in C gibt alsdann die Höhe der nöthigen Auffüllung an. Aehnlich verfährt man in B, wo ein Loch gegraben, und ein Pflock so tief eingeschlagen wird, daß der obere Rand des aufgesetzten Visirkreuzes gleichfalls in der Visirlinie MN erscheint. Die Oberfläche des Pflockes in B gibt alsdann die Tiefe der Abgrabung daselbst an.


In Ermanglung von eigentlichen Visirkreuzen genügen auch 3 gleich lang abgeschnittene Pflöcke, Latten 2c. Alsdann müssen aber die anvisirten Punkte genau in einer geraden Linie liegen.

Beim Gebrauch der Visirkreuze ist zu beachten, daß man nicht dicht an dem ersten stehend, sondern 3—4 Fuße von demselben entfernt, visiren soll. Auch müssen die Visirkreuze möglichst vertikal aufgesetzt werden.

Druckfehler.

Seite	21	Zeile	8	von	unten	lies	Kreuzer statt: Kreuzern.
"	82	"	1	"	"	"	$\frac{10}{7}$ statt: $\frac{10}{7}$.
"	95	"	10	"	oben	"	20 c′ statt: 18 c′.
"	167	"	3	"	"	"	abgewickelt statt: abgewikelt.
"	362	"	13	"	"	"	Innern statt: Innerrn.
"	368	"	20	"	"	"	Ueberfallwehr statt: Ueberfall — Wehr.
"	382	"	3	"	unten	"	Der Boden vor der Mühlschütze statt: Der Boden der Mühlschütze.
"	390	"	7	"	oben	"	zufließenden statt: zufließende.
"	"	"	11	"	"	"	auch annähernd die statt: auch die.
"	391	"	3	"	unten	"	0,0967 statt: 0,967.

Druck von C. R. Schurich in München.



Dempp Taschenbuch III. Aufl.